Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Яблоков, Об усреднении решений задачи Неймана для системы Ламе теории упругости в области, часть которой представляет собой совокупность тонких цилиндров, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 4, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm658>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.147.182.235

26 апреля 2023 г., 15:08:12

**ОБ УСРЕДНЕНИИ РЕШЕНИЙ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА
ДЛЯ СИСТЕМЫ ЛАМЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ В ОБЛАСТИ,
ЧАСТЬ КОТОРОЙ ПРЕДСТАВЛЯЕТ СОВОЙ
СОВОКУПНОСТЬ ТОНКИХ ЦИЛИНДРОВ**

В. В. ЯБЛОКОВ

В работе рассматривается задача усреднения решений системы Ламе линейной теории упругости в областях с тонкими каналами, представляющими собой прямые цилиндры в $\mathbb{R}^2$ длины ε^q (ε – малый параметр, $q = \text{const} > 0$) и радиуса $a_\varepsilon = O(\varepsilon^{1+q})$, количество каналов $N_\varepsilon = O(\varepsilon^{-1})$. На границе области ставится краевое условие Неймана. Такого рода задачи с использованием более сложной техники впервые изучались в [1]. Для оператора Лапласа задача рассмотрена в [2]. Автор исследует асимптотику решения при $\varepsilon \rightarrow 0$, выписывает предельную задачу и получает оценку близости решений исходной и предельной задач.

Рассмотрим ограниченную область Ω в $\mathbb{R}^2$ с гладкой границей. Положим $\Omega^+ = \Omega \cap \{x_1 > 0\}$, $\Omega^- = \Omega \cap \{x_1 < 0\}$, $\gamma = \Omega \cap \{x_1 = 0\} \neq \emptyset$. Определим цилиндр $T_\varepsilon^0 = \{0 < x_1 < \varepsilon^q, q = \text{const} > 0, |x_2| < a_\varepsilon\}$. Пусть $T_\varepsilon = \bigcup_{j=1}^{N_\varepsilon} T_\varepsilon^j$ – объединение цилиндров вида $T_\varepsilon^0 + \varepsilon z$, лежащих целиком внутри области Ω , где $z \in \mathbb{Z}_1$ – множество векторов вида $(0, z_2)$ с целочисленными координатами. Положим $\Omega_\varepsilon^+ = \Omega^+ \cap \{x_1 > \varepsilon^q\}$, $\gamma_\varepsilon = \Omega^+ \cap \{x_1 = \varepsilon^q\}$, $G_\varepsilon^0 = \gamma \cap \partial T_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon^0 = \gamma \setminus G_\varepsilon^0$, $G_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon \cap \partial T_\varepsilon$, $\gamma_\varepsilon^1 = \gamma_\varepsilon \setminus G_\varepsilon^1$.

Пусть $f(x) = (f_1(x), f_2(x))^t$, $f_i \in L_2(\Omega)$, $i = 1, 2$. Символ “ t ” означает транспонирование.

Рассмотрим в области Ω_ε оператор стационарной системы линейной теории упругости

$$\Lambda[u] = \sum_{m,k=1}^2 \frac{\partial}{\partial x_m} \left(A^{mk} \frac{\partial u}{\partial x_k} \right). \text{ Здесь } u = (u_1(x), u_2(x))^t \text{ – вектор-столбец с компонентами}$$

$u_1(x), u_2(x)$; функции u_i определены в области Ω_ε ; A^{mk} – матрицы 2×2 с компонентами $a_{ij}^{mk} = \lambda \delta_{im} \delta_{jk} + \mu \delta_{ij} \delta_{mk} + \mu \delta_{ik} \delta_{mj}$, где $\lambda = \text{const} > 0$, $\mu = \text{const} > 0$ – постоянные Ламе; δ_{ij} – символ Кронекера. Далее мы будем опускать знак суммы, подразумевая суммирование по повторяющимся индексам.

Предположим, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \beta = \text{const} > 0$.

В области $\Omega_\varepsilon = \Omega^- \cup \Omega_\varepsilon^+ \cup T_\varepsilon \cup G_\varepsilon^0 \cup G_\varepsilon^1$ рассмотрим задачу

$$\begin{cases} \Lambda[u_\varepsilon] \equiv -\frac{\partial}{\partial x_m} \left(A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} \right) + u_\varepsilon = f(x) & \text{в } \Omega_\varepsilon, \\ \sigma(u_\varepsilon) \equiv \nu_m A^{mk} \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_k} = 0 & \text{на } \partial \Omega_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

где $\nu = (\nu_1, \nu_2)$ – вектор внешней единичной нормали к Ω_ε . Предположим, что $u_\varepsilon \in H_1(\Omega_\varepsilon)$.

С помощью леммы Лакса–Мильграма легко доказать существование и единственность решения задачи (1). Кроме того, справедлива оценка $\|u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega_\varepsilon^+)}^2 + \|u_\varepsilon\|_{H_1(\Omega^-)}^2 + \|u_\varepsilon\|_{L_2(T_\varepsilon)}^2 \leq K_1$. Здесь и далее все $K_i = \text{const} > 0$ не зависят от ε .

Имеет место лемма, доказанная в [2].

ЛЕММА 1. *Предположим, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q} = \beta = \text{const} > 0$. Тогда для функции $g(x) \in H_1(\Omega^-)$ имеет место оценка:*

$$\left| \int_\gamma g(x) dx_2 - \beta^{-1} \varepsilon^{-q} \int_{G_\varepsilon^0} g(x) dx_2 \right| \leq K_2 (|\beta - a_\varepsilon \varepsilon^{-1-q}| + \sqrt{\varepsilon} + \varepsilon^{q/2}) \|\nabla g\|_{H_1(\Omega^-)}.$$

Пусть $v(x) = (v_1(x), v_2(x))$ – решение задачи

$$\begin{cases} \Lambda[v] = f \text{ в } \Omega^+ \cup \Omega^-, \\ (\lambda + 2\mu) \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_1 + \lambda \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)_2 = \beta \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda + 2\mu} [v]_1 \text{ на } \gamma, \\ \left(\frac{\partial v}{\partial x_1} \right)_2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x_2} \right)_1 = 0 \text{ на } \gamma, \end{cases} \quad (2)$$

где $[h] = h(+0, x_2) - h(-0, x_2)$ – скачок функции, $(h)_i$ – i -я компонента вектора, $i = 1, 2$.

Под решением задачи (2) будем понимать вектор-функцию $v \in H_1(\Omega^+)$, $v \in H_1(\Omega^-)$, удовлетворяющую интегральному тождеству

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega^+} A^{mk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx + \int_{\Omega^-} A^{mk} \frac{\partial v}{\partial x_k} \frac{\partial \varphi}{\partial x_m} dx \\ & + \int_{\Omega} v \varphi dx + \beta \frac{(\lambda + 2\mu)^2 - \lambda^2}{\lambda + 2\mu} \int_{\gamma} [v]_1 [\varphi]_1 dx = \int_{\Omega} f \varphi dx \end{aligned}$$

для произвольной функции $\varphi \in H_1(\Omega^+)$, $\varphi \in H_1(\Omega^-)$.

Существование и единственность обобщенного решения задачи (2) доказывается с помощью леммы Лакса–Мильграма. Будем предполагать, что $v \in C^2(\overline{\Omega}^-)$, $v \in C^2(\overline{\Omega}^+)$.

Из интегральных тождеств для задач (1) и (2), используя лемму 1, гладкость функции v и неравенство Корна, можно получить оценку

$$\int_{\Omega_{\varepsilon}} (u_{\varepsilon} - v) dx + \int_{\Omega_{\varepsilon}^+} |\nabla(u_{\varepsilon} - v)|^2 dx + \int_{\Omega^-} |\nabla(u_{\varepsilon} - v)|^2 dx \leq K_3 (\varepsilon^{q/2} + \sqrt{\varepsilon} + |\beta - a_{\varepsilon} \varepsilon^{-1-q}|). \quad (3)$$

ТЕОРЕМА. Пусть функция u_{ε} – обобщенное решение задачи (1), а $v \in C^2(\overline{\Omega}^-)$, $v \in C^2(\overline{\Omega}^+)$ – решение задачи (2). Пусть $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} a_{\varepsilon} \varepsilon^{-1-q} = \beta = \text{const} > 0$, где $q = \text{const} > 0$. Тогда имеет место оценка (3).

Заметим, что если отказаться от гладкости функции v , то аналогичным методом можно доказать слабую в H_1 сходимость u_{ε} к v .

В заключение автор выражает благодарность проф. Т. А. Шапошниковой за постановку задачи и постоянный интерес к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] В. А. Марченко, Е. Я. Хруслов. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев: Наукова думка, 1974. [2] Т. А. Шапошникова // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37. № 9. С. 1250–1257.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
14.07.2003