Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Архангельский, В. М. Тихомиров, Павел Самуилович Урысон (1898–1924),
УМН, 1998, том 53, выпуск 5, 5–26

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm67>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 17:50:58

ПАВЕЛ САМУИЛОВИЧ УРЫСОН (1898–1924)

А. В. АРХАНГЕЛЬСКИЙ, В. М. ТИХОМИРОВ

В этом году исполнилось сто лет со дня рождения Павла Самуиловича Урысона. Его жизнь трагически оборвалась, когда ему было всего двадцать шесть лет, но имя его известно каждому математику – столь фундаментальным явился его вклад в нашу науку.

П. С. Урысон родился 3 февраля 1898 года в Одессе. Он рано лишился матери. Заботу о мальчике, наряду с отцом, взяла на себя его сестра – Лина Самойловна Нейман, впоследствии известная детская писательница.

В 1912 году мальчик вместе с отцом и сестрой переезжает в Москву. В Москве юноша поступает в гимназию и блестяще заканчивает ее. Еще будучи школьником, он начинает работать в Университете Шанявского под руководством выдающегося русского физика П. П. Лазарева. Павел выполняет экспериментальное исследование по радиации рентгеновских лучей (и публикует статью под названием “О радиации трубки Кулиджа”). Он мечтает стать физиком. Но затем интерес к математике начал перевешивать, и Павел решает поступить на физико-математический факультет Московского университета, чтобы посвятить себя математике. Он становится студентом в 1915 году и вскоре примыкает к школе Николая Николаевича Лузина. (В эти годы учениками Лузина становятся П. С. Александров, Д. Е. Меньшов, М. Я. Суслин и А. Я. Хинчин.)

Окончив Университет, Урысон поступает в аспирантуру к Лузину, которую заканчивает в 1921 году. Тогда же начинается его сотрудничество с П. С. Александровым. (С 30 марта 1921 года ПСы – как называли Павла Самуиловича Урысона и Павла Сергеевича Александрова в Университете – исчисляли начало своей дружбы.) Это было поразительное время. П. С. Александров [1] писал: “Мало найдется в истории математической науки периодов столь горячего энтузиазма, как начало двадцатых годов в Московском университете, когда в столь короткий срок, буквально в несколько лет, вспыхнула большая научная школа, в значительной степени определившая развитие математики в нашей стране и сразу выдвинувшая целый ряд новых выдающихся ученых. [...] Павел Самуилович Урысон был одним из первых, если не первым среди этой молодежи и по своим дарованиям и по своей увлеченности наукой”.

К моменту окончания аспирантуры Урысон выполнил несколько ярких работ, от-

носящихся к уравнениям математической физики, теории функций и множеств, комплексному анализу, выпуклой и дифференциальной геометрии, нелинейному анализу.

Но главным делом жизни П. С. Урысона стало создание (совместно с П. С. Александровым) топологической школы в нашей стране. (С необычайной щедростью к своему другу, отодвинув себя в тень, Павел Сергеевич написал [1]: “Основное место П. С. Урысона в истории советской математики тем и определяется, что именно он является создателем советской топологии”.)

Именно в топологии Урысон получил наиболее выдающиеся результаты, результаты на все времена. Урысон первым доказал теоремы метризации и построил универсальное метрическое пространство. Важнейшим вкладом Урысона в топологию явилось создание *теории размерности*, решение проблемы, поставленной Пуанкаре.

Творчество Урысона представлено в двух томах собрания его трудов ([2], там же имеются подробные комментарии); оно было многократно с блеском освещено П. С. Александровым. (Необходимо сказать, что сам Павел Самуилович подготовил к печати примерно лишь половину того, что вошло в собрание его сочинений. Остальную часть оформил Павел Сергеевич – по оставшимся письменным наброскам Урысона и по воспоминаниям об их математических беседах. Поразительный пример благородства!)

Лина Самойловна Нейман посвятила своему любимому брату книгу [1]. Помимо ее воспоминаний и выдержек из дневника Урысона, в книге содержатся воспоминания и обзоры творчества Урысона, написанные П. С. Александровым, А. Н. Колмогоровым, Л. А. Люстерником, В. А. Ефремовичем и М. А. Красносельским. Я уверен, что читатель получит большое удовольствие, ознакомившись с этой книжкой. Отрывки из дневника Урысона, приводимые в этой книге, помимо того, что дают впечатление о его личности, являются выразительным историческим документом той эпохи.

Павел Самуилович был человеком редкой душевной красоты. Об этом много рассказывали те, кому выпало счастье быть знакомым с П. С. Урысоном: Павел Сергеевич Александров, Андрей Николаевич Колмогоров, Лазарь Аронович Люстерник и другие.

Среди многих привлекательных черт, помимо доброты, отзывчивости, душевной щедрости, все отмечали исключительную разносторонность его интересов и поразительную целеустремленность. Андрей Николаевич Колмогоров подчеркивал еще одну очень импонировавшую ему черту характера Павла Самуиловича – жизнелюбность, восхищение перед всеми проявлениями жизни.

Счастливой уверенности, что в жизни все кончается хорошо, Андрей Николаевич приписывал причину трагической гибели Урысона. Павел Самуилович, считая, что знает тайну купания в штормовую погоду, бесстрашно бросился в беспокойное море. И погиб.

Павел Сергеевич Александров так писал о своем друге: “В лице П. С. Урысона математическая наука потеряла ученого самого большого масштаба, с универсальной одаренностью, с интересами, охватывающими всю математику, с любознательностью, распространяющейся на самые разнообразные области знания человеческого. Общая одаренность его личности проявлялась [...] в его сильных и глубоких реакци-

ях на все значительное, что происходило вокруг него в жизни человеческого общества, в его умении и любви работать, в той остроте, с которой он воспринимал природу и искусство. Все это делало образ Павла Самуиловича Урысона не только живым, но и незабываемым [...] для всех людей, которым довелось с ним встретиться на жизненном пути”.

И еще: “Его любили в товарищеской среде, как любят людей, в которых чувствуется подлинное движение большой человеческой личности, одаренной не только в смысле способностей к одной какой-то специальности, но и ко всему диапазону эмоциональных, этических и социальных свойств человека”.

Работы П. С. Урысона по математическому анализу, геометрии и теории функций. В этом разделе статьи мы коснемся исследований Урысона, посвященных не топологии, а другим областям математики. Обозревая творчество Урысона, поражаешься его необычайной разносторонности.

Урысон был одним из основоположников нелинейного анализа: он выполнил первое в России исследование по теории нелинейных уравнений в бесконечномерном пространстве. В своей работе “Об одном типе нелинейных интегральных уравнений”, выполненной в 1918 году и опубликованной в 1924 году, [3], Урысон исследует проблему о положительных собственных функциях оператора $\Lambda x(\cdot) = \int_{t_0}^{t_1} K(\cdot, \tau, x(\tau)) d\tau$.

За этим важным классом нелинейных операторов закрепилось имя Урысона. В предположениях, что $K(t, \tau, 0) \equiv 0$ и производная $K'_u(t, \tau, u)$ (как функция u) непрерывна, положительна и монотонно убывает с возрастанием u , Урысон доказывает, что уравнение $\Lambda x(\cdot) = \lambda x(\cdot)$ имеет положительные решения при значениях λ из некоторого интервала (λ_1, λ_2) , причем числа λ_1 и λ_2 являются характеристическими значениями определенных линейных интегральных уравнений. Каждому $\lambda \in (\lambda_1, \lambda_2)$ соответствует единственное положительное решение $x(\cdot, \lambda)$, причем $x(\cdot, \lambda) < x(\cdot, \lambda')$, если $\lambda < \lambda'$. Детально изучено неоднородное уравнение $x(\cdot) = \mu \Lambda x(\cdot) + y(\cdot)$.

В этой работе была заложена теория положительных операторов. Она относится по сути дела к еще не родившемуся функциональному (притом нелинейному) анализу: идеи Урысона были “востребованы” лишь через тридцать лет. Исследование Урысона было продолжено в двух наших математических школах функционального анализа – одесской школе М. Г. Крейна и воронежской школе М. Г. Красносельского. В недавние годы произошел новый подъем интереса к нелинейному анализу, и работа Урысона продолжает быть актуальной и широко цитируемой.

Еще одна публикация Урысона на аналитическую тему – статья “О единственности решения линейных уравнений Вольтерра”, опубликованная в 1922 году, [4]. Там содержится красивый результат, касающийся, казалось бы, исчерпанной темы. Всем известно, что уравнение Вольтерра

$$x(t) = \int_0^t K(t, \tau)x(\tau)d\tau + y(t)$$

имеет единственное решение в L_1 , скажем, если $K(\cdot, \cdot)$ – ограничена и измерима, а $y(\cdot)$ принадлежит L_1 . Это единственное решение в пространстве суммируемых функ-

ций получается методом итераций и обосновывается принципом сжимающих отображений. А Урысон показывает, что у самых что ни на есть регулярных уравнений (даже с непрерывным ядром) решение тем не менее неединственно. Но второе решение *несуммируемо* – совершенно неожиданный поворот мысли!

Павел Самуилович доказал замечательную теорему, относящуюся к выпуклой геометрии. Он показал, что *n -мерный шар является телом максимального объема при фиксированной средней ширине*. Эта теорема исчерпывала проблему, поставленную выдающимся немецким геометром Германом Минковским, решившим ее для размерностей 2 и 3. Этот результат был опубликован в статье “Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел в n -мерном пространстве”, [5].

Шириной тела в данном направлении называется длина его проекции на данное направление. *Средней шириной* тела называется среднее значение этой величины по всем направлениям.

Рассматривая функцию $w_A(l)$ (ширину тела A в направлении l), Урысон выделяет в функциональном пространстве всех функций $w_A(\cdot)$ данного среднего значения некоторую компактную выпуклую часть, на которой достигается максимум объема. Из геометрических соображений, основанных на конструкциях Минковского, он доказывает, что максимум достигается на n -мерном шаре.

Еще одна его работа находится на стыке геометрии, топологии и теории функций комплексного переменного. Он, наряду с Вединисовым, решил проблему Каратеодори (“существует ли односвязная область, граница которой состояла бы из простых контуров второго рода”), вызванную к жизни проблематикой конформных отображений. Этой проблеме он посвятил две статьи: “Об одной задаче Carathéodory” [6] и “Über ein Problem von Herrn Carathéodory” [7].

Одна из его работ [8] (“К первой краевой задаче теории потенциала”) была посвящена теории дифференциальных уравнений с частными производными, и основное построение основывалось на физической интуиции. Эта статья была опубликована в *Math. Zeitschrift*, [8]. В работе строится пример области в трехмерном пространстве, для которой задача Дирихле неразрешима. Это – принципиальнейший для математической физики сюжет. Суть дела в том, что область Урысона имеет острие, обращенное внутрь области. Сама задача теории потенциала имеет электростатическую интерпретацию. На острие электричество не задерживается, оно “стекает”. По-видимому, свою роль сыграло и то, что Урысон в гимназический период занимался экспериментальной физикой у Лазарева.

К опубликованной статье Урысона (мы видим – оно было опубликовано после смерти автора) было сделано такое редакционное примечание: “Лишь после напечатания работы редакции стало известно, что Лебег уже довольно давно привел пример той особенности, о которой здесь идет речь [...] Тем не менее опубликование рассуждений, проведенных во всех деталях и принадлежащих перу автора столь трагически утраченного наукой, представляет интерес. [...] К этому можно прибавить, что конечно и самому П. С. Урысону предшествующие публикации по этому вопросу были неизвестны и оставались неизвестными до самой его смерти.”

(И в очередной раз можно восхититься и диапазоном Лебега, который в течение

пятнадцати лет с начала века создал теорию меры, заложил начала дескриптивной теории множеств, сделал существенный вклад в теорию тригонометрических рядов, дал определение размерности через покрытия и вот – в 1913 г. – привел пример особенности, приводящей к неразрешимости задачи Дирихле.)

Но продолжим обзор “нетопологических” работ Урысона. К работе [9] “Об одной аналитической всюду непрерывной функции”, опубликованной в *Fundamenta Mathematicae* в 1923 году, [9], в Собрании сочинений сделано примечание, что “работа выполнена в связи с подготовкой к аспирантскому экзамену по теории функций комплексного переменного”.

... Андрей Николаевич Колмогоров любил рассказывать, что в его годы нужно было сдавать множество аспирантских экзаменов и отчетов. Но их можно было избежать, если аспирант подготавливал публикацию по теме экзамена или отчета. При этом он говорил, что в большинстве случаев он сам готовил именно публикации. По-видимому, и здесь был такой случай.

Урысон строит красивый пример всюду непрерывной и аналитической вне совершенного множества меры нуль и убывающей на бесконечности функции на плоскости. Его совершенное множество – декартово произведение двух канторовых множеств, а аналитическая функция задается как предел функций вида $f_n(z) = 4^{-n} \sum \frac{1}{z - \zeta}$, где суммирование ведется по зависящей от n системе точек. Этот пример гораздо проще и естественнее примеров, предложенных ранее Помпейю и Данжуа.

В работе [10] “Пример степенного ряда, принимающего на окружности круга сходимости множество значений, не являющееся B -множеством” Урысон отдает дань энтузиазму московских математиков, вызванному изобретением A -множеств. В. В. Степанов писал спустя тридцать лет после появления работы М. Я. Суслина: “В то время нам казалось в нашем юношеском увлечении, что A -множества являются центральным вопросом всей современной математики”. И вот Урысон обнаруживает, что граничные значения степенного ряда могут не быть борелевскими (а аналитические они всегда).

Наконец, Урысону принадлежит короткая двустраничная заметка “Усиление одной теоремы Бирхгофа” [11]. Известно, что Урысон очень интересовался проблемой Пуанкаре о трех геодезических. Он, чуть усилив Бирхгофа, доказал существование одной замкнутой геодезической на многообразии рода нуль. Считалось, что он сделал и дальнейшие продвижения в задаче. В короткий период, когда он взял шефство над первокурсником Андреем Колмогоровым, Урысон ему предлагал решать задачу о трех геодезических. Но у того сразу дело не заладилось, вскоре Лузин сам взялся руководить Колмогоровым, потом Урысон погиб, но его задача бредила умами московских математиков. Через пять лет после смерти Урысона Люстерник и Шнирельман решили проблему, и это было одним из величайших достижений московской математической школы, а теория Люстерника–Шнирельмана – одно из замечательнейших завоеваний нелинейного анализа. Но в восьмидесятые годы была обнаружена некая неполнота в рассуждениях Люстерника–Шнирельмана, и только недавно проблема была, как считается, окончательно закрытой. Как развивалась бы история вариационного исчисления и нелинейного анализа, будь Урысон жив, можно только гадать.

Все сказанное — только неполный перечень достижений Урысона, не относящихся к топологическому циклу. И уже из него можно видеть, сколь разносторонним и ярким было его математическое дарование.

И еще два слова. Когда эта статья готовилась к печати, состоялся разговор одного из авторов (Тихомирова) с А. М. Вершиком. Тот сказал, что, занимаясь недавно некоторыми проблемами современной математики и обсуждая их с коллегами, он обнаружил, что часть важных фактов, которые ему понадобились, содержатся в замечательной статье Урысона, посвященной универсальному метрическому пространству. Вот еще один пример неувыдаемости творчества Урысона!¹

О топологических работах П. С. Урысона. Когда мы сейчас обращаемся к работам П. С. Урысона по топологии, сразу удивляет, насколько они современны, как отвечают тому духу, в котором теоретико-множественная топология развивалась три четверти века после него.

Главные интересы Урысона в топологии были связаны со сходимостью, компактностью, связностью, метризацией, кардинальными инвариантами и размерностью. В каждом из этих направлений его труды оказали глубокое влияние. Прежде чем рассмотреть более подробно его результаты и идеи, уместно сделать общее замечание, позволяющее объяснить, почему влияние трудов Урысона было столь велико. Урысон был одним из первых выдающихся математиков, глубоко заинтересовавшихся наиболее общими топологическими идеями и их систематическим осуществлением в соответствии с их собственной, внутренней, логикой, а не только с целью их применения к другим областям математики.

Он одним из первых увидел красоту, заключенную в этих идеях и понятиях, и оказался в числе первых художников в математике, которым удалось создать формы, позволившие выразить эту красоту. Для каждой фундаментальной идеи в математике, чтобы выразить ее адекватно, требуется найти наиболее отвечающий ей уровень абстрактности, при котором рассуждения становятся одновременно более общими, более прозрачными, и более естественными, в результате чего их и легче понять, и легче изложить.

Работы Урысона показывают, что он с самого начала понимал, что подходящую форму для воплощения и исследования центральной идеи топологии, идеи непрерывности, дает тогда совсем новое понятие топологического пространства. В то время, когда почти все математики, встречаясь со сходимостью и непрерывностью, старались свести их к сходящимся последовательностям (это время и сейчас не вполне прошло), когда слово “пространство” почти всегда обозначало сепарабельное метрическое пространство, Урысон с легкостью и свободой гения решительно двинулся за пределы этих узких сфер в огромный мир теоретико-множественной топологии, создавая понятия, пространства, устанавливая законы, которые светят в общей топологии и сегодня.

В частности, Урысон одним из первых осознал, что главные области теоретико-множественной топологии простираются далеко за границы, очерченные понятием метрического, или метризуемого, пространства.

¹Статья Вершика, посвященная этому вопросу, помещена в этом номере “Успехов”.

Он был также одним из первых, кто предвидел выдающуюся роль компактности в топологии и в математике в целом. Но об этом чуть позже.

Перейдем теперь к более подробному обзору работ П. С. Урысона по топологии. Под словом “пространство” мы всюду понимаем топологическое пространство, в котором все конечные множества замкнуты.

Урысон первым построил счетное нормальное пространство с единственной неизолированной точкой, которое не удовлетворяет первой аксиоме счетности [12]. С этой целью он рассмотрел быстро растущие последовательности целых чисел; дополнения таких последовательностей были приняты за окрестности идеальной точки.

Этот пример важен во многих отношениях. Он показывает, что даже счетные пространства с очень хорошей отделимостью не обязаны быть метризуемыми. Более того, из него видно, что и в счетных пространствах сходимость не всегда можно описать в терминах обычных сходящихся последовательностей. Урысон, по существу, определил топологию в идеальной точке с помощью предфильтра на множестве натуральных чисел, особенность которого в том, что он не содержит никакого счетного конечного предфильтра. Систематическое описание и изучение сходимости в топологических пространствах в терминах фильтров и предфильтров было предпринято много позже Н. Бурбаки [13] (а также А. Вейлем [14] и Г. Шоке).

Если приведенный выше пример весьма технически прост, то другой знаменитый пример Урысона отличается сложностью и деликатностью. Это пример бесконечного счетного связного хаусдорфова пространства [15].

Связность играет особенно важную роль в применениях теоретико-множественной топологии; она также важна для аксиоматической характеристики некоторых важных топологических пространств, таких как вещественная прямая или замкнутый интервал. Возможно, некоторые математики будут склонны квалифицировать этот результат Урысона как чисто отрицательный и не важный для приложений. Это не так; чтобы работать со связностью в конструктивном ключе, надо хорошо знать границы нашей интуиции, а это как раз и достигается данным примером.

Обратите внимание на то, что связное пространство Урысона не может быть регулярным, так как все счетные связные пространства нульмерны; таким образом, этот пример Урысона – наилучший возможный. Родственный вопрос, тоже рассчитанный на то, чтобы выяснить, насколько “плохи” могут быть связные пространства, был позднее рассмотрен Э. Хьюиттом [16]: *верно ли, что каждое бесконечное связное пространство можно разложить на два всюду плотных подпространства?* Ответ в случае регулярных (или тихоновских) пространств до сих пор не известен.

Это Урысон открыл дорогу в общую топологию вещественным числам и непрерывным функциям. Мало есть результатов, столь же удивительных и значительных, как знаменитая лемма Урысона об отделении любых двух замкнутых непересекающихся множеств в нормальном пространстве непрерывной вещественной функцией, принимающей значение ноль на одном из них и значение один на другом. Разумеется, уже были результаты в этом направлении Титце и Лебега, но они рассматривали метризуемые пространства или подпространства евклидовых пространств, в природе которых уже присутствуют вещественные числа, тогда как в мире нормальных пространств, в

котором работал Урысон, ничто не предвещало чудесного появления семейств непрерывных функций, определяющих на самом деле топологию нормального пространства.

Урысон сам ясно видел значение этой леммы, подготовившей почву для определения класса вполне регулярных пространств; глубокие результаты об этих пространствах были в дальнейшем получены А. Н. Тихоновым [17], который их и определил; сейчас их часто называют тихоновскими. Тихоновские пространства исключительно устойчивы относительно различных операций и конструкций. Кроме того, почти во всех случаях, когда математическая структура несет естественную или хорошо согласованную топологию, эта топология оказывается тихоновской. Например, каждая топологическая группа, в которой все конечные множества замкнуты, является тихоновской (это было доказано Л. С. Понтрягиным [18]).

Урысон сам очень эффективно применил разделяющие семейства непрерывных функций в доказательстве своей первой метризацииной теоремы: *каждое нормальное пространство со счетной базой метризуемо* [19]. Метод, примененный им для доказательства этой теоремы, был потом развит и применен Тихоновым при доказательстве его теорем о вложении тихоновских пространств в тихоновские кубы (произведения замкнутых интервалов) [17], а много позднее был применен и для доказательства общей метризацииной теоремы.

“Луковичная” техника, разработанная Урысоном при доказательстве его леммы, была использована в аналогичных или похожих конструкциях; в частности, при построении непрерывных псевдонорм на топологических группах. Лемма Урысона служит также главным средством для соединения в одну глобальную структуру различных структур, заданных на пространстве локально (например, в теории дифференцируемых многообразий).

Урысон глубоко интересовался феноменом сходимости в топологических пространствах. Мы уже отмечали его пример, в котором предфильтр без счетной базы был применен для того, чтобы ввести неметризуемую нормальную топологию на счетном множестве. В нескольких своих работах Урысон рассматривал вопросы существования и роли сходящихся последовательностей в общих топологических пространствах, стремясь выяснить границы класса топологических пространств, в которых обычные сходящиеся последовательности играют определяющую роль, в частности, в которых замыкание множества может быть прямо описано в терминах сходящихся последовательностей. Он ввел понятие *ж-точки* топологического пространства; это такая точка a пространства X , что некоторая последовательность точек множества $X \setminus \{a\}$ сходится к a . Среди ряда очень интересных вопросов, сформулированных в Мемуаре [12], был такой: *в каждом ли бесконечном компактном хаусдорфовом пространстве без изолированных точек есть ж-точка?* Несомненно, этот вопрос принадлежит Урысону: это было так ему свойственно – стремиться выйти за пределы, навязываемые счетностью (П. С. Александров, напротив, в своих работах этого периода, и еще в течение ряда последующих лет, как правило, не выходил в своем математическом творчестве за пределы класса сепарабельных метризуемых пространств).

Этот вопрос оказался глубоким. Чтобы построить бесконечное компактное хаус-

дорфово пространство без нетривиальных сходящихся последовательностей и без изолированных точек, необходима изощренная техника, как например стоун-чеховские компактификации или экстремально несвязные компакты. Объекты этого рода были введены в топологию много позднее М. Стоуном, Э. Чехом, А. Глисоном (см. [20]–[24]). Пространство называется *экстремально несвязным*, если замыкание каждого открытого множества в нем замкнуто. Легко убедиться, что в экстремально несвязном хаусдорфовом пространстве нетривиальных сходящихся последовательностей быть не может. Глисон [25] обнаружил, что экстремально несвязные компакты играют роль проективных объектов в категории компактных хаусдорфовых пространств и неприводимых непрерывных отображений, так что каждое компактное хаусдорфово пространство является образом некоторого экстремально несвязного хаусдорфова компакта при неприводимом непрерывном отображении (откуда следует, что существует очень много таких компактов). Систематическое исследование проективных объектов в более широких классах пространств привело В. И. Пономарева к понятию *абсолюта* топологического пространства и *теории абсолютов* (см. [20]), далеко развитой затем рядом авторов (см. [20], [23]).

А первым на вопрос Урысона ответил А. Н. Тихонов, построивший в [22] с этой целью пространство, которое фактически является наросом стоун-чеховские компактификации дискретного натурального ряда. Обратите внимание на следующий вопрос Уолтера Рудина, сформулированный в 1956 году [26] и близкий по духу вопросу Урысона: *существует ли бесконечное однородное компактное хаусдорфово пространство без нетривиальных сходящихся последовательностей?* Этот вопрос до сих пор открыт.

Следующий факт был установлен только много позже (см. [27]); он бы наверняка заинтересовал Урысона как интересный вариант ответа на его вопрос: *в каждой бесконечной компактной топологической группе каждая точка является $\mathfrak{c}$ -точкой.*

Совершенствуя подход Фреше к определению понятия пространства через последовательности (в 1906 году Фреше ввел L -пространства [28]), Урысон [29] предложил следующее условие, характеризующее L^* -пространства:

если (x_n) последовательность и x точка такие, что каждая подпоследовательность последовательности (x_n) содержит подпоследовательность, сходящуюся к x , то (x_n) сходится к x .

Этот класс объектов оказался важен с категорной точки зрения и с точки зрения теории общих пространств сходимости; в частности, М. Дольхер систематически исследовал взаимоотношения между L^* -пространствами и топологическими пространствами.

Сегодня пространства, в которых точка a лежит в замыкании множества A в том и только том случае, если некоторая последовательность точек множества A сходится к a , называются *пространствами Фреше–Урысона*. Все компакты Эберлейна (т.е. компактные подмножества банаховых пространств в слабой топологии) принадлежат к этой категории, хотя они и не обязаны удовлетворять первой аксиоме счетности.

Исследования пространств Фреше–Урысона продолжаются; например, не известно, существует ли, без дополнительных предположений, неметризуемая счетная топологическая группа Фреше–Урысона (*задача Малыгина*). Понятие пространства Фреше–Урысона породило весьма естественные обобщения, в частности понятия радиального пространства и секвенциального пространства (см. [27]).

Обратимся теперь к одной из главных тем творчества Урысона в области топологии: теме компактности. Его результаты в этом направлении были опубликованы в совместной работе с П. С. Александровым [12]. Получены они были уже в 1921–22 годах; текст был подготовлен к публикации к февралю 1923 года, но появился он в печати только в 1929 году. Влияние этой работы на развитие теоретико-множественной топологии трудно переоценить. Почему так произошло? Вот только краткий набросок того, что можно сказать по этому поводу.

Это было первое систематическое исследование компактности. И как оно современно! Рассуждения и конструкции, которые можно было бы назвать неуклюжими с современной точки зрения, практически отсутствуют. Определения даны в наиболее естественной форме, и как раз на том уровне абстрактности, который не только придает теоремам нужный уровень общности, но и делает всю теорию более прозрачной и естественной.

В этой работе достигнут совершенный баланс между превосходными теоремами и не менее замечательными примерами. Лексикографически упорядоченный квадрат, двойная окружность, две стрелки, одноточечная компактификация несчетного дискретного пространства – эти оригинальные пространства полны значения и тонкой красоты, и сегодня в еще большей степени, чем семьдесят лет назад, они входят в золотой список примеров, которые каждый теоретико-множественный тополог постоянно имеет в виду. Примеры эти многократно цитировались, модифицировались, обобщались, и превращались в теоремы. Уровень общности, который мы находим в статье, заставляет предположить, учитывая интересы Александрова в то время и направление других его работ, что инициатива в этом отношении при исследовании компактности исходила от Урысона. Я также предполагаю, по тем же причинам, что многие примеры, далеко выходящие за сферу метризуемых пространств, были придуманы П. С. Урысоном.

Особенно важным и знаменитым стало пространство две стрелки. Оно состоит из двух параллельных отрезков, упорядоченных лексикографически, с топологией, порожденной этим упорядочением. Это компактное хаусдорфово пространство, наследственно сепарабельное, совершенно нормальное (т.е. замкнутые множества в нем типа G_δ), и, следовательно, наследственно линделефово, но все еще не метризуемое. Много усилий позднее было направлено на то, чтобы определить, в какой мере этот пример совершенно нормального компакта типичен (Г. Грюнхаге, И. Юхас, В. Филиппов, см. [27], [30], [31]). Кстати, *прямая Зоргенфрея*, определенная Зоргенфреем в 1947 году, это всего лишь один из интервалов, образующих две стрелки.

Много важных свойств компактных хаусдорфовых пространств было освещено в Мемуаре. Одна серьезная проблема, которую авторы оставили в стороне, – это проблема сохранения компактности топологическими произведениями. Операция произве-

дения даже для конечного семейства топологических пространств еще не была определена в то время; только произведения конечных и счетных семейств метрических пространств были рассмотрены. В этом случае топологию произведения можно определить с помощью подходящей метрики на произведении, сконструированной из метрик на сомножителях, или с помощью сходящихся последовательностей. Ни один из этих подходов не работает в случае общих топологических пространств. Определить операцию произведения для произвольных, даже несчетных, семейств топологических пространств выпало на долю А. Н. Тихонова [17].

Много внимания в Мемуаре было уделено вопросам, связанным со следующей характеристикой компактности в терминах точек полного накопления: *пространство X компактно в том и только том случае, если для каждого бесконечного подмножества A пространства X существует точка полного накопления в X , т.е. такая точка a , что для каждой ее окрестности $O(a)$ множества $O(a) \cap A$ и A равномощны*. Это свойство равносильно исходному определению компактности в терминах открытых покрытий, возникшему из теоремы Бореля о том, что каждое счетное открытое покрытие отрезка содержит конечное подпокрытие (1894), и уточнения Лебега, что это утверждение остается верным и для любых открытых покрытий отрезка (1903). Но установленная в Мемуаре эквивалентность этих двух определений является глубоко нетривиальным результатом; при его доказательстве приходится вникать в тонкую структуру кардинальных чисел (в частности, различать регулярные и сингулярные кардиналы, следить за конфинальностью кардиналов) и, разумеется, применять арифметику кардинальных чисел. Подход к компактности через точки полного накопления широко открыл двери проникновению глубоких теоретико-множественных методов в теорию компактных пространств и в общую топологию в целом. Очень серьезные исследования были проведены в последующие годы в этом направлении (Д. Курепа, З. Балог, Б. Шапировский, В. Малыхин, Р. Ходель, Д. Шахматов, И. Юхас, А. Хайнал, В. Федорчук, П. Никош, А. Доу, С. Тодорчевич и многие другие, см. [20], [31]–[35]); эти исследования в самом разгаре и сейчас.

Важное, хотя и несложно доказываемое свойство компактных хаусдорфовых пространств, установленное в Мемуаре, это их нормальность. Нормальность не наследуется произвольными подпространствами, вообще говоря, однако вполне регулярность наследуется, так что данный результат, взятый вместе с леммой Урысона, влечет, что все подпространства компактных хаусдорфовых пространств являются тихоновскими пространствами. Это подготовило почву для знаменитой и очень важной характеристики Тихоновым тихоновских пространств как подпространств компактных хаусдорфовых пространств [17].

В Мемуаре было также обращено внимание на то, что компакты всегда замкнуты в любом объемлющем хаусдорфовом пространстве. Этот факт, как и некоторые другие свойства компактных пространств, был несколько ранее установлен Виетори-сом [36]. Работа Александрова и Урысона о компактности была выполнена независимо, и качественно отличается большей систематичностью, широтой, богатством идей и результатов. В частности, Александров и Урысон не только доказали, что каждое компактное подпространство хаусдорфова пространства X замкнуто в X , но

и рассмотрели, в какой мере данное свойство характеризует компактность. Они ввели понятие H -замкнутого пространства как такого пространства, которое замкнуто в каждом объемлющем хаусдорфовом пространстве. В Мемуаре было показано, что не каждое хаусдорфово H -замкнутое пространство компактно. С другой стороны, было установлено, что H -замкнутое хаусдорфово пространство компактно в том и только том случае, если оно регулярно. Определенный критерий H -замкнутости был установлен с этой целью. В его доказательстве мы снова встречаем одно из первых применений метода построения расширений пространств с помощью подходящих свободных фильтров. В действительности, можно сказать, что метод построения расширений с помощью фильтров, разработанный в полной мере и очень эффективно примененный в последующие годы Г. Волменом, П. С. Александровым и М. Г. Катетовым, ведет свое начало от теории H -замкнутых пространств, основы которой были заложены в Мемуаре. М. Стоун, М. Г. Катетов, С. В. Фомин, Дж. Портер, В. В. Федорчук, С. Илиадис ([37], [38]) внесли значительный вклад в дальнейшее развитие теории H -замкнутых пространств.

От теории H -замкнутых пространств ведут свое начало исследования абсолютной замкнутости в данном классе пространств. Например, тонкие результаты были получены по абсолютной замкнутости в классе регулярных пространств и в классе моровских пространств (см. статью Р. Стефенсона [39]).

В связи с теорией H -замкнутых пространств мы должны еще упомянуть одно весьма своеобразное свойство отделимости в пространствах, введенное П. С. Урысоном, которое лежит между аксиомой отделимости Хаусдорфа и регулярностью. Пространство X называется *урысоновым*, если каждые две его различные точки содержатся в открытых окрестностях, замыкания которых не пересекаются. Это свойство нашло интересные применения в теории H -замкнутых пространств и в теории относительно компактных пространств.

Разреженные компакты (т.е. компакты, в которых нет бесконечных плотных в себе подмножеств) были тоже впервые рассмотрены в Мемуаре. Впоследствии этот нетривиальный класс пространств оказался в центре многих интересных исследований.

В Мемуаре мы также находим богатые ростки теории кардинальных инвариантов. Это здесь были впервые определены характер пространства, его вес, псевдохарактер, по существу, и число Линделефа и были получены первые нетривиальные результаты о них.

Сегодня общепризнано, что в классе компактов теория кардинальных инвариантов становится особенно своеобразной, деликатной, и интересной. Примеры этому можно уже видеть в Мемуаре. Александров и Урысон доказали, что каждое счетное компактное хаусдорфово пространство метризуемо, что если точка в компактном хаусдорфовом пространстве имеет тип G_δ , то пространство в этой точке удовлетворяет первой аксиоме счетности; сейчас эти результаты – в числе наиболее цитируемых, так как они стали частью стандартной техники теоретико-множественной топологии.

Одним из наиболее интересных и глубоких результатов в Мемуаре о кардинальных инвариантах компактных пространств, несомненно, является теорема о мощности совершенно нормального компакта, утверждающая, что эта мощность не превосходит

2^ω (пространство называется *совершенно нормальным*, если оно нормально и все замкнутые множества в нем типа G_δ). Этот результат свидетельствует о близости совершенно нормальных компактов метризуемым компактам (которые, очевидно, все совершенно нормальны), хотя сами они метризуемыми могут и не быть, как это видно на примере компакта две стрелки.

Теорема о мощности совершенно нормального компакта стала прототипом многих теорем о мощности топологических пространств. Кроме того, понятие совершенно нормального компакта оказалось прямо связанным с проблемой Суслина, хотя в самом Мемуаре упоминания об этой проблеме еще нет. Действительно, если континуум Суслина существует, он должен быть совершенно нормальным компактом. В связи с этим, следующий вопрос был сформулирован В.И. Пономаревым в конце пятидесятых годов: существует ли ZFC -пример не сепарабельного совершенно нормального компакта? Отрицательный ответ на этот вопрос дал И. Юхас (см. [31]), который показал, что, в предположении аксиомы Мартина и отрицания континуум гипотезы, каждый совершенно нормальный компакт сепарабелен. Следовательно, в этих предположениях континуума Суслина не существует.

Теорема о мощности совершенно нормального компакта интересна не только сама по себе, но и тем методом, который был применен в Мемуаре для ее доказательства. Это метод ветвящихся систем множеств, приобретший впоследствии важное значение не только в теоретико-множественной топологии, но и в самой теории множеств, и в математической логике (см., в частности, работы Дж. Курепы, И. Юхаса, А. Хайнала, С. Тодорчевича [31], [40]). Конечно, метод этот уже применялся ранее при исследовании подмножеств вещественной прямой (например, при построении канторова множества) или при исследовании полных сепарабельных метрических пространств (например, П. С. Александровым для оценки мощности A -множеств, или в определении A -множеств), однако, здесь мы впервые видим его применение для исследования строения общих топологических пространств. Что было особенно важно, это было одно из первых применений ветвления потенциально несчетной длины по трансфинитной рекурсии вдоль всех счетных ординалов. В конце тридцатых годов А. Поспишил применил этот метод для доказательства того, что, в предположении континуум-гипотезы, если мощность непустого компакта не превосходит 2^ω , то он удовлетворяет первой аксиоме счетности хотя бы в одной точке [41].

Кроме того, Александров и Урысон с помощью метода ветвления доказали в Мемуаре, что мощность каждого компакта без изолированных точек не меньше, чем 2^ω .

Как П. С. Александров писал в своих комментариях к Мемуару [12] в 1948 году, исходная проблема, которую он и Урысон пытались решить в 1921 и 1922 годах, состояла в следующем: *всегда ли мощность компактного хаусдорфова пространства с первой аксиомой счетности не превосходит 2^ω* ? Заметьте, что совершенно нормальные компакты, конечно, удовлетворяют первой аксиоме счетности. Эта проблема была решена через 47 лет, в 1969 году, А. В. Архангельским [42] (ответ “да”). Но до сих пор не известно, можно ли без дополнительных предположений построить регулярное линделефово пространство X такое, что каждая точка в X типа G_δ , а мощность X больше, чем 2^ω . Не ясно также, может ли мощность такого пространства

быть больше, чем 2^c , где $c = 2^\omega$, или превосходить 2^τ , где $\tau = 2^c$.

Исследуя компактность в Мемуаре, Александров и Урысон уделили много внимания различным ее граням. Компактность, прежде всего, была для них соединением двух свойств: счетной компактности (характеризующейся возможностью выбрать из каждого счетного открытого покрытия конечное подпокрытие) и финальной компактности, называемой сегодня свойством Линделефа (и заключающейся в возможности из каждого открытого покрытия выделить счетное подпокрытие). Этим объясняется, почему они именовали компактность бикompактностью, а компакты бикompактами. В этой статье мы пользуемся современной терминологией, вполне оправдываемой принципом, согласно которому более фундаментальное и чаще употребляемое понятие должно иметь более короткое название. То, что мы сейчас называем счетно компактными пространствами, Александров и Урысон именовали компактными пространствами.

Анализируя далее понятие компактности, Александров и Урысон ввели понятие компактности пространства в данном отрезке мощностей. В частности, для каждого бесконечного кардинала τ они определили (естественным образом, в терминах открытых покрытий) понятие инициально τ -компактного пространства и пространства, число Линделефа которого не превосходит τ . Один из тонких моментов, на который они обратили внимание, — это определенные расхождения в подходах через открытые покрытия и через точки полного накопления. Результат, окончательно выяснивший этот вопрос, был получен только в начале шестидесятих годов А. С. Мищенко, который построил тихоновское, не нормальное, и потому не линделефово пространство X такое, что каждое несчетное подмножество пространства X регулярной мощности имеет в X точку полного накопления [43]. Пространства, в которых выполняется последнее свойство, называются теперь *линейно линделефовыми*. Более простой пример линейно линделефова, не линделефова, тихоновского пространства был недавно построен Р. Бузяковой и, независимо, Г. Грюнхаге, но следующая проблема остается открытой: *существует ли нормальное линейно линделефово, не линделефово пространство?* Этот вопрос особенно интересен, так как если такое пространство существует, то оно является необычайно любопытным примером даукеровского пространства (последнее означает, что хотя само пространство нормально, но произведение его на обычный отрезок не нормально — см. в связи с этим [44], [45]). Недавно, обобщая теорему о мощности компактов с первой аксиомой счетности, Архангельский и Бузякова доказали, что *мощность каждого тихоновского линейно линделефова пространства с первой аксиомой счетности не превосходит 2^ω* .

Мемуар дал также хороший толчок развитию теории локально компактных пространств. Был, прежде всего, указан пример, ставший теперь стандартным, хаусдорфова, локально компактного, локально метризуемого, счетно компактного, не компактного пространства. Это пространство ω_1 всех счетных ординалов. Хотя определить это пространство не составляет особого труда, оно весьма нетривиально, как можно заключить уже из приведенной выше комбинации его свойств. Оно проливает свет на многие вопросы. Мы видим, например, что счетно компактное пространство может не быть замкнутым в объемлющем хаусдорфовом пространстве, и что счет-

ная компактность и локальная метризуемость, даже взятые вместе, не гарантируют ни компактности пространства, ни его метризуемости. Имея этот пример в виду, авторы Мемуара уделили специальное внимание вопросу, когда локально компактное, локально метризуемое пространство метризуемо. Они показали, что метризуемость таких пространств зависит от некоторых глобальных их свойств, определяемых в терминах открытых покрытий.

Определив понятие точечно счетной базы, и тем самым неявно определив понятие точечно счетного семейства (открытых множеств), Александров и Урысон доказали, что если регулярное пространство можно покрыть точечно счетным семейством открытых, сепарабельных, метризуемых подпространств, то это пространство является свободной топологической суммой некоторого семейства сепарабельных, метризуемых пространств. Мы видим в этой теореме впервые эффективно примененное условие типа паракомпактности. В ее доказательстве рассматриваются цепи последовательно пересекающихся элементов открытого покрытия с целью анализа комбинаторного строения этого покрытия, что впоследствии стало одним из стандартных приемов метода открытых покрытий в исследовании топологических пространств.

Следующий вопрос, естественно возникающий после приведенного выше результата, был оставлен в Мемуаре открытым: *каждое ли локально компактное хаусдорфово пространство с точечно счетной базой метризуемо?* В соответствии с результатами Мемуара, для положительного ответа на этот вопрос было достаточно показать, что каждое компактное, хаусдорфово пространство с точечно счетной базой метризуемо. Это было сделано только в 1962 году, посредством весьма элегантного рассуждения, А. С. Мищенко [46].

Теперь следует сказать о работе Александрова и Урысона в направлении общей метризации проблемы. Все, кто пишет об истории топологии в России, справедливо отмечают, что метризация проблема была теми дрожжами, на которых поднималось тесто московской школы общей топологии. Чтобы объяснить, почему метризация проблема сыграла такую роль, почему она приобрела особенное значение, недостаточно просто сослаться на важность класса метризуемых пространств. Дело в том, что метризуемые пространства обладают многими топологическими свойствами, определяемыми весьма естественно, хотя и не в терминах метрик, такими, например, как паракомпактность, коллективная нормальность (далеко не всегда, кстати, просто доказываемыми). Соответственно, работа над общей проблемой метризации привела к определению и исследованию многих важных расширений класса метризуемых пространств (к двум таким классам, только что названным выше, следует добавить класс p -пространств [20], класс кружевных пространств [47], класс монотонно нормальных пространств, – этот список можно легко продолжить).

Если база пространства точечно счетна, то, по определению, каждая точка пространства принадлежит не более чем счетному множеству ее элементов. Естественным примером такой базы может служить каждая σ -дизъюнктивная база (так называется база, распадающаяся на счетное семейство дизъюнктивных семейств множеств). От этого понятия всего один (но очень важный) шаг до понятия σ -дискретной базы, введенного Бингом [48] в 1950 году, чтобы охарактеризовать метризуемость тополо-

гических пространств. Таким образом, понятие точечно счетной базы можно считать прототипом понятий σ -дискретной базы и σ -локально конечной базы, играющих решающую роль в метризационных критериях, полученных в начале пятидесятих годов Р. Бингом, Ю. Нагатой и Ю. Смирновым (см. [48]–[51]). Заметим, кстати, что до сих пор нет “наивного”, т.е. построенного в ZFC , примера неметризуемого нормально-го пространства с σ -дизъюнктивной базой (проблема Нагами; см. подробнее об этом в [53]).

Но Александров и Урысон получили и собственный общий метризационный критерий еще в 1924 году. Они пользовались понятием измельчения, введенным Читтендемом и Питчером в 1919 году [52]. Измельчением называется последовательность открытых покрытий γ_n пространства X такая, что какую бы точку x мы ни взяли и как бы ни выбрали по одному элементу из каждого покрытия γ_n , содержащему точку x , получается база пространства X в точке x . Потребовав, чтобы каждые два пересекающихся элемента покрытия γ_{n+1} содержались в некотором одном элементе покрытия γ_n , Александров и Урысон получили характеристику метризуемых пространств.

В своих комментариях к Мемуару Александров выразил неудовлетворенность этим критерием; особенно ему не нравился тот факт, что в критерии существенную роль играет нумерация. Он также отмечал в своем семинаре в более поздние годы, что прямое копирование аксиомы треугольника в формулировке метризационной теоремы производит на него плохое впечатление.

Однако, как показали последующие годы, общая метризационная теорема Александрова и Урысона тоже содержала зародыши мощных идей. Одной из таких идей является идея звездной, или барицентрической, вписанности одного открытого покрытия в другое. А. Н. Колмогоров как-то заметил, что следовало бы включить требование существования звездно вписанного открытого покрытия для любого открытого покрытия в число аксиом топологического пространства. Пространства с этим свойством были выделены Дж. Тьюки [53]; в силу фундаментальной теоремы А. Х. Стоуна, этот класс совпадает с классом паракомпактных хаусдорфовых пространств [54]. Это новое знание позволяет сегодня трансформировать метризационную теорему Александрова и Урысона в следующее утверждение: *каждое паракомпактное хаусдорфово пространство с измельчением метризуемо*. Это утверждение было сформулировано Р. Бингом в его знаменитой метризационной статье [48]. Полученный таким образом критерий можно улучшить далее: паракомпактность можно заменить на коллективную нормальность [48], естественное свойство типа отделимости, заключенное между нормальностью и паракомпактностью. Теорема в таком виде удовлетворяет требованиям, которым, по мнению Урысона (сообщенному им Александрову), хороший общий метризационный критерий должен удовлетворять: быть соединением свойства типа отделимости, усиливающего нормальность (коллективная нормальность в нашем случае), и свойства, усиливающего первую аксиому счетности (наличие измельчения в критерии Бинга; очевидно, это свойство можно интерпретировать как сильную равномерную первую аксиому счетности).

Другой вариант метризационного критерия Александрова и Урысона был получен

в результате такого усиления понятия измельчения, что уже не требуется ничего добавлять, чтобы гарантировать метризуемость пространства. Работа в этом направлении велась Р. Л. Мором, Ф. Б. Джонсом [55], Дж. Нагатой, и другими математиками (см. [20], [27]); некоторые окончательные версии метризационного критерия, получающегося на этом пути, принадлежат А. Х. Стоуну и А. В. Архангельскому (см. [56]); в них метризуемость пространства X сводится к существованию фундаментального семейства открытых покрытий, т.е. такого счетного семейства $\mathcal{F}$ открытых покрытий пространства X , что для каждой точки x и каждой ее открытой окрестности U существуют окрестность V точки x и покрытие γ из семейства $\mathcal{F}$ такие, что $St_\gamma(V) \subset U$ (т.е. объединение всех элементов семейства γ , пересекающихся с V , содержится в U).

Обратите внимание на то, что известная теорема Бирхгофа–Какутани [57], [58] о метризуемости топологической группы с первой аксиомой счетности является легким следствием общей метризационной теоремы Александрова–Урысона в ее первоначальной формулировке.

Рассмотрим, наконец, работы П. С. Урысона по теории размерности; этот цикл работ занимает выдающееся место среди его топологических работ. В 1922–1923 годах Урысон независимо от Менгера ввел понятие малой индуктивной размерности, обозначаемой сегодня ind . Его привела к этому работа над задачей, поставленной ему Д. Ф. Егоровым: найти определение понятия поверхности, аналогичное определению понятия канторовской кривой (как плоского континуума без внутренних точек).

У определения размерности ind был еще один источник: теория вполне несвязных компактов, т.е. компактов, не содержащих нетривиальных связных множеств. Менгер и, независимо, Урысон доказали, что всякий метризуемый компакт с этим свойством обладает базой из множеств, открытых и замкнутых одновременно, что в точности отвечает случаю, когда размерность ind равна 0 (если пространство не пусто). Первоначальное определение размерности ind , данное Урысоном, несколько сложнее приводимого ниже эквивалентного определения, которое принято сегодня: $\text{ind}(X) = -1$ в том и только том случае, если пространство X пусто, и $\text{ind}(X) \leq n$, если для каждой точки x и каждой ее окрестности $O(x)$ найдется окрестность V точки x такая, что $\text{ind}(\overline{V} \setminus V) \leq n - 1$.

В своем построении теории размерности Урысон ограничился случаем сепарабельных метрических пространств, и каждый из его результатов стал начальной точкой будущих попыток распространить его на более широкие классы пространств (что почти всегда было весьма трудно, а часто и невозможно сделать).

Мы перечисляем ниже главные результаты Урысона об ind , опубликованные в [59]–[61]. Некоторые из них были независимо получены К. Менгером (см. подробнее об этом в [62]).

Размерность ind топологически инвариантна. Каждое нульмерное сепарабельное метризуемое пространство можно вложить в бэровское пространство. Если $X \subset \mathbb{R}^n$, то $\text{ind}(X) \leq n$. Если у подмножества X пространства $\mathbb{R}^n$ нет внутренних точек, то $\text{ind}(X) \leq n - 1$.

Урысон доказал первую *теорему суммы*: если компактное метрическое пространство X является объединением счетного подсемейства замкнутых подпространств F_i

таких, что $\text{ind}(F_i) \leq n$ для каждого $n \in \omega$, то $\text{ind}(X) \leq n$. Он установил, что размерность компактного метрического пространства в смысле Лебега, т.е. в смысле открытых покрытий, совпадает с размерностью ind . Отсюда он вывел, что если внутренность подмножества X пространства $\mathbb{R}^n$ не пуста, то $\text{ind}(X) = n$.

Урысон доказал также неравенство, называемое сегодня *неравенством Урысона*: $\text{ind}(Y \cup Z) \leq \text{ind}(Y) + \text{ind}(Z) + 1$ (для сепарабельных метризуемых пространств). Он установил, что требуется по крайней мере $n + 1$ слагаемое, чтобы представить сепарабельное метризуемое пространство размерности n в виде объединения нульмерных подпространств. Наконец, Урысон, в ходе одного из доказательств, по существу, определил большую индуктивную размерность Ind (которую он называл *интегральной размерностью*), и доказал, что $\text{ind} = \text{Ind}$ для компактных метрических пространств.

Этот перечень результатов впечатляет; действительно, каждый из них высвечивает одно из фундаментальных свойств размерности. В последующие годы, в ходе попыток дать аксиоматическое определение размерности, большая часть свойств функции ind , установленных Урысоном, была принята в качестве аксиом размерности (см., в частности, работы, Е. В. Щепина [63] и Замбахидзе [64]).

Фундаментальный характер свойств размерности ind , установленных П. С. Урысоном, объясняет, почему так много усилий было потрачено в последующие годы на то, чтобы отодвинуть как можно дальше границы, в которых они выполняются. Таким образом, Урысон в действительности является одним из основателей современной теории размерности.

Результаты П. С. Урысона были обобщены Л. А. Тумаркиным и В. Гуревичем, доказавшими, что все три классические размерности совпадают для сепарабельных метрических пространств (см. [65], [66]), а затем позднее М. Г. Катетовым [67] и К. Моритой [68], которые независимо установили, что $\dim(X) = \text{Ind}(X)$ для каждого метрического пространства X . П. Рой [69] прославился, построив пример метризуемого пространства X , для которого $\text{ind}(X)$ не совпадает с $\text{Ind}(X)$. До сих пор не известно, можно ли сделать разрыв между ind и Ind для метрических пространств сколь угодно большим. Красивые результаты в теории размерности были получены многими топологами в последующие годы (см. [70] и [62]); отметим только, что первый пример компактного хаусдорфова пространства X , для которого $\text{ind}(X)$ не совпадает с $\text{Ind}(X)$, был построен В. В. Филишковым в 1969 году [71].

Один из интересных аспектов теории размерности, — это поведение размерности при непрерывных отображениях, удовлетворяющих тем или иным сильным дополнительным условиям. И в этом направлении Александров и Урысон получили один из первых результатов, стимулировавших многочисленные дальнейшие исследования. Они доказали, что каждое сепарабельное метризуемое пространство может быть представлено как образ бэровского пространства счетного веса при непрерывном открытом отображении [62], [72], продемонстрировав тем самым, что при непрерывных открытых отображениях размерность может возрастать как угодно сильно.

Задача, поставленная Урысону Д. Ф. Егоровым (см. выше), была решена Урысоном следующим образом: он ввел понятие *n -мерного канторова многообразия* как такого компактного метрического пространства X размерности n , что никакое его за-

мкнутое подпространство L размерности $\leq n - 2$ не разбивает X (мы говорим что $L \subset X$ разбивает X , если пространство $X \setminus L$ не связно). Из результатов Урысона следовало, что n -мерный куб и n -мерная сфера являются n -мерными канторовыми многообразиями.

В. Гуревич и К. Менгер и, независимо, Л. А. Тумаркин позднее доказали гипотезу, выдвинутую П. С. Урысоном в его работе о канторовых многообразиях, что если размерность $\text{ind}(X)$ компактного метрического пространства X равна $n \geq 1$, то X содержит n -мерное канторово многообразие, откуда следует, например, что каждое компактное метрическое пространство размерности n имеет n -мерную компоненту. Впоследствии эти результаты были распространены П. С. Александровым на любые n -мерные компакты.

Урысон придавал особенное значение канторовым многообразиям. В работе [60] он выдвинул следующую гипотезу: *общая граница двух областей в R^n является $(n - 1)$ -мерным канторовым многообразием*. Для $n = 2$ это было известно, для $n = 3$ это доказал сам Урысон, а “общий случай был доказан Александровым в 1927 году, как пролог к общей гомологической теории размерности” (словами самого П. С. Александрова [32]). Таким образом, работа Урысона о канторовых многообразиях является одним из важных источников гомологической теории размерности, занимающей видное место в топологии.

Сделать полным этот обзор работ П. С. Урысона и их влияния на развитие теоретико-множественной топологии в течение прошедших с момента его трагической гибели 74 лет нет никакой возможности, так как влияние это было не только всепроникающим но, в действительности, порождающим: *П. С. Урысон был подлинным отцом не обязательно метризуемой, не обязательно удовлетворяющей первой аксиоме счетности, не обязательно любимой всеми общей топологии*, предвестником и начинателем многих исследований, которые по-настоящему развернулись только после пятидесятих годов. В 1921–24 годах он сам создавал работы, по духу и форме на самом деле лежащие в русле основного направления топологии второй половины нашего века.

Можно только гадать о том, какие бы новые горизонты открыл гений П. С. Урысона в теоретико-множественной топологии, которая, несомненно, была его любимым дитя, если бы он прожил долгую жизнь. Для нас несомненно одно: его творчество помогло бы увидеть ее красоту математикам, идущим по другим путям, и привело бы к еще более значительному ее расцвету.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Нейман Л. С. Радость открытия. М.: Изд-во “Детская литература”, 1972.
- [2] Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1, 2. М.: Гостехиздат, 1951.
- [3] Урысон П. С. Об одном типе нелинейных интегральных уравнений // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 236–255.
- [4] Urysohn P. S. Sur l'unicité de la solution des équations linéaires de M. Volterra // Bull. Acad. Polon. Sci. (A). 1922. P. 57–62.

- [5] Урысон П. С. Зависимость между средней шириной и объемом выпуклых тел в n -мерном пространстве // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 477–486.
- [6] Урысон П. С. Об одной задаче Carathéodory // Матем. сб. 1924. Т. 31. С. 86–90.
- [7] Urysohn P. S. Über einem Problem von Herren Carathéodory // Fund. Math. 1924. V. 6. P. 229–235.
- [8] Urysohn P. S. Zur ersten Randwertaufgabe der Potentialtheorie // Math. Zeitschrift. 1925. V. 23. P. 155–158.
- [9] Urysohn P. S. Sur une fonction analytique partout continue // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 144–150.
- [10] Urysohn P. S. Exemple d'une série entière prenant, sur son cercle de convergence, un ensemble de valeurs non mesurable B // Compt. Rend. Acad. Sci. 1926. V. 183. P. 548–551.
- [11] Урысон П. С. Усиление одной теоремы Бирхгофа // см. [2].. С. 846–847.
- [12] Александров П. С., Урысон П. С. Мемуар о компактных топологических пространствах. М.: Наука, 1971.
- [13] Bourbaki N. Topologie générale. Ch. 1, 2. Paris: Herman, 1940.
- [14] Weil A. Sur les espaces à structure uniforme et sur la topologie générale. Paris: Hermann 1938.
- [15] Urysohn P. S. Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen // Math. Ann. 1925. V. 94. P. 262–295.
- [16] Hewitt E. On two problems of Urysohn // Ann. of Math. 1946. V. 47. P. 503–509.
- [17] Tihonov A. N. Über die topologische Erweiterung von Räumen // Math. Ann. 1930. V. 102. P. 544–561.
- [18] Понтрягин Л. С. Непрерывные группы. М.: Физматгиз, 1954.
- [19] Urysohn P. S. Zum metrizationsproblem // Math. Ann. 1925. V. 94. P. 309–315.
- [20] Архангельский А. В., Пономарев В. И. Основы общей топологии в задачах и упражнениях. М.: Наука, 1974.
- [21] Пономарев В. И., Шапиро Л. Б. Абсолюты топологических пространств и их непрерывных отображений // УМН. 1976. Т. 31. № 5. С. 120–136.
- [22] Tihonov A. N. Über einen Funktionenraum // Math. Ann. 1935. V. 111. P. 762–766.
- [23] Илиадис С. Д. Абсолюты хаусдорфовых пространств // Докл. АН СССР. 1963. Т. 149. С. 22–25.
- [24] Čech E. On bicomact spaces // Ann. of Math. 1937. V. 38. P. 823–844.
- [25] Gleason A. M. Projective topological spaces // Illinois J. Math. 1958. V. 2. P. 482–489.
- [26] Rudin W. Homogeneity problems in the theory of Čech compactifications // Duke Math. J. 1956. V. 23. P. 409–419.
- [27] Энгелькинг Р. Общая топология. М.: Мир, 1986.
- [28] Fréchet M. Sur quelques points du calcul fonctionnel // Rend. Circ. Mat. Palermo. 1906. V. 22. P. 1–74.
- [29] Urysohn P. S. Sur les classes (L) de M. Fréchet // Enseign. Math. 1926. V. 25. P. 77–83.
- [30] Gruenhage G. Perfectly normal compacta, cosmic spaces, and some partition problems // Open Problems in Topology. Amsterdam: North-Holland, 1990. P. 85–95.
- [31] Juhász I. Cardinal Functions in Topology. Amsterdam: Mathematisch Centrum, 1971.
- [32] Александров П. С., Федорчук В. В. Основные аспекты развития теоретико-множественной топологии // УМН. 1978. Т. 33. № 3. С. 3–48.
- [33] Balogh Z., Dow A., Fremlin D. H., Nyikos P. J. Countable tightness and proper forcing // Bull. Amer. Math. Soc. 1988. V. 19. P. 295–298.
- [34] Шахматов Д. Б. О псевдокомпактных пространствах с точечно счетной базой // Докл. АН СССР. 1984. Т. 279. С. 825–829.
- [35] Kurepa D. La condition de Souslin et une propriété caractéristique des nombres reels // C. R. Acad. Sci. Paris. 1950. V. 231. P. 1113–1114.
- [36] Vietoris L. Stetige Mengen // Monatsh. Math. Phys. 1921. V. 31. P. 173–204.

- [37] Katetov M. G. Über H -abgeschlossene und bikompakte Räume // Casopis Mat. Fys. 1940. V. 69. P. 36–49.
- [38] Stone M. H. On the compactification of topological spaces // Ann. Soc. Pol. Math. 1948. V. 21. P. 153–160.
- [39] Stephenson R. M., Jr. Moore-closed and first countable feebly compact extension spaces // Topol. Appl. 1987. V. 27. P. 11–28.
- [40] Todorčević S. Trees and linearly ordered sets // Kunen and Vaughan, Ed-rs, Handbook of Set-Theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984.
- [41] Pospíšil B. Remark on bicomact spaces // Ann. of Math. 1937. V. 38. P. 845–846.
- [42] Архангельский А. В. О мощности бикомпактов с первой аксиомой-счетности // Докл. АН СССР. 1969. Т. 187. №2. С. 967–970.
- [43] Мищенко А. С. О финально компактных пространствах // Докл. АН СССР. 1962. Т. 145. С. 1224–1227.
- [44] Rudin M. E. A normal space X for which $X \times I$ is not normal // Fund. Math. 1971. V. 73. P. 179–186.
- [45] Архангельский А. В. Некоторые недавние продвижения и открытые проблемы в общей топологии // УМН. 1997. Т. 52. №5.
- [46] Мищенко А. С. О пространствах с точечно счетной базой // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. С. 985–988.
- [47] Borges C. J. On stratifiable spaces // Pacific J. Math. 1966. V. 17. P. 1–16.
- [48] Bing R. H. Metrization of topological spaces // Canad. J. Math. 1951. V. 3. P. 175–186.
- [49] Nagata J. On a necessary and sufficient condition of metrizability // J. Inst. Polyt. Osaka City Univ. 1950. V. 1. P. 93–100.
- [50] Смирнов Ю. М. О метризации топологических пространств // УМН. 1951. Т. 6. №6. С. 100–111.
- [51] Heath R. W. Screenability, pointwise paracompactness and metrization of Moore spaces // Canad. J. Math. 1964. V. 16. P. 763–770.
- [52] Chittenden E. W., Pitcher A. D. On a theory of developments of an abstract class in the relation to the calcul fonctionnel // Trans. Amer. Math. Soc. 1919. V. 20. P. 213–233.
- [53] Tukey J. W. Convergence and Uniformity in Topology. Princeton: Princeton Univ. Press 1940.
- [54] Stone A. H. Paracompactness and product spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1948. V. 54. P. 977–982.
- [55] Jones F. B. R.L. Moore's axiom $1'$ and metrization // Proc. Amer. Math. Soc. 1958. V. 9. P. 487.
- [56] Dugundji J. Topology. Boston: Allyn and Bacon Inc., 1996.
- [57] Birkhoff G. A note on topological groups // Compositio Math. 1936. V. 3. P. 427–430.
- [58] Kakutani S. Über die Metrisation der topologischen Gruppen // Proc. Imp. Acad. Japan. 1936. V. 12. P. 82–84.
- [59] Urysohn P. S. Les multiplicités cantorienes // C. R. Acad. Sci. Paris 1922. V. 175. P. 440–442.
- [60] Urysohn P. S. Mémoire sur les multiplicités cantorienes // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 30–137.
- [61] Urysohn P. S. Mémoire sur les multiplicités cantorienes (suite) // Fund. Math. 1926. V. 8. P. 225–239.
- [62] Engelking R. Theory of Dimensions Finite and Infinite. Lemgo: Heldermann-Verlag, 1995.
- [63] Щепин Е. В. Аксиоматика размерности метрических пространств // Матем. сб. 1973. Т. 92. №1. С. 135–141.
- [64] Замбахидзе Л. Г. О функциях размерностного типа // Труды Тбил. матем. ин-та. 1977. Т. 56. С. 52–98.
- [65] Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.

- [66] Tumarkin L. A. Beitrag zur allgemeinen Dimensionstheorie // Матем. сб. 1926. Т. 33. С. 57–86.
- [67] Катетов М. Г. О размерности несепарабельных пространств. 1 // Czech. Math. J. 1952. V. 2. P. 333–368.
- [68] Morita K. Normal families and dimension theory for metric spaces // Math. Ann. 1954. V. 128. P. 350–362.
- [69] Roy P. Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 609–613.
- [70] Александров П. С. Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [71] Филиппов В. В. Бикомпакт с не совпадающими индуктивными размерностями // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. С. 1050–1053.
- [72] Alexandroff P., Urysohn P. Über nulldimensionale Punktmengen // Math. Ann. 1928. V. 98. P. 89–106.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
28.04.1998