Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

От правления Московского математического общества, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 173–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm662>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 11:53:38

ОТ ПРАВЛЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

Состоялись очередные заседания Московского математического общества:

3 сентября 2002 г. состоялось *Отчетно-выборное собрание Московского математического общества*. Были заслушаны отчеты Правления и Ревизионной комиссии ММО. Работа Правления за отчетный период была признана удовлетворительной.

Состоялись выборы руководящих органов ММО.

Правление ММО избрано в составе: В.И. Арнольд – президент, А.А. Болибрух, Ю.С. Ильяшенко – вице-президенты, С.П. Новиков – главный редактор журнала “Успехи математических наук”, А.В. Михалев – казначей, В.М. Тихомиров – библиотекарь, В.М. Бухштабер – ответственный за краткие сообщения ММО и за контакты с Европейским математическим обществом, С.М. Гусейн-Заде, И.А. Дынников – ученые секретари, Н.Х. Розов – председатель секции средней школы, Д.В. Аносов, А.В. Булинский, В.А. Васильев, Э.Б. Винберг, Л.Р. Волевич, В.М. Закалюкин, А.Г. Костюченко, И.М. Кричевер, Р.А. Минлос, А.И. Нейштадт, Я.Г. Синай, Ю.П. Соловьев, А.Б. Сосинский, А.Н. Тюрин.

Ревизионная комиссия ММО избрана в составе: Ю.М. Смирнов (председатель), В.А. Голубева, А.Д. Мышкис, Е.Г. Складченко, А.В. Фурсиков.

Состоялись очередные заседания Московского математического общества:

Заседание 19 февраля 2002 г. Студенческие чтения. Д.А. ТИМАШЕВ. *Сферические многообразия*.

Во многих задачах геометрии и теории представлений естественно возникают однородные пространства алгебраических групп: к ним относятся аффинные и проективные пространства, грассманианы, пространства флагов, многообразия квадрик, матриц данного ранга и др. Те же причины, которые вызывают необходимость перехода от аффинного пространства к проективному (например, наличие у системы алгебраических уравнений решений, “уходящих на бесконечность”), побуждают изучать компактификации или, более общим образом, эквивариантные вложения однородных пространств (т.е. многообразия, содержащие данное однородное пространство в виде открытой плотной орбиты). Замечательный класс торических многообразий образован эквивариантными вложениями алгебраических торов $\mathbb{C}^* \times \dots \times \mathbb{C}^*$.

Сферические однородные пространства редуктивных групп (к числу которых относятся все вышеприведенные примеры, кроме первого) характеризуются тем, что борелевская подгруппа имеет на таком пространстве открытую орбиту, а также простотой спектра линейных представлений в пространствах сечений линейных расслоений и рядом других эквивалентных свойств. Их эквивариантные вложения – сферические многообразия – допускают красивое описание в терминах выпуклой геометрии (многогранники и многогранные конусы), обобщающее хорошо известную теорию торических многообразий. Такие различные задачи, как классификация алгебраических полугрупп, разложение тензорных произведений некоторых неприводимых представлений простых алгебр Ли на неприводимые слагаемые, подсчет числа плоских коник, касающихся пяти данных коник, и др., допускают интерпретацию и решение в рамках теории сферических многообразий. О некоторых из этих задач рассказано в докладе.

Заседание 26 февраля 2002 г. А.С. ЧЕРНЫЙ. *Сингулярные стохастические дифференциальные уравнения*.

В докладе рассматриваются одномерные однородные стохастические дифференциальные уравнения вида

$$X_t = x_0 + \int_0^t b(X_s) ds + \int_0^t \sigma(X_s) dB_s, \quad t \geq 0, \quad (*)$$

где $b: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, $x_0 \in \mathbb{R}$. Напомним, что (слабым) решением этого уравнения называется такой случайный процесс X , что найдется броуновское движение B , для которого выполнено равенство (*). (Слабая) единственность понимается в том смысле, что для любых решений X и $\tilde{X}$ распределения процессов X и $\tilde{X}$ совпадают.

Существует обширная теория, относящаяся к существованию и единственности решений уравнений вида (*), а также более общих стохастических дифференциальных уравнений. Для уравнений вида (*) одним из лучших известных достаточных условий существования и единственности решения является условие Энгельберта–Шмидта. Оно состоит в том, что функция $(1 + |b|)/\sigma^2$ локально интегрируема на вещественной прямой.

Однако и в теории, и в практике часто возникают стохастические дифференциальные уравнения, для которых это условие нарушается (в частности, использование таких уравнений необходимо, если требуется, чтобы решение было неотрицательным). Они и названы в докладе *сингулярными* стохастическими дифференциальными уравнениями. Для таких уравнений вводится понятие *особой* (или *сингулярной*) точки и объясняется, почему эти точки действительно являются “особыми”. Для *изолированных* особых точек удается провести полную качественную классификацию. В основу классификации положено исследование того, может ли решение выйти из этой точки, может ли оно достичь этой точки, может ли оно быть продолжено после достижения этой точки и т. д. Согласно построенной классификации, любая изолированная особая точка имеет один из 48 возможных типов, причем тип точки легко вычисляется по коэффициентам b и σ исходного уравнения.

Обнаружено, что изолированные особые точки 44 из 48 возможных типов не нарушают единственности решения. Точки же оставшихся 4 типов (они названы *точками ветвления*) нарушают единственность, что приводит к появлению большого числа “плохих” решений. Выделение точек ветвления является одним из самых интересных следствий данной классификации.

Построенная классификация проиллюстрирована на примере уравнений, для которых коэффициенты b и σ являются степенными функциями.

Заседание 12 марта 2002 г. Р. А. Минлос. *Как описывать частицы в квантовой физике.*

Считается, что операторы, задающие эволюцию физических систем с бесконечным числом степеней свободы (гамильтоновых квантовых полей, а также моделей твердого тела, трансформативной решетки и т. д.) обладают удивительной – так называемой “корпускулярной” – структурой спектра. А именно, в гильбертовом пространстве H , где действует оператор эволюции B , существует некоторый выделенный вектор, который описывает “вакуумное” состояние системы. Далее имеется конечный или счетный набор простейших инвариантных относительно B подпространств, каждое из которых определяет состояния некой “частицы” (одночастичные подпространства). Затем существуют двух-, трех- и т. д. частичные подпространства, описывающие состояния пары, тройки и т. д. уже имеющихся частиц. При этом, как предполагается, все эти подпространства исчерпывают все пространство H . Полностью такая картина установлена лишь для некоторых моделей, но частично она подтверждается и для большого класса физических систем. Обо всем этом рассказано в докладе. В качестве примеров разобраны: система из произвольного числа попарно взаимодействующих квантовых частиц, решеточный кристалл – как гармонический, так и ангармонический, так называемая глауберова динамика для моделей Изинга и ряд других моделей.

Заседание 19 марта 2002 г. Д. В. ТРЕЩЕВ. *Диффузия Арнольда: недавний прогресс.*

В 1964 г. В. И. Арнольд построил пример гамильтоновой системы, близкой к интегрируемой, в которой переменные действия могут изменяться существенно (на величину порядка единицы). Б. В. Чириков назвал это явление диффузией Арнольда. До недавнего времени типичность диффузии Арнольда оставалась недоказанной.

Рассказано о текущем состоянии дел в этом круге задач. В частности, рассказано о недавних достижениях J. Mather'a в стандартной постановке, а также о результатах докладчика в а priori неустойчивом варианте задачи.

26 марта 2002 г. Заседание посвящено 90-летию со дня рождения академика Александра Даниловича Александрова.

А. Д. Александров – ученый, общественный деятель, личность.

Среди нескольких десятков крупных математиков XX века, которых можно назвать Геометрами с большой буквы, одно из первых мест, если не первое, принадлежит, несомненно, А. Д. Александрову. Его идеи и результаты преобразили геометрию, внеся в самые важные ее уровни все богатство геометрических методов от геометрии античных времен до современного функционального анализа.

Его подход к геометрии, который можно кратко выразить лозунгом: “назад к Евклиду и вперед к Лебегу”, оптимально сочетал прозрачность и естественность постановок задач с самыми современными подходами к их решению.

В докладах было рассказано об основных результатах А. Д. Александрова в математике.

Но вклад А. Д. Александрова в развитие науки не ограничивается его личными достижениями в математике. Большое значение для развития науки в нашей стране имела его организационная, общественная и просветительская деятельность. Он был одним из инициаторов обновления школьного математического образования и соавтором многих учебников по геометрии. Его философские и публицистические статьи всегда были остро актуальны и служили лучшими примерами понимания гражданской ответственности ученого перед своей страной и будущим всего человечества.

Список докладов на заседании:

1. В. М. Тихомиров. *Вступительное слово.*
2. А. В. Погорелов. *Слово об А. Д. Александрове.*
3. И. Х. Савитов. *А. Д. Александров – великий геометр XX века.*
4. В. И. Рыжих. *А. Д. Александров – реформатор математического образования.*

Заседание 2 апреля 2002 г. В. Долотин. *Теоремы типа Гаусса–Бонне в любой размерности.*

Что будет аналогом теоремы о сумме внешних углов многоугольника для многомерных полиэдров? Во что может превратиться теорема Стокса, если гладкое многообразие сделать кусочно-линейным? Что общего между кривизной подмногообразия в евклидовом пространстве и характеристическими классами его нормального расслоения?

В докладе предложена конструкция инвариантов классов гладких погружений $M^n \rightarrow R^{n+k}$ относительно гладких гомотопий. Частным случаем (для погружений коразмерности $k = 1$, $n \geq 1$) этой конструкции является последовательность ненулевых интегралов, второй член которой (для многообразий размерности $n = 2$) соответствует классической теореме Гаусса–Бонне. Другой класс примеров отвечает характеристическим классам соответствующих нормальных расслоений. Для инвариантов типа Гаусса–Бонне дана формулировка в терминах полиэдров.

Заседание 9 апреля 2002 г. Студенческие чтения. М. Ямпольский (Торонто). *Ренормализация в одномерной динамике.*

Дан обзор ренормализационной теории в одномерной динамике. Ренормализация объясняет появление универсальных констант (наподобие константы Фейгенбаума) в бифуркационных диаграммах одномерных отображений. Она также является источником самоподобия множества Мандельброта, параметризующего динамику квадратичных полиномов. Описаны результаты, полученные за последние 10 лет Салливаном, Мак-Мюлленом, Любичем, Дуади, Хаббардом и другими авторами в этой центральной области одномерной динамики.

Заседание 16 апреля 2002 г. Студенческие чтения. Т. Е. Панов. *Действия торов: комбинаторика, топология и теория гомотопий.*

Исходя из симплициального многогранника K , или более общего комбинаторного объекта, например, веера или даже абстрактного симплициального комплекса, можно построить несколько

различных типов пространств с действием тора. Общим свойством всех этих “торических пространств” является то, что структура их пространства орбит определяется комбинаторикой K . Возникающие здесь примеры включают алгебраические торические многообразия, гладкие или топологические квазиторические многообразия (введенные Дэвисом и Янушкиевичем), конфигурации координатных подпространств и их дополнения, а также так называемые универсальные момент-угол комплексы и многообразия. Как обычные так и эквивариантные когомологии этих торических пространств могут быть описаны в комбинаторных терминах, что также открывает возможность изучения комбинаторных инвариантов K топологическими методами.

Ряд интересных явлений возникает и при изучении эквивариантной топологии торических пространств. Соответствующие конструкции Бореля, как и сами пространства с действием тора, допускают регулярное категорное описание в терминах копделов (прямых пределов) различных функторов (диаграмм) из категории граней K в различные топологические или алгебраические категории. В частности, конструкции Бореля, ассоциированные со всеми вышеперечисленными торическими пространствами, гомотопически эквивалентны копделам диаграмм классифицирующих пространств торов. Когомологии такого копдела совпадают с кольцом Стенли–Рейснера комплекса K , возникающим в алгебраическом подходе Стенли к комбинаторике симплицальных комплексов. Оказывается, что для некоторых хороших K (а именно для флаговых комплексов K) копделы диаграмм торов и классифицирующих пространств торов согласуются (в том смысле, что классифицирующее пространство для копдела групп является копделом классифицирующих пространств, или “ $B \operatorname{colim} = \operatorname{colim} B$ ”). Если K не является флаговым комплексом, то два копдела более не согласуются и соответствующие препятствия определяются высшими произведениями Уайтхеда и Самельсона. Наконец, для общего комплекса K от несогласованности между диаграммой групп и диаграммой классифицирующих пространств можно избавиться, заменив копдел на его гомотопический аналог – гомотопический копдел, конструкции которого в последнее время стали объектом пристального внимания в теории гомотопий.

Доклад построен на основе совместных работ с В. М. Бухштабером, Н. Рэем (N. Ray) и Р. Фогтом (R. Vogt).

Заседание 23 апреля 2002 г. Студенческие чтения. А. Г. Хованский. *Многогранники Ньютона, эйлеровы множества и числа Ходжа–Делиня.*

Числа Ходжа–Делиня являются важными инвариантами комплексных алгебраических многообразий. Задача вычисления этих чисел для многообразия X , определенного в $(\mathbb{C}^*)^n$ общей системой полиномиальных уравнений $P_1 = \dots = P_k = 0$ с фиксированными многогранниками Ньютона $\Delta_1, \dots, \Delta_k$, связана с комбинаторикой эйлеровых множеств. Эйлерово множество – это конечное частично упорядоченное множество, наделенное некоторой дополнительной структурой. Примеры эйлеровых множеств:

- множество всех граней выпуклого многогранника,
- множество всех стратов тороидального алгебраического многообразия.

Оказывается, что числа Ходжа–Делиня стратов тороидального многообразия обладают специальной внутренней симметрией. Многообразие X , о котором говорилось выше, является одним из стратов тороидального многообразия. Именно поэтому задача вычисления чисел Ходжа–Делиня многообразия X сводится к чистой комбинаторике и решается явно.

Заседание 3 сентября 2002 г. В. И. Арнольд. *Самые длинные кривые данной степени и квазикристаллические неравенства Морса и Харнака в псевдопериодической топологии.*

Псевдопериодическая функция – это сумма линейной функции с периодической. Псевдопериодические многообразия, или квазикристаллы, – это совместные множества уровня псевдопериодических функций (например, пересечения периодических поверхностей Ферми в трехмерном пространстве несоизмеримыми с решеткой периодов плоскостями). Неравенства типа Морса и Харнака оценивают сверху средние значения топологических или геометрических инвариантов псевдопериодических объектов на единицу объема (например, среднее число критических точек функции, средние числа Бетти или объемы их множеств уровня и т. д.). Оказывается, эти средние можно оценить сверху через одни лишь степени тригонометрических многочленов, задающих периодические части псевдопериодических функций.

Доказательства этих результатов (анонсированных в 1987 г. в работе о квазикристаллах) основаны на: 1) вероятностной задаче Бюффона; 2) оценке сверху длины кривой нулей тригонометрического многочлена степени n по каждой из двух переменных постоянной $8\pi n$; 3) идее регуляризации Г. Вейля, предложенной им в работе о среднем движении перигелиев Земли и Венеры. Длина алгебраической кривой степени n на двумерной сфере также ограничена сверху линейной по n постоянной, не зависящей от кривой.

Заседание 17 сентября 2002 г. А. А. Болибрух. *Обобщенные неравенства Фукса и кратности нулей решений ОДУ.*

Важными характеристиками фуксова скалярного дифференциального уравнения на расширенной комплексной плоскости являются показатели асимптотик решений в особых точках. Сумма показателей фуксова уравнения по всем особым точкам удовлетворяет знаменитому соотношению Фукса.

Понятие показателей естественным образом вводится и для систем линейных дифференциальных уравнений, как с регулярными, так и с иррегулярными особыми точками (в последнем случае следует говорить о показателях формальных решений, которые характеризуют скорости роста этих решений после отбрасывания экспоненциальных частей).

В докладе рассказано об обобщенных неравенствах Фукса для таких показателей, полученных Д. Бертраном, Э. Корелем и докладчиком, и о применении этих неравенств к оценке кратностей нулей многочленов, рассматриваемых на траекториях решений этих систем. Указанные оценки могут быть использованы для подсчета нулей абелевых интегралов и меры алгебраической независимости компонент решений систем линейных дифференциальных уравнений.

Заседание 24 сентября 2002 г. М. Э. Казарян. *Мультиособенности и кобордизмы и исчислительная геометрия.*

Традиционно исчислительная геометрия считается ветвью алгебраической геометрии, а именно – теории пересечений. Современная теория пересечений с ее методами особых схем, раздутий и избыточных пересечений настолько сложна и технична, что доказательство даже простейших геометрически наглядных утверждений занимает большое количество страниц, исчерченных формулами и коммутативными диаграммами. Например, количество плоскостей в $\mathbb{CP}^3$, касающихся фиксированной поверхности степени d общего положения в трех различных точках, вычислено Сальмоном еще в XIX веке, однако доказательство, которое удовлетворило бы современных алгебраистов, получено сравнительно недавно. Вместе с тем аналогичные числа для гиперповерхностей в $\mathbb{CP}^4$, $\mathbb{CP}^5$, ... вплоть до последнего времени были неизвестны.

В докладе предложен альтернативный подход, мотивировка которого лежит в топологии, точнее, теории кобордизмов и теории когомологических операций. Новые формулы, полученные на этом пути, существенно увеличивают количество решенных задач исчислительной геометрии. Основная идея состоит в том, чтобы переформулировать исходную задачу как задачу о подсчете тех или иных особенностей гладкого отображения. В свою очередь, при исследовании общих гладких отображений и их особенностей можно применять топологические методы. Хорошо известно, что топологические методы зачастую гораздо проще и быстрее приводят к желаемому ответу, хотя их применение ограничивается работой над полем комплексных чисел. Например, изучая классы когомологий, двойственные циклам локальных особенностей, Р. Том обнаружил, что эти классы должны выражаться как универсальные многочлены (называемые многочленами Тома) от классов Чженя многообразий, участвующих в отображении. Теорема о существовании многочленов Тома хорошо известна в среде алгебраических геометров, однако ее значение явно недооценено. Насколько известно докладчику, ее доказательство, не использующее топологических аргументов, до сих пор не опубликовано. Топологические идеи Тома развивались Сючем и Римани в Будапеште и, независимо, – Арнольдом, Васильевым, Казаряном в Москве. Недавно оба подхода соединились в общую теорию, ставшую мощным дополнением к методам алгебраической геометрии. Аналогом теоремы Тома для мультиособенностей является утверждение о том, что классы, двойственные циклам мультиособенностей, выражаются как универсальные многочлены от так называемых классов Ландвебера–Новикова отображения. Коэффициенты этих многочленов можно найти, рассмотрев достаточное количество примеров, в которых как классы, двойственные (мульти)особенностям, так и характеристические классы

Чженя–Ландвебера–Новикова вычисляются явно. Эти примеры очень далеки от тех исчислительных задач, к которым применяются полученные многочлены. По-видимому, именно в этом и заключается причина того, что эти формулы не были известны ранее.

Следует признать, что обсуждаемый метод еще пока не получил строгого теоретического обоснования, однако различные эвристические соображения и огромное количество численных подтверждений позволяют не сомневаться в его справедливости.

Заседание 1 октября 2002 г. Р. И. Григорчук. *Гипотеза Атья об L^2 -числах Бетти и спектры графов и групп.*

В 1976 г. в своей знаменитой работе “Elliptic operators, discrete groups and von Neumann algebras” М. Атья определил L^2 -числа Бетти многообразий и поставил вопрос о целочисленности (и рациональности) их значений. Этот вопрос (в отличие от двух других, поставленных в этой же работе) оказался трудным. Попытки его решить, предпринятые многими математиками, привели к возникновению ряда гипотез, называемых гипотезой Атья с различными приставками типа слабая, сильная и т. д. Зачастую эти гипотезы противоречат тому, что предполагал сам М. Атья. В докладе рассказано о решении первой части вопроса Атья. А именно, построено семимерное замкнутое многообразие, у которого третье L^2 -число Бетти равно $1/3$, т. е. нецело. Этот пример (построенный в совместной работе с А. Жуком, П. Линнелом и Т. Шиком) также опровергает так называемую сильную гипотезу Атья.

Для построения указанного примера был использован результат А. Жука и докладчика о спектральных свойствах так называемой группы мигающих лампочек. Спектральная теория групп и графов – это бурно развивающаяся область математики, связанная с теорией случайных блужданий, теорией операторных алгебр, теорией инвариантных средних, дискретной математикой. Основным ее направлением является изучение спектра и спектральной меры дискретного оператора Лапласа, что является весьма нетривиальной задачей для бесконечных групп и графов в силу неразвитости (для бесконечных дискретных групп) и отсутствия (для графов) теории представлений.

В упомянутой совместной работе с А. Жуком доказано, что спектральная мера оператора Лапласа на группе мигающих лампочек дискретна, она сосредоточена на счетном всюду плотном подмножестве интервала $[-1, 1]$ и имеет массу $1/3$ в точке 0 (с последним фактом и связано значение L^2 -числа Бетти в нашем примере).

В докладе упомянуты также некоторые другие результаты спектральной теории графов и связанные с ними вопросы алгебры и дискретной математики (фрактальные и ветвящиеся группы, конечные автоматы).

Заседание 8 октября 2002 г. Заседание, посвященное Международному конгрессу математиков, Пекин, 2002.

Выступления участников Конгресса (А. Б. Жижченко, Д. В. Трещева, А. Г. Сергеева, Л. Р. Волевича, И. В. Ященко и др.) с рассказами о некоторых впечатлениях от Конгресса.

Заседание 22 октября 2002 г. В. А. Воеводский. *Мотивные когомологии и гипотеза Блоха–Като.*

В 1970 г. Дж. Милнор высказал гипотезу, утверждающую, что когомологии Галуа с коэффициентами в $\mathbb{Z}/2$ для любого поля порождены, как кольцо, группой H^1 . Несколько лет назад докладчику удалось доказать эту гипотезу и значительно продвинуться в доказательстве ее обобщения на $\mathbb{Z}/\ell$ -коэффициенты с $\ell > 2$, известного как гипотеза Блоха–Като.

Ключевую роль в доказательстве играет “мотивная теория гомотопий” – некий аналог топологической теории гомотопий для алгебраических многообразий. В докладе рассказано об этой новой теории и объяснено, какие ее результаты используются при доказательстве гипотез Милнора и Блоха–Като.

Заседание 29 октября 2002 г. В. И. Арнольд. *Арифметика целочисленных квадратичных форм и релятивистская геометрия их мира де Ситтера.*

Харди написал в “Апологии математика”, что заниматься можно только либо теорией относительности, либо теорией чисел, ибо только они “никогда не имели, не имеют и не будут иметь

никаких приложений, особенно военных”. В докладе рассказано о некоторых недавних приложениях теории относительности к теории чисел.

Мир де Ситтера – это продолжение модели Клейна геометрии Лобачевского, реализуемой внутри единичного круга, на область вне этого круга (где метрика оказывается не римановой, а лоренцевской, релятивистской).

Среди результатов – исследование таких целочисленных инвариантов бинарных целочисленных квадратичных форм, как структура множества значений формы и выпуклая оболочка подгруппы времяподобных целых точек. Например, множество всех значений формы обладает “тригрупповым” свойством: произведение любых трех значений – снова значение. Вероятность подгруппового свойства (когда произведение двух значений – значение) – порядка $1/4$ (пример такой подгруппы – квадраты модулей целых чисел Гаусса).

Рассказано также о росте числа классов форм с ростом модуля их определителя (эти вопросы относятся к эргодической теории чисел).

Заседание 5 ноября 2002 г. И. А. Дынников. О “новом” подходе в теории узлов.

Еще в конце XIX в. немецкий математик Брунн отмечал, что любой узел в трехмерном пространстве может быть реализован кривой, целиком содержащейся в “книге”, т.е. объединении конечного числа полуплоскостей с общей границей. Однако, до недавнего времени этот подход не находил каких-либо важных приложений. Для большинства результатов теории узлов не важно, каким именно образом мы представляем узлы, поэтому, как правило, используется наиболее естественный – проекция на плоскость.

Недавно докладчику удалось показать, что любое “книжное” представление тривиального узла может быть монотонно упрощено с помощью простых преобразований, аналогичных движениям Райдемайстера. При этом сложность, которая монотонно уменьшается, – это число точек пересечения узла с “переплетом” книги. Это дает возможность построить алгоритм распознавания тривиального узла, намного более простой, чем известный алгоритм Хакена.

При доказательстве использовалась замечательная техника поверхностей со слоением, разработанная Дж. Бирман и У. Менэско около десяти лет назад для изучения совсем другого способа представления узлов – замкнутых кос.

Об этом и некоторых смежных задачах рассказано в докладе.

Заседание 19 ноября 2002 г. М. А. Шубин. Дискретность спектра операторов Шрёдингера.

В 1910 г. Г. Вейль указал теперь уже классическое достаточное условие дискретности спектра одномерного оператора Шрёдингера: спектр дискретен, если потенциал $V(x)$ стремится к бесконечности при x , стремящемся к бесконечности. В дальнейшем этот результат был распространен на многомерные операторы Шрёдингера (К. Friedrichs, 1934).

В 1953 г. А. М. Молчанов указал замечательное необходимое и достаточное условие дискретности спектра, формулируемое в терминах емкости. Этот результат объяснен в докладе вместе с недавними существенными продвижениями, принадлежащими В. А. Кондратьеву, В. Г. Мазе и докладчику. В частности, удалось значительно уточнить результат А. М. Молчанова и распространить его на магнитные операторы Шрёдингера.

Заседание 26 ноября 2002 г. Лоран Лаффорд (Институт высших научных исследований, Франция). Модулярные компактификации.

В алгебраической геометрии зачастую возникает ситуация, когда, желая компактифицировать многообразие модулей, параметризующее геометрические объекты некоторого типа, мы видим на границе другие модулярные многообразия, классифицирующие объекты того же типа, но с меньшими, в каком-то смысле, инвариантами. Эти многообразия по определенным правилам приклеиваются к исходному. (Примеры: стабильные расслоения, штуки Дринфельда, абелевы и полуабелевы многообразия, гладкие проективные кривые с n отмеченными точками и т. д.)

Естественно было бы задавать эти компактификации как решение некоторой единой глобальной проблемы модулей, учитывающей естественную стратификацию наших компактификаций, а также описывать комбинаторную структуру, отвечающую за взаимоотношения стратов, и опи-

сывать каждый страт как склейку модулярных многообразий того же типа, что и открытый страт, но связанных с меньшими комбинаторными данными.

В ситуации, когда мы классифицируем линейные объекты, можно построить геометрическую модель, отвечающую на все эти вопросы. Эта модель связана с двумя торическими многообразиями, орбиты одного из которых соответствуют определенного типа укладкам выпуклых многогранников, а орбиты другого – парам, состоящим из такой укладки и одного из ее элементов (клетки или грани клетки). Эти два торических многообразия связаны морфизмом, забывающим этот элемент, морфизм этот проективный и плоский. Страты компактификации индексируются укладками нашего объекта, а отношения прилегания между стратами соответствует отношению измельчения укладки, причем для данной укладки ассоциированный страт определяется склейкой модулярных многообразий, индексированных клетками укладки в соответствии с некоторыми правилами склейки клеток в укладке.

Здесь естественно спросить себя, распространяется ли эта модель на нелинейный случай.

Заседание 3 декабря 2002 г. Ю. В. НЕСТЕРЕНКО. *Как отличить простое число от составного.*

Двести лет назад К. Ф. Гаусс писал: “Задача о том, как отличать составные числа от простых и разлагать первые на их простые сомножители, принадлежит к важнейшим задачам всей арифметики”. В последние два десятилетия, благодаря в первую очередь запросам криптографии и широкому распространению ЭВМ, исследования этих задач переживают весьма бурный и плодотворный период. Наиболее быстрые в настоящее время алгоритмы проверки чисел на простоту используют вычисления в круговых полях или на эллиптических кривых и эффективны на практике. Тем не менее в течение длительного времени была открытой теоретическая проблема: *доказать, что задача проверки на простоту имеет полиномиальную сложность*. Эту проблему решили летом текущего 2002 года индийские математики М. Agrawal, N. Kayal, N. Saxena. Они нашли новый алгоритм, который требует $O(\ln^{12} N)$ арифметических операций для ответа на вопрос, является заданное число N простым или составным. Сам по себе алгоритм элементарен, но доказательство его работоспособности, а также оценка сложности основаны на очень глубоких результатах аналитической теории чисел (Е. Fouvry, 1985)

В докладе рассказано об этом замечательном достижении.

Заседание 10 декабря 2002 г. С. П. Новиков. *Геометрия разностных уравнений на триангулированных многообразиях.*

В последние годы, исходя из теории интегрируемых систем, докладчик совместно с И. А. Дынниковым выполнил серию работ по дискретизации фундаментальных линейных операторов на триангулированных многообразиях. Здесь возникает нестандартная дискретизация дифференциально-геометрических связностей в расслоенных пространствах и нестандартная дискретизация уравнений Коши–Римана на правильной треугольной решетке и на произвольном двумерном многообразии с черно-белой триангуляцией. Эта теория кардинально отличается от стандартной, связанной с прямоугольными решетками.

Заседание 17 декабря 2002 г. А. Г. Хованский. *Многомерный топологический вариант теории Галуа.*

В топологическом варианте теории Галуа роль полей играют римановы поверхности функций, а роль групп Галуа играют группы монодромий этих римановых поверхностей. Изучаются изменения, которые претерпевают группы монодромий при различных операциях над функциями. На этом пути удается получить наиболее сильные результаты о неразрешимости уравнений в явном виде. Для функций одной переменной такая теория была построена около 30 лет назад в кандидатской диссертации докладчика. Недавно докладчик построил многомерный вариант топологической теории Галуа. В докладе сделан обзор этих результатов и классических результатов о неразрешимости уравнений в явном виде, принадлежащих Абелю, Галуа, Лиувиллю, Пикару, Вессю и Колчину.

Заседание 18 февраля 2003 г. Студенческие чтения. Ю. С. Ильяшенко. *Проблемы сохранения в голоморфной динамике и теорема Купки–Смейла для полиномиальных автоморфизмов плоскости.*

Голоморфная динамика – это теория динамических систем, заданных полиномиальными векторными полями или отображениями. Если степень полинома фиксирована, семейство отображений конечномерно. В таком семействе невозможны локальные возмущения: каждое изменение коэффициентов полиномов, задающих систему, приводит к глобальному изменению системы во всем фазовом пространстве.

Отображение плоскости на себя обладает свойством Купки–Смейла, если все его периодические точки гиперболически, а их устойчивые и неустойчивые многообразия пересекаются трансверсально. Типичность этого свойства для гладких отображений доказывается с помощью локальных возмущений и теоремы трансверсальности. Для полиномиальных отображений техника локальных возмущений не работает, и приходится пользоваться так называемой стратегией Петровского–Ландиса.

Эта стратегия применяется к доказательству того, что некоторые геометрические свойства (например, трансверсальность устойчивых и неустойчивых многообразий периодических орбит) присущи полиномиальным динамическим системам из некоторого всюду плотного (и даже более массивного) множества. Стратегия состоит в следующем. Предположим, что интересующее нас свойство не выполняется на некотором открытом множестве. Докажем, что тогда это свойство нарушается глобально по пространству параметров. Эта глобальность и формализуется в виде теоремы сохранения. Докажем, кроме того, что существует область, может быть, далекая от первой, в которой интересующее нас свойство сохраняется всюду. Это противоречит упомянутой выше теореме сохранения и доказывает локальную типичность изучаемого свойства.

На этом пути доказана типичность свойства Купки–Смейла для отображения Эно (совместная работа Баззарда, Хруски и докладчика). Большинство проблем сохранения, например, проблемы сохранения комплексных предельных циклов, остаются нерешенными.

Заседание 25 февраля 2003 г. А. А. Глуцук. *Одновременная униформизация слоений на римановы поверхности.*

(Почти) комплексная структура на двумерной поверхности – это семейство комплексных структур (т.е. “операторов умножения на i ”) на касательных плоскостях к ней. Известна следующая теорема (Морри, Векуа, Альфорс, Берс, ...): всякая измеримая почти комплексная структура на $\mathbb{R}^2$ с ограниченной дилатацией эквивалентна комплексной прямой $\mathbb{C}$ со стандартной комплексной структурой.

В докладе рассказано о расслоенных аналогах этой теоремы для слоений на римановы поверхности. А именно, рассмотрим двумерное слоение на римановом многообразии (M, g) (в большинстве случаев многообразие предполагается компактным). Метрика g индуцирует комплексную структуру на каждом листе. Предположим, что при этом каждый лист становится параболической римановой поверхностью, т.е. его универсальная накрывающая, снабженная естественной комплексной структурой, конформно эквивалентна $\mathbb{C}$. Из гладкой версии теоремы следует, что на каждом листе L существует функция $\phi: L \rightarrow \mathbb{R}_+$ класса C^∞ такая, что метрика ϕg листа плоска и полна.

Вопрос 1. Можно ли выбрать функцию $\phi: M \rightarrow \mathbb{R}_+$ класса C^∞ такую, что ограничение метрики ϕg на каждый лист является плоской и полной метрикой?

Вопрос 2. В случае положительного ответа, можно ли выбрать евклидову метрику g' на M , совпадающую с ϕg вдоль листов, для которой каждый лист вполне геодезичен?

Аналогичные вопросы были исследованы А. Верховским, А. Канделем, Х. Гомес-Монтом и А. Линсом Нето для некоторых голоморфных слоений на аналитические кривые. Кандель получил полный ответ на вопрос 1 для ламинаций на гиперболические (эллиптические) римановы поверхности.

Вопрос 1 был сформулирован Э. Жисем и исследован им же в 1995 г. для линейных слоений на торе $\mathbb{T}^3$ с нестандартной метрикой в предположении, что линейная функция, задающая слоение, удовлетворяет диофантову условию. Положительный ответ для произвольного линейного слоения (без диофантова условия) на $\mathbb{T}^n$ с произвольной нестандартной метрикой был получен докладчиком в 1999 г., и был доказан положительный ответ на вопрос 2 при некотором диофантовом условии на слоение. Это диофантово условие оптимально.

В докладе обсуждены упомянутые выше и близкие к ним результаты и сформулированы некоторые открытые задачи. Также рассказано о голоморфных расслоенных аналогах теоремы 1 для одномерных голоморфных слоений (теоремы Берса и Ильяшенко об одновременной униформизации).

Заседание 4 марта 2003 г. С. К. Ландо. *Задача Гурвица и теория пересечений на пространствах модулей кривых.*

Поставленная в 1891 г. Гурвицем задача о перечислении (с точностью до изоморфизма) разветвленных накрытий двумерной сферы с предписанными типами ветвления над фиксированными точками ветвления в последние годы оказалась удивительно актуальной. В современных терминах она эквивалентна вычислению квантовых когомологий проективной прямой. Задача Гурвица может быть естественно переформулирована (через монодромию разветвленного накрытия) в терминах конечных групп, а также в чисто комбинаторных терминах. Именно первая переформулировка и была доминирующей до последнего времени в выборе подходов к решению задачи и к представлению ответа в ней. Однако получаемые на этом пути формулы оказываются тяжеловесными, а вычисления по ним трудоемкими, с плохо предсказуемым результатом. В то же время уже из исходных работ Гурвица видно, что, по крайней мере в значительном числе частных случаев, сами ответы оказываются простыми и понятными.

Достижения последних 5–6 лет существенно изменили точку зрения на задачу Гурвица. Истоки нового – алгеброгеометрического – подхода к ее решению лежат в пионерских работах Ляшко и Лойенги (1972 г.) по изучению топологии дополнений к дискриминанту в пространствах версальных деформаций простых особенностей. Их подход позволяет свести задачу Гурвица к вычислению степени некоторого отображения, называемого отображением Ляшко–Лойенги, действующего на пространствах мероморфных функций. Это отображение сопоставляет мероморфной функции набор ее критических значений – точек ветвления, определяемого функцией разветвленного накрытия сферы. Вычисление степени требует понимания топологии пространств модулей мероморфных функций, которые, в свою очередь, тесно связаны с пространствами модулей комплексных кривых. В результате круг частных случаев, в которых известны явные ответы, значительно расширяется, а сами ответы приобретают прозрачный геометрический смысл и ясную структуру. Доклад посвящен сути этого нового подхода и результатам его применения.

Заседание 11 марта 2003 г. Л. Р. Волевич. *Многогранник Ньютона в задачах для линейных уравнений в частных производных.*

Многогранник Ньютона полинома от нескольких переменных – это выпуклая оболочка множества показателей его мономов, так или иначе пополненного. Границу многогранника Ньютона можно воспринимать как одно из возможных обобщений степени полинома от одного переменного на случай нескольких переменных. Но это понятие значительно более информативно, чем понятие степени. Промежуточным является понятие взвешенной степени, когда при вычислении степени монома степени различных переменных суммируются с различными весами. Многогранник Ньютона концентрирует информацию о всевозможных взвешенных степенях и соответствующих старших частях: они отвечают его граням.

Многогранником Ньютона линейного дифференциального оператора в частных производных называется многогранник Ньютона его символа.

Первая часть доклада посвящена чисто алгебраической задаче описания необходимых и достаточных условий на полином от нескольких переменных, при которых он допускает оценку снизу через сумму модулей входящих в него мономов. Впервые эта задача была решена В. П. Михайловым. Дифференциальные операторы с символами из этого класса являются естественными обобщениями эллиптических операторов

В нестационарных уравнениях в частных производных имеется каноническое разбиение переменных на две группы: время и пространственные переменные, соответственно отдельно учитываются степени по этим переменным, что и приводит к естественному использованию многоугольника Ньютона на плоскости. Его рассмотрение позволяет дать далеко идущее обобщение введенных Петровским классов параболических уравнений и систем.

В докладе также кратко рассмотрены задачи для общих эллиптических систем с большим параметром. Понятие многоугольника Ньютона играет решающую роль в построении их теории.

Заседание 18 марта 2003 г. В. Ю. Калошин (Принстон, лауреат премии ММО за 2002 г.). *Рост числа периодических точек диффеоморфизмов.*

Рассмотрим компактное многообразие и его гладкое отображение в себя. Рассмотрим число периодических точек как функцию периода. Доклад посвящен обзору исследований скорости роста этой функции.

Артин и Мазур (1965), используя аппроксимации Нэша, показали, что для всюду плотного множества отображений число периодических точек растёт не быстрее экспоненты периода. Мы приведем простое доказательство этой теоремы и расскажем об удивительном явлении. Оказывается, есть типичное по Бэру множество диффеоморфизмов, для которых число периодических точек растёт сколь угодно быстро. Это отвечает на вопросы Смейла и Боуэна, которые оставались открытыми более тридцати лет. При доказательстве используются результаты Гонченко, Шильникова и Тураева.

Также рассказано о новых оценках сверху на рост числа периодических точек, полученных недавно докладчиком для типичных отображений. Здесь типичность понимается уже в метрическом, а не топологическом смысле.

Заседание 25 марта 2003 г. Студенческие чтения. О. В. ШВАРЦМАН. *Свободные алгебры автоморфных форм.*

Линейное преобразование комплексного векторного пространства называется отражением, если его порядок конечен, а коразмерность множества неподвижных векторов равна единице.

Рассмотрим конечную линейную группу G , действующую в $\mathbb{C}^2$. Через A обозначим алгебру полиномиальных функций в $\mathbb{C}^2$, и пусть I – её подалгебра, состоящая из G -инвариантных полиномов. Свойства таких алгебр изучаются в классической теории инвариантов – хорошо развитой науке с впечатляющими достижениями. Одно из них – теорема Шевалле о свободе: *если группа G порождается отражениями, то алгебра I свободна.*

Доклад посвящен обобщению этого факта в ситуации, когда в открытом конусе K в $\mathbb{C}^2$ действует линейная группа G , порожденная отражениями. При этом требуется, чтобы проективизация конуса была односвязной областью на сфере Римана $\mathbb{P}^1(\mathbb{C})$, а группа G действовала там дискретно и кокомпактно.

Теперь роль A играет алгебра функций, голоморфных в конусе и полиномиальных на прямых, а подалгебра инвариантов I больше известна под именем алгебры G -автоморфных форм. Главный результат доклада касается необходимых и достаточных условий для свободы алгебр автоморфных форм.

Алгебры классических автоморфных форм для фуксовых групп интенсивно изучались в 80-е годы прошлого века в связи с теорией унимодальных особенностей В. И. Арнольда (пионерская работа И. В. Долгачева и последовавшие за ней публикации Ф. Ваграйха, Дж. Милнора, И. Г. Шербак и других). Вопрос о свободе в них не ставился, а между тем, зная на него ответ, можно по-новому взглянуть на результаты этих авторов.

Заседание 8 апреля 2003 г. С. Б. КУКСИН. *Математика двумерной статистической гидродинамики.*

В докладе рассказано о недавнем прогрессе в теории пространственно-двумерной системы Навье–Стокса со случайной правой частью (эта система описывает двумерную статистическую гидродинамику). А именно, рассказано, что происходит с решениями уравнения, когда время стремится к бесконечности, и когда вязкость стремится к нулю. Первая группа результатов позволяет строго доказать ряд утверждений, являющихся постулатами двумерной гидродинамики. Вторая группа результатов связана с теорией двумерной турбулентности Ларса Онзагера.

Заседание 15 апреля 2003 г. В. А. ИСКОВСКИХ. *Минимальные модели алгебраических многообразий и проблема рациональности.*

За последнюю четверть века в бирациональной геометрии алгебраических многообразий был достигнут значительный прогресс. В пионерских работах Мори и Рида в 70-х – 80-х годах была сформулирована программа минимальных моделей (ПММ) для многомерных алгебраических многообразий, обобщающая классическую теорию для алгебраических поверхностей. Кроме названных авторов глубокие результаты в разработке этой программы и особенно в её обобщённом

варианте, так называемой лог-программе минимальных моделей (лог-ПММ), получили Кавамата, Шокуров, Коллар и др.

В докладе сформулированы обе программы ПММ и лог-ПММ, отмечены основные результаты, полученные в этой области к настоящему времени, и рассказано об одном из самых существенных приложений лог-ПММ к классическим проблемам рациональности алгебраических многообразий, в частности, о доказательстве бирациональной жесткости гладких гиперповерхностей степени N в $\mathbb{P}^N$, $N \geq 4$.

29 апреля 2003 г. Заседание Клуба ученых МГУ и ММО, посвященное 100-летию со дня рождения Андрея Николаевича Колмогорова.

1. Вступительное слово ректора МГУ акад. В. А. Садовниченко.
2. Воспоминания о А. Н. Колмогорове.
3. Демонстрация кинофильмов.
4. Концерт.