Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Де Лео, Характеризация множества “эргодических направлений” в задаче Новикова о квазиэлектронных орбитах в нормальных металлах, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 5, 197–198

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm669>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.157.27.8

26 апреля 2023 г., 16:27:19

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ МНОЖЕСТВА

“ЭРГОДИЧЕСКИХ НАПРАВЛЕНИЙ” В ЗАДАЧЕ НОВИКОВА
О КВАЗИЭЛЕКТРОННЫХ ОРБИТАХ В НОРМАЛЬНЫХ МЕТАЛЛАХ

Р. ДЕ ЛЕО

В настоящей работе мы представляем красивую характеристику “эргодических направлений” в задаче С. П. Новикова о полуклассических орбитах квазиэлектронов в нормальном металле.

С конца пятидесятих годов физикам было известно, что качественное поведение проводимости в нормальных металлах под воздействием сильного однородного магнитного поля продиктовано топологическими свойствами орбит электронного квазимпульса. Однако, с топологической точки зрения, никакого существенного прогресса в изучении этого явления не было до восьмидесятых годов, когда С. П. Новиков [1] заметил, что за этой проблемой кроется красивая топологическая структура, а его ученики исследовали основные свойства этой структуры.

С математической точки зрения задача представляет собой простейший пример пуассоновой динамической системы [1], а именно, пару $(f, (\mathbb{T}^3, \{\cdot, \cdot\}_H))$, где фазовое пространство (пространство квазимпульсов) имеет “магнитную” пуассонову структуру $\{p_i, p_j\}_H = \varepsilon_{ijk} H^k$, а гамильтониан (Ферми-функция) f является периодической функцией. Для такой пары многозначная функция (1-форма) $g(p_i) = p_i H^i$ является оператором Казимира, и все решения на фиксированном уровне “энергии” c получаются как листы слоения $\omega = dg$ на поверхности $M_c^2 = \{f = c\}$.

Несмотря на простоту модели, топологические свойства траекторий квазимпульса имеют очень нетривиальную структуру. После фундаментальных результатов А. В. Зорича [2] и И. А. Дынникова [3], [4] выяснилась следующая картина: каждая функция f индуцирует на пространстве $\mathbb{R}P^2$ направлений поля ω две функции $c_m, c_M: \mathbb{R}P^2 \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что множество $c_m(\omega) \neq c_M(\omega)$ представляет собой несвязное объединение открытых множеств S_i , каждое из которых помечено некоторым элементом l_i решетки $H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$; кроме того, если имеется по меньшей мере два различных множества S_i (что в дальнейшем всюду предполагается), то их число бесконечно, а дополнение к их объединению имеет фрактальную структуру.

Смысл элементов l_i следующий: если $c_m(\omega) < c < c_M(\omega)$, то ω принадлежит одной из областей S_{i_0} и индуцирует на M_c^2 открытые траектории, имеющие сильное асимптотическое направление $\omega \times l_{i_0}$, в то время как, если $c < c_m(\omega)$ или $c_M(\omega) < c$, все траектории замкнуты. Множество, заданное условием $c_m(\omega) = c_M(\omega)$, есть объединение границ $B = \bigcup_i \partial S_i$ и множества E так называемых “эргодических направлений”, т. е. направлений ω , которые индуцируют на M_c^2 открытые траектории, заполняющие компоненты рода больше 2 [5].

ТЕОРЕМА 1. *Множество предельных точек множества меток $\{l_i\}$ совпадает с объединением $B \cup E$ множества эргодических направлений и границ зон ∂S_i .*

Для доказательства теоремы мы установим два свойства множества E эргодических направлений, непустота которого доказана в [5].

ЛЕММА 1. *Для функции f общего положения произвольная окрестность U_ω любого направления $\omega \in B \cup E$ содержит бесконечно много областей устойчивости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В обоих случаях окрестность не содержится целиком ни в какой области устойчивости. Любая рациональная точка внутри U_ω (или внутри $U_\omega \setminus (S_i \cup \partial S_i)$), если точка лежит на границе области S_i содержится в некоторой области устойчивости [6], поэтому хотя бы одна область найдется. Удаление из окрестности U_ω замыканий конечного числа областей, ее не содержащих, не может ее исчерпать, поскольку границы этих замкнутых множеств имеют не более счетного числа общих точек. Поэтому после удаления останется непустое открытое множество, и, следовательно, данная окрестность будет пересекать бесконечно много областей.

Поскольку размер области устойчивости стремится к нулю при $\|l_i\| \rightarrow \infty$, бесконечно много областей устойчивости будет целиком содержаться в данной окрестности.

Следующий нужный нам результат, который недавно получен Дынниковым [6], утверждает, что направление, соответствующее метке области устойчивости, стремится к самой области:

ЛЕММА 2. *Мы имеем $d(S_i, l_i) \leq O(\|l_i\|^{-1})$ при $\|l_i\| \rightarrow \infty$.*

Отметим, что в работе Дынникова содержится лишь убедительный аргумент в пользу этого утверждения, принципиального для настоящей работы. Мы планируем вскоре опубликовать строгое доказательство.

Лемма Дынникова имеет очевидное следствие, которое до настоящего времени нигде не было сформулировано явно:

СЛЕДСТВИЕ 1. *Для произвольной данной функции f существует бесконечно много направлений в $H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$, не соответствующих никаким областям устойчивости.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Выберем любую точку внутри области устойчивости, и пусть d – ее расстояние до границы. Достаточно близко к ней, скажем, на расстоянии $d/2$, найдется бесконечно много рациональных направлений таких, что соответствующие им элементы $H_2(\mathbb{T}^3, \mathbb{Z})$ имеют настолько большую длину, что помеченные ими области устойчивости должны были бы лежать в круге радиуса $d/2$. Среди бесконечного числа таких меток только одна может являться меткой некоторой области устойчивости.

Сопоставляя все эти факты, легко доказать наш основной результат.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Это по сути следствие из леммы Дынникова и нашей леммы 1. Действительно, пусть $\omega \in B \cup E$. Рассмотрим шары $B(\omega, \varepsilon)$ и $B(\omega, \varepsilon')$: по нашей лемме внутри обоих шаров содержится бесконечно много областей устойчивости и, в частности, для любого ε можно выбрать $\varepsilon' \leq \varepsilon$ настолько малым, что все области, целиком содержащиеся в шаре, будут иметь метки настолько большие, что $d(S_j, l_j) \leq \varepsilon/2$. Взяв теперь $\varepsilon'' = \min(\varepsilon', \varepsilon/2)$, будем иметь $S_j \subset B(\omega_i, \varepsilon/2)$ и $d(S_j, l_j) \leq \varepsilon/2$, а значит, $d(\omega_i, l_j) \leq \varepsilon$, т.е. $l_j \in B(\omega, \varepsilon)$.

Взяв $\varepsilon = 1/n$, можно использовать конструкцию, изложенную выше, для построения последовательности элементов из $\{l_j\}$, сходящуюся к ω .

Автор обязан своему научному руководителю С. П. Новикову за многочисленные плодотворные обсуждения и предложения и И. А. Дынникову за многочисленные технические обсуждения проблемы. Автор имел финансовую поддержку Indam при написании PhD в университете штата Мэриленд и Отделения математики университета г. Рима при выполнении проекта Cofin2000 “Proprietà geometriche delle varietà reali e complesse”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] С. П. Новиков // УМН. 1982. Т. 37. № 5. С. 3–49. [2] А. В. Зорич // УМН. 1984. Т. 39. № 5. С. 235–236. [3] И. А. Дынников // Матем. заметки. 1993. Т. 53. № 5. С. 57–68. [4] I. Dynnikov // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1997. V. 179. P. 45–73. [5] Р. Де Лео // УМН. 2000. Т. 55. № 1. С. 181–182. [6] И. А. Дынников // УМН. 1999. Т. 54. № 1. С. 21–60.