Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. В. Баскаков, Тройные произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 5, 199–200

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm670>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.81.55.215

26 апреля 2023 г., 14:32:43

ТРОЙНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ МАССИ В КОГОМОЛОГИЯХ МОМЕНТ-УГОЛ КОМПЛЕКСОВ

И. В. БАСКАКОВ

Основная цель настоящей работы – показать, что комбинаторное определение умножения в когомологиях момент-угол комплексов [1] позволяет строить большой класс момент-угол комплексов с нетривиальным произведением Масси в их когомологиях.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть K – симплициальный комплекс, $V = \{v_1, \dots, v_m\}$ – множество его вершин, момент-угол комплексом K называется подпространство полидиска

$$\mathcal{X}_K = \bigcup_{\sigma \in K} (D^2)^\sigma \times (\partial D^2)^{V \setminus \sigma} \subset (D^2)^V,$$

где $D^2 \subset \mathbb{C}$ – стандартный диск.

Более подробно все необходимые ниже факты о момент-угол комплексах содержатся в [2], где построено клеточное разбиение момент-угол комплекса и описана мультиградуированная алгебра его клеточных коцепей. Итак, следуя [2], рассмотрим клеточное разбиение полидиска $(D^2)^V$, индуцированное стандартным трехклеточным разбиением D^2 , и заметим, что для любого K момент-угол комплекс $\mathcal{X}_K$ является клеточным подпространством полидиска. В [2] также показано, что клеточные коцепи $(D^2)^V$ можно снабдить структурой $\mathbb{Z}^V \oplus \mathbb{Z}$ -градуированной алгебры, изоморфной $\mathbb{k}[v_1, \dots, v_m] \otimes \Lambda[u_1, \dots, u_m] / (v_i^2 = 0, v_i u_i = 0)$, где $\text{mdeg } v_i = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0; 0)$, а $\text{mdeg } u_i = (0, \dots, 0, 2, 0, \dots, 0; -1)$, двойки стоят на i -х местах. Дифференциал задается равенствами $d1 = 0, d v_i = 0$ и $d u_i = v_i$. Клеточные коцепи $\mathcal{X}_K$ являются фактор-алгеброй клеточных коцепей полидиска по идеалу, порожденному мономерами вида $v_{i_1} \cdots v_{i_l}$, где $\{v_{i_1}, \dots, v_{i_l}\} \notin K$.

Необходимо отметить, что дифференциал сохраняет $\mathbb{Z}^V$ -градуировку, и таким образом комплекс клеточных коцепей распадается в прямую сумму подкомплексов, каждый из которых изоморфен комплексу пополненных симплициальных коцепей некоторого полного подкомплекса K . Это позволяет доказать следующую теорему, которая понадобится нам для вычисления тройного произведения Масси.

ТЕОРЕМА ([1]). *Имеет место изоморфизм: $H^*(\mathcal{X}_K) = \bigoplus_{\gamma \subset V} \tilde{H}^{*-|\gamma|-1}(K_\gamma)$, где $K_\gamma = \{\sigma \in K \mid \sigma \subset \gamma\}$ – полный подкомплекс K на вершинах из γ . Кроме того, если $a_1 \in \tilde{H}^*(K_{\gamma_1})$ и $a_2 \in \tilde{H}^*(K_{\gamma_2})$, то:*

$$a_1 a_2 = \begin{cases} 0, & \gamma_1 \cap \gamma_2 \neq \emptyset, \\ i_{\gamma_1, \gamma_2}^* \lambda^*(a_1 \otimes a_2), & \gamma_1 \cap \gamma_2 = \emptyset, \end{cases}$$

где $\lambda: \tilde{C}^*(K_{\gamma_1}) \otimes \tilde{C}^*(K_{\gamma_2}) \rightarrow \tilde{C}^{*+1}(K_{\gamma_1} * K_{\gamma_2})$ – изоморфизм, $i_{\gamma_1, \gamma_2}: K_{\gamma_1} \sqcup \gamma_2 \rightarrow K_{\gamma_1} * K_{\gamma_2}$ – вложение, а $K_{\gamma_1} * K_{\gamma_2}$ – джойн K_{γ_1} и K_{γ_2} .

Теперь напомним определение тройного произведения Масси.

Пусть $[C^*, d]$ – некоторая дифференциально-градуированная алгебра и $a \in C^p$. Положим $\bar{a} = (-1)^p a$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть $a, b, c \in C^*$ – коциклы, $[a], [b], [c]$ – соответствующие классы когомологий, причем $[a][b] = [b][c] = 0$. Тогда говорят, что класс когомологий $[g]$ принадлежит тройному произведению Масси $\langle [a], [b], [c] \rangle$, если найдутся такие элементы $e, f \in C^*$, что $e = \bar{a}b, f = \bar{b}c$ и $g = -\bar{a}f - \bar{c}e$.

В общем случае произведение Масси – многозначная операция, которая считается тривиальной, если она содержит 0.

Далее везде мы будем полагать, что $a, b, c \in C^*(\mathcal{X}_K) - \mathbb{Z}^V$ -однородные клеточные коциклы. Покажем, что если ни один из классов вида $[-\bar{a}f - \bar{c}e]$, где e и f $\mathbb{Z}^V$ -однородны, не равен 0, то произведение $\langle a, b, c \rangle$ не тривиально. Действительно, пусть $[-\bar{a}f - \bar{c}e] = 0$ для некоторых e и f . Обозначим через e_1 и f_1 их проекции на подпространства однородных элементов с теми же $\mathbb{Z}^V$ -градуировками, что и $\bar{a}b$ и $\bar{b}c$ соответственно. Так как дифференциал сохраняет $\mathbb{Z}^V$ -градуировку,

легко видеть, что $de_1 = de = \bar{a}b$, $df_1 = df = \bar{b}c$. Более того, коцикл $-\bar{a}f_1 - \bar{e}_1c$ является проекцией коцикла $-\bar{a}f - \bar{e}c$ на подпространство однородных элементов с теми же $\mathbb{Z}^V$ -градуировками, что и abc , и, следовательно, как и $-\bar{a}f - \bar{e}c$, гомологичен нулю. Таким образом, если в качестве новых, уже $\mathbb{Z}^V$ -однородных, коцепей e и f взять e_1 и f_1 , то, по-прежнему, класс $[-\bar{a}f - \bar{e}c]$ будет равняться 0.

Используя это наблюдение, дадим метод, который позволяет решать вопрос о нетривиальности тройного произведения Масси в когомологиях момент-угол комплексов, не переходя к коцепям.

В дальнейшем мы везде будем пользоваться приведенным выше комбинаторным описанием кольца когомологий $\mathcal{Z}_K$. Рассмотрим коциклы $a \in \tilde{C}^*(K_\alpha)$, $b \in \tilde{C}^*(K_\beta)$, $c \in \tilde{C}^*(K_\gamma)$ и соответствующие им классы когомологий $[a]$, $[b]$ и $[c]$. Если подмножества вершин α , β , γ попарно пересекаются, то произведение $\langle [a], [b], [c] \rangle$ тривиально по соображениям $\mathbb{Z}^V$ -градуировки, поэтому положим обратное. Поднимем равенство $de = \bar{a}b \in \tilde{C}^*(K_{\alpha \sqcup \beta})$ до равенства в коцепях джойна $K_\alpha * K_\beta d(i_{\alpha, \beta}^*)^{-1}(e) = \bar{a} * b - \hat{e}$. Таким образом, класс $[\hat{e}] \in H^*(K_\alpha * K_\beta, K_{\alpha \sqcup \beta})$ является прообразом класса $[a] * [b] \in \tilde{H}^*(K_\alpha * K_\beta)$. Пусть $x_1 \in C^*(K_\alpha * K_\beta * K_\gamma, K_{\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma})$ – образ цикла $\hat{e} * c \in C^*(K_\alpha * K_\beta * K_\gamma, K_{\alpha \sqcup \beta} * K_\gamma)$. Для циклов b и c аналогично строятся $\hat{f}$ и x_2 . Теперь нетрудно видеть, что если δ – связующий гомоморфизм в точной последовательности пары $(K_\alpha * K_\beta * K_\gamma, K_{\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma})$, то $\delta([-\bar{a}f - \bar{e}c]) = [x_2] - [x_1]$. Действительно, цикл $-\bar{a}f - \bar{e}c \in \tilde{C}^*(K_{\alpha \sqcup \beta \sqcup \gamma})$ поднимается до коцепи $-\bar{a} * (i_{\beta, \gamma}^*)^{-1}(f) - (i_{\alpha, \beta}^*)^{-1}(\bar{e}) * c \in \tilde{C}^*(K_\alpha * K_\beta * K_\gamma)$, теперь подсчитаем ее кограницу: $d(-\bar{a} * (i_{\beta, \gamma}^*)^{-1}(f) - (i_{\alpha, \beta}^*)^{-1}(\bar{e}) * c) = -a * (\bar{b}c - \hat{f}) + (a * \bar{b} - \bar{e}) * c = x_2 - x_1$, что и доказывает приведенное выше равенство. Таким образом, если 0 не является элементом вида $[x_2] - [x_1]$, то тройное произведение Масси не тривиально.

Для построения примера нетривиального тройного произведения Масси в когомологиях момент-угол комплекса нам понадобится звездное преобразование. Пусть $\sigma \in K$ – симплекс, $\text{star } \sigma = \{\tau \in K \mid \sigma \cup \tau \in K\}$ – его звезда, тогда результатом звездного преобразования K по симплексу σ является комплекс $K' = (K \setminus \text{star } \sigma) \cup \text{con}(\partial \text{star } \sigma)$.

Теперь мы можем получить основной результат настоящей работы.

ТЕОРЕМА. *Для любых симплицальных сфер K_1, K_2, K_3 существует звездная перестройка $\hat{K}$ симплицальной сферы $K = K_1 * K_2 * K_3$ такая, что в когомологиях момент-угол комплекса $\mathcal{Z}_{\hat{K}}$ существует нетривиальное тройное произведение Масси.*

Ключевые шаги доказательства следующие. Пусть $\sigma_1 \in K_1$, $\sigma'_2, \sigma''_2 \in K_2$ и $\sigma_3 \in K_3$ – некоторые симплексы, причем внутренности звезд σ'_2 и σ''_2 не пересекаются. Возьмем в качестве $\hat{K}$ – звездное преобразование джойна K по симплексам $\sigma_1 * \sigma'_2 * \emptyset$ и $\emptyset * \sigma''_2 * \sigma_3$. Пусть $[a]$, $[b]$ и $[c]$ – классы из $H^*(\mathcal{Z}_{\hat{K}})$, соответствующие образующим старших размерностей сфер K_1 , K_2 и K_3 соответственно, рассматриваемых как полные подкомплексы $\hat{K}$.

Тогда $\langle [a], [b], [c] \rangle$ определено и нетривиально. В самом деле, класс $[\hat{e}] \in H^*(K_1 * K_2, K_1 * K_2 \setminus \text{star}_{K_1 * K_2} \sigma_1 * \sigma'_2)$ выбирается однозначно и представляет собой образующую старшей размерности этой группы когомологий, то же для класса $[\hat{f}]$, теперь остается заметить, что так как внутренности $\text{star } \sigma_1 * \sigma'_2 * \emptyset$ и $\text{star } \emptyset * \sigma''_2 * \sigma_3$ не пересекаются, то однозначно определенный класс $[x_2] - [x_1]$ не равен 0.

Автор выражает благодарность В. М. Бухштаберу, а также Т. Е. Панову за постановку задачи и неоценимую помощь и внимание, проявленное на всех этапах написания данной статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. В. Баскаков // УМН. 2002. Т. 57. № 5. С. 147–148. [2] В. М. Бухштабер, Т. Е. Панов // УМН. 2000. Т. 55. № 5. С. 3–106.