Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. Д. Шкредов, О некоторых аддитивных задачах, связанных с показательной функцией, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm657>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.164.48.24

26 апреля 2023 г., 09:05:19

О НЕКОТОРЫХ АДДИТИВНЫХ ЗАДАЧАХ, СВЯЗАННЫХ С ПОКАЗАТЕЛЬНОЙ ФУНКЦИЕЙ

И. Д. ШКРЕДОВ

1. Постановка задач и формулировка результатов. Для простого числа p обозначим через Z_p кольцо вычетов по модулю p , а через Z_p^* — группу обратимых элементов Z_p . Пусть R — подгруппа Z_p^* . В работе [1] рассматривался вопрос о представимости произвольного элемента Z_p^* в виде суммы элементов из R и был получен следующий результат.

ТЕОРЕМА А. Пусть R — подгруппа Z_p^* . Если для некоторого натурального $l \geq 2$ выполнено $|R| > p^{1/2+1/(2l)}$, то для произвольного $b \in Z_p^*$ существуют $x_1, \dots, x_l \in R$ такие, что $b \equiv x_1 + \dots + x_l \pmod{p}$.

В работах [2] и [3] изучалась другая аддитивная задача. Пусть g — первообразный корень по модулю p , $l \geq 2$ — натуральное. Рассмотрим множество разностей

$$A^* := \{(g^{n_1} - g^{n_2}, g^{n_2} - g^{n_3}, \dots, g^{n_{l-1}} - g^{n_l}) \pmod{p} : 1 \leq n_1, \dots, n_l \leq N\}. \quad (1)$$

В [2] была доказана следующая теорема.

ТЕОРЕМА Б. Пусть a — произвольный вектор, $a \in Z_p^{l-1}$, такой, что все суммы $b_j := \sum_{k=j}^{l-1} a_k$, $1 \leq j \leq l-1$, $b_l := 0$ различны по модулю p . Пусть также $N \gg p^{1-1/(2l)+\varepsilon}$. Тогда a принадлежит A^* .

В работе [3] был рассмотрен случай $l = 2$ и исследован вопрос о принадлежности “почти всех” вычетов из Z_p множеству A^* .

ТЕОРЕМА В. Для произвольного простого p , первообразного корня $g \pmod{p}$ и любого натурального $N < p$

$$\#\{h \pmod{p} : h \neq g^x - g^y, 1 \leq x, y \leq N\} \ll \frac{p^3 \log p}{N^3}.$$

В настоящей заметке будут доказаны утверждения о разрешимости сравнений, возникающих в данных аддитивных задачах, для “почти всех” вычетов. Также будет доказано небольшое усиление теоремы В. Доказательство теорем основано на одном методе Фреймана из [4].

ТЕОРЕМА 1. Для любого натурального $l \geq 2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для любой подгруппы $R \subseteq Z_p^*$ мощности $|R| \geq C_\varepsilon p^{l/(2l-1)}$ количество $x \in Z_p^*$, $x \equiv x_1 + \dots + x_l \pmod{p}$, $x_1, \dots, x_l \in R$, больше, чем $(1-\varepsilon)p$.

ТЕОРЕМА 2. Для любого натурального $l \geq 2$ и любого $\varepsilon > 0$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для $N \geq C_\varepsilon p^{l/(l+1)}$ выполнено $|A^*| > (1-\varepsilon)p^{l-1}$.

ТЕОРЕМА 3. Для любого натурального $l \geq 2$, любого $\varepsilon > 0$ и любого набора $b_1, \dots, b_l \in Z_p^*$ существует $C_\varepsilon > 0$ такое, что для $N \geq C_\varepsilon p^{l/(2l-1)}$ количество $x \in Z_p^*$, представимых в виде $x \equiv b_1 g^{n_1} + \dots + b_l g^{n_l} \pmod{p}$, $1 \leq n_1, \dots, n_l \leq N$, больше, чем $(1-\varepsilon)p$.

ЗАМЕЧАНИЕ. При условии выполнения обобщенной гипотезы Римана в [2] было показано, что в случае $l = 2$ теорема Б верна для $N \gg p^{2/3+\varepsilon}$.

2. Доказательство теорем. Пусть M — подмножество Z_p . Обозначим через $\hat{\chi}_M(r)$ r -й коэффициент Фурье характеристической функции $\chi_M(x)$ множества M , т.е. $\hat{\chi}_M(r) = \sum_{x \in M} e_p(rx)$, где $e_p(x) = e^{2\pi i x/p}$. Пусть lM означает сумму $M + \dots + M$ l раз.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Возьмем любое $\varepsilon > 0$, $\varepsilon < 1$. Пусть $C_\varepsilon \geq \varepsilon^{-2/(2l-1)}$ и $|R| \geq C_\varepsilon p^{l/(2l-1)}$. Тогда $p^{l/2}/|R|^{(2l-1)/2} < \varepsilon$. Рассмотрим сумму $\sigma = \sum_{r \in Z_p} \hat{\chi}_R^l(r) \hat{\chi}_{lR}(-r)$. С одной стороны, эта сумма равна

$$\sum_{r \in Z_p} \hat{\chi}_R(r) \hat{\chi}_{lR}(-r) = \sum_r \sum_{x_1 \in R} \cdots \sum_{x_l \in R} \sum_{c \in lR} e_p(x_1 + \cdots + x_l - c) = p|R|^l.$$

С другой стороны, σ равна $|R|^l |lR| + \sum_{r \in Z_p^*} \hat{\chi}_R(r) \hat{\chi}_{lR}(-r)$. Так как для $r \in Z_p^*$ имеем $|\hat{\chi}_R(r)| < \sqrt{p}$ (см. [1]), то, применяя неравенство Коши–Буняковского и равенство Парсеваля, получаем

$$|R|^l (p - |lR|) \leq p^{(l-1)/2} \left| \sum_{r \in Z_p^*} \hat{\chi}_R(r) \hat{\chi}_{lR}(-r) \right| \leq p^{(l+2)/2} |R|^{1/2}.$$

Следовательно, по выбору C_ε получаем $|lR| \geq p(1 - p^{l/2}/|R|^{(2l-1)/2}) > (1 - \varepsilon)p$. Теорема доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 2. Возьмем любое $\varepsilon > 0, \varepsilon < 1$. Пусть $C_\varepsilon^1 \geq \varepsilon^{-2/(l+1)}$, $D = \{g^j : 0 \leq j \leq C_\varepsilon^1 p^{l/(l+1)}\}$, $E = \{xy : x, y \in D\}$. Пусть также $\lambda_E(z) = \#\{x, y \in D : xy \equiv z \pmod{p}\}$, а $\hat{\lambda}_E(r) = \sum_{z \in E} \lambda_E(z) e_p(rz)$. Заметим, что $\sum_z \lambda_E(z) = |D|^2$, $\sum_z \lambda_E^2(z) \leq |D|^3$ и для $r \in Z_p^*$ имеем $|\hat{\lambda}_E(r)| \leq \sqrt{p}|D|$ (см. [1]). Обозначим через $\chi_A(x)$ характеристическую функцию множества $A \subseteq Z_p^{l-1}$ из (1) с $0 \leq n_1, \dots, n_l \leq 2|D|$, а через $\hat{\chi}_A(\mathbf{r}) = \sum_{\mathbf{x} \in A} e_p(\mathbf{r}\mathbf{x})$ — ее $\mathbf{r}$ -й коэффициент Фурье. Рассмотрим сумму

$$\begin{aligned} & \sum_{r_1, \dots, r_{m-1}} \hat{\chi}_A(-(r_1, \dots, r_{m-1})) \hat{\lambda}_E(r_1) \hat{\lambda}_E(-r_1 + r_2) \\ & \cdots \hat{\lambda}_E(-r_{l-2} + r_{l-1}) \hat{\lambda}_E(-r_{l-1}) = p^{l-1} |D|^{2l}. \end{aligned} \quad (2)$$

Член в (2) с $r_1 = \dots = r_{l-1} = 0$ равен $|A| |D|^{2l}$. Оценим сверху оставшуюся сумму. Разобьем ее на сумму σ_1 по $r_1 \neq 0$ и на сумму σ_2 по $r_1 = 0$. Пользуясь оценкой для коэффициентов Фурье функции λ_E и неравенством Коши–Буняковского, получаем

$$\begin{aligned} \sigma_1 & \leq \sqrt{p}|D| \left(\sum_{r_1, \dots, r_{l-1}} |\hat{\chi}_A(-(r_1, \dots, r_{l-1}))|^2 \right)^{1/2} \\ & \times \left(\sum_{r_1, \dots, r_{l-1}} |\hat{\lambda}_E(-r_1 + r_2)|^2 \cdots |\hat{\lambda}_E(-r_{l-1})|^2 \right)^{1/2} \leq \sqrt{p} |D| p^{l-1} (p|D|^3)^{(l-1)/2}. \end{aligned}$$

При суммировании по $r_1 = 0$ второй множитель в (2) равен $|D|^2$. Как и выше, разбиваем σ_2 на сумму по $r_2 \neq 0$ и на сумму по $r_2 = 0$ и так далее. Окончательно, из (2) получаем

$$\begin{aligned} p^{l-1} |D|^{2l} & \leq |A| |D|^{2l} + \sqrt{p} |D| p^{l-1} (p|D|^3)^{(l-1)/2} \left(1 + \frac{|D|^2}{\sqrt{p}|D|^{3/2}} + \frac{|D|^4}{p|D|^3} + \cdots \right) \\ & \leq |A| |D|^{2l} + 2\sqrt{p} |D| p^{l-1} (p|D|^3)^{(l-1)/2}. \end{aligned}$$

Следовательно, по выбору C_ε^1 , получаем $|A| \geq p^{l-1} (1 - p^{l/2}/|D|^{(l+1)/2}) > (1 - \varepsilon)p^{l-1}$. Итак, существует более $(1 - \varepsilon)p^{l-1}$ векторов из Z_p^{l-1} , принадлежащих A . Ровно столько же векторов принадлежат $gA \subseteq A^*$, где в определении A^* имеем $N \geq 3C_\varepsilon^1 p^{l/(l+1)}$. Теорема доказана.

Доказательство теоремы 3 аналогично доказательствам теорем 1 и 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Konyagin, I. Shparlinski. Character Sums with Exponential Functions and their Applications. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999. [2] Z. Rudnick, A. Zaharescu // Israel J. Math. 2000. V. 120. P. 271–287. [3] M. Văjăitu, A. Zaharescu // Int. J. Math. Math. Sci. 2002. V. 29. № 6. P. 325–331. [4] Г. А. Фрейман. Основания структурной теории сложения множеств. Казань: Казанский гос. пед. ин-т, 1966.