Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. А. Урусов, Использование разделяющих моментов для доказательства сингулярности гауссовских мер, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm656>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:33:13

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ РАЗДЕЛЯЮЩИХ МОМЕНТОВ ДЛЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА СИНГУЛЯРНОСТИ ГАУССОВСКИХ МЕР

М. А. УРУСОВ

1. Следующий результат известен (см., например, [1; гл. VIII, замечание после теоремы (2.2)]).

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\varphi \in C([0, \infty))$, $\varphi(0) = 0$, где $C([0, \infty))$ – пространство непрерывных функций $[0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}$. Обозначим через P винеровскую меру на $\mathcal{B}(C([0, \infty)))$, через $\tilde{P}$ – распределение процесса $(B_t + \varphi(t))_{t \in [0, \infty)}$, где $(B_t)_{t \in [0, \infty)}$ – стандартное броуновское движение. Тогда справедливы следующие утверждения.

- (i) Если φ абсолютно непрерывна на каждом конечном отрезке и $\int_0^\infty (\varphi'(s))^2 ds < \infty$, то $\tilde{P} \sim P$.
(ii) Если не выполнены условия (i), то $\tilde{P} \perp P$.

В п. 2 мы вводим понятие *разделяющего момента*, а в п. 3 мы приводим простое доказательство теоремы 1, использующее разделяющие моменты.

2. Рассмотрим измеримое пространство $(\Omega, \mathcal{F})$ с непрерывной справа фильтрацией $(\mathcal{F}_t)_{t \in [0, \infty)}$ ($\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \mathcal{F}_{t+\varepsilon}$). Если τ – момент остановки, то через $\mathcal{F}_\tau$ обозначим σ -алгебру, определенную по формуле $\mathcal{F}_\tau = \{A \in \mathcal{F} : A \cap \{\tau \leq t\} \in \mathcal{F}_t \text{ для всех } t \in [0, \infty)\}$ (в частности, $\mathcal{F}_\infty = \mathcal{F}$). Пусть P и $\tilde{P}$ – вероятностные меры на $(\Omega, \mathcal{F})$. Как обычно, мы обозначаем через P_τ (соответственно, $\tilde{P}_\tau$) ограничение P (соответственно, $\tilde{P}$) на $\mathcal{F}_\tau$.

Присоединим к $[0, \infty]$ точку δ такую, что $\delta > \infty$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Отображение $S: \Omega \rightarrow [0, \infty] \cup \{\delta\}$ назовем *расширенным моментом остановки*, если $\{S \leq t\} \in \mathcal{F}_t$ для любого $t \in [0, \infty]$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. (i) Существует расширенный момент остановки S такой, что для любого момента остановки τ

$$\tilde{P}_\tau \sim P_\tau \text{ на множестве } \{\tau < S\}, \quad (1)$$

$$\tilde{P}_\tau \perp P_\tau \text{ на множестве } \{\tau \geq S\}. \quad (2)$$

(ii) Если S' – другой расширенный момент остановки с этими свойствами, то $S' = S$ $P, \tilde{P}$ -п.н.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Любой расширенный момент остановки, удовлетворяющий (1) и (2) для всех моментов остановки τ , назовем *разделяющим моментом* для P и $\tilde{P}$.

Понятие разделяющего момента введено в [2], где оно используется для получения критериев локальной абсолютной непрерывности, абсолютной непрерывности и сингулярности мер P и $\tilde{P}$ в случаях, когда P и $\tilde{P}$ – распределения процессов Леви, решений СДУ и процессов Бесселя.

3. Прежде чем доказывать теорему 1, сформулируем некоторые вспомогательные утверждения.

ЛЕММА 5. Рассмотрим постановку п. 2. Пусть S – разделяющий момент для P и $\tilde{P}$. Тогда

$$\tilde{P}_0 \perp P_0 \iff S = 0 \text{ } P, \tilde{P}\text{-п.н.} \iff S = 0 \text{ } P\text{-п.н.}$$

Доказательство проводится непосредственно.

ЛЕММА 6. Рассмотрим некоторый стохастический базис $(\Omega, \mathcal{F}, (\mathcal{F}_t), P)$. Пусть $\varphi \in C([0, \infty))$, $(A_t)_{t \in [0, \infty)}$ – непрерывный согласованный процесс, имеющий ограниченную вариацию на конечных отрезках, τ – момент остановки, $P(\tau > 0) > 0$. Предположим, что процесс $(\varphi(t \wedge \tau) - A_{t \wedge \tau})_{t \in [0, \infty)}$ является локальным мартингалом. Тогда существует $\varepsilon > 0$ такое, что функция φ имеет ограниченную вариацию на отрезке $[0, \varepsilon]$.

Доказательство аналогично доказательству того, что детерминированный семимартингал имеет ограниченную вариацию на конечных отрезках (см. [3; гл. I, предложение 4.28]).

ЛЕММА 7. В условиях теоремы 1 пусть либо φ не является абсолютно непрерывной функцией на отрезке $[0, t]$ для любого $t > 0$, либо φ абсолютно непрерывна на $[0, t]$ при достаточно малых $t > 0$, но $\int_0^t (\varphi'(s))^2 ds = \infty$ для любого $t > 0$. Тогда $\tilde{P} \perp P$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Обозначим через X канонический процесс на $C([0, \infty))$, т.е. процесс, определенный по формуле $X_t(\omega) = \omega(t)$. Рассмотрим фильтрацию $\mathcal{F}_t = \bigcap_{\varepsilon > 0} \sigma(X_s; s \in [0, t + \varepsilon])$ и положим $\mathcal{F} = \bigvee_{t \in [0, \infty)} \mathcal{F}_t$. (Тогда $\mathcal{F} = \mathcal{B}(C([0, \infty)))$.) Пусть S – разделяющий момент для P и $\tilde{P}$.

Легко видеть, что σ -алгебра $\mathcal{F}_0$ тривиальна по каждой из мер P и $\tilde{P}$. Отсюда и из леммы 5 получаем, что либо $S = 0$ $P, \tilde{P}$ -п.н., либо $S > 0$ $P, \tilde{P}$ -п.н. Докажем, что второй вариант невозможен.

Предположим противное: $S > 0$ $P, \tilde{P}$ -п.н., или, что эквивалентно, $\tilde{P}_0 \not\perp P_0$. Поскольку любой момент остановки на винеровской фильтрации п.н. совпадает с предсказуемым моментом, то существуют моменты остановки τ' и τ'' такие, что $0 < \tau' < S$ P -п.н. и $0 < \tau'' < S$ $\tilde{P}$ -п.н. Положим $\tau = \tau' \wedge \tau''$. Легко проверить, что $0 < \tau < S$ $P, \tilde{P}$ -п.н. Согласно (1), $\tilde{P}_\tau \sim P_\tau$.

Рассмотрим càdlàg $(\mathcal{F}_t, P)$ -мартингал $Z_t = E_P \left(\frac{d\tilde{P}_\tau}{dP_\tau} \mid \mathcal{F}_t \right)$, $t \in [0, \infty)$. Отметим, что Z

является равномерно интегрируемым мартингалом с предельным значением $Z_\infty = \frac{d\tilde{P}_\tau}{dP_\tau}$. Поскольку $Z_\infty > 0$ P -п.н., то процесс Z строго положителен относительно меры P . Согласно [4; гл. III, § 3с, теорема 2], существует предсказуемый процесс β такой, что $\int_0^t \beta_s^2 ds < \infty$ P -п.н.,

$t \in [0, \infty)$, и $Z_t = \exp \left\{ \int_0^t \beta_s dX_s - \frac{1}{2} \int_0^t \beta_s^2 ds \right\}$ P -п.н., $t \in [0, \infty)$, где стохастический интеграл понимается относительно меры P .

Введем меру $Q = Z_\infty \cdot P$. Тогда $Q_\tau = \tilde{P}_\tau$. С использованием теоремы Гирсанова отсюда получаем, что процесс $\left(\varphi(t \wedge \tau) - \int_0^{t \wedge \tau} \beta_s ds \right)_{t \in [0, \infty)}$ является $(\mathcal{F}_t, \tilde{P})$ -мартингалом. По лемме 6 функция φ имеет ограниченную вариацию на достаточно малом отрезке $[0, \varepsilon]$. Используя $\tilde{P}_\tau \sim P_\tau$, отсюда можно получить, что $P \left(\forall t \in [0, \varepsilon] : \varphi(t \wedge \tau) = \int_0^{t \wedge \tau} \beta_s ds \right) = 1$. Вместе с тем, что $\tau > 0$ P -п.н. и $\int_0^t \beta_s^2 ds < \infty$ P -п.н., $t \in [0, \infty)$, это противоречит условиям леммы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Достаточно доказать лишь утверждение (ii). Его нетрудно получить из теоремы Гирсанова и леммы 3.

Автор благодарит А. Н. Ширяева и А. С. Черного за полезные советы и предложения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Revuz, M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1994. [2] М. А. Урусов, А. С. Черный // Теория вероятн. и ее примен. 2003. Т. 48. № 2. С. 416–427. [3] Ж. Жакод, А. Н. Ширяев. Предельные теоремы для случайных процессов. М.: Физматлит, 1994. [4] А. Н. Ширяев. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998.