Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Сугимото, М. В. Ружанский, Глобальные оценки в L^2 для класса интегральных операторов Фурье с символами из пространств Бесова, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 5, 201–202

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm671>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.219.149

26 апреля 2023 г., 07:48:32

ГЛОБАЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ В L^2 ДЛЯ КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ ФУРЬЕ С СИМВОЛАМИ ИЗ ПРОСТРАНСТВ БЕСОВА

М. В. Ружанский, М. Сугимото

В статье даются глобальные оценки в L^2 для класса интегральных операторов Фурье. Операторы в рассматриваемой форме естественно возникают в проблемах глобального сглаживания для уравнения Шрёдингера и гиперболических уравнений. Наши результаты включают в себя известные глобальные оценки в L^2 для псевдодифференциальных операторов.

Рассмотрим интегральные операторы Фурье, глобально (для всех $x \in \mathbb{R}^n$) имеющие вид

$$Tu(x) = \int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^n} e^{i(x \cdot \xi - \phi(y, \xi))} a(x, \xi) u(y) dy d\xi, \quad (1)$$

где $a(x, \xi)$ – символ, $\phi(y, \xi)$ – гладкая, невырожденная, положительно однородная первого порядка фазовая функция: $\phi(y, \tau\xi) = \tau\phi(y, \xi)$ для всех $\tau > 0$.

Заметим, что интегральные операторы Фурье общего вида всегда принимают вид (1) локально по x, y, ξ . Однако, операторы, возникающие в задачах глобального сглаживания, принимают вид (1) также глобально по $x \in \mathbb{R}^n$ с фазовой функцией $\phi(y, \xi) = \psi(\xi) \cdot y$, где $\psi(\xi)$ удовлетворяет $|\det \nabla \psi(\xi)| \geq C_0 > 0$ для всех $\xi \in \mathbb{R}^n$. Необходимо иметь глобальные оценки в L^2 для таких операторов, и мы даем их в последующих теоремах. Локальные оценки в L^p известны лучше, и их обзор можно найти в [1].

Сформулируем условия на фазовую функцию. Предположим, что для некоторой константы C_0 справедливо

$$|\det \partial_y \partial_\xi \phi(y, \xi)| \geq C_0 > 0 \quad (2)$$

для всех $(y, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Также предположим, что для всех $1 \leq |\alpha| \leq n+1, 1 \leq |\beta| \leq n+1$ и некоторых констант C_α, C_β справедливо

$$|\partial_y^\alpha \partial_\xi^\beta \phi(y, \xi)| \leq C_\alpha, \quad |\partial_y \partial_\xi^\beta \phi(y, \xi)| \leq C_\beta \quad (3)$$

для всех $(y, \xi) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n$. Заметим, что условие (2) является глобальным вариантом условия локального графика для интегральных операторов Фурье. Если оно не выполнено, нельзя считать даже на локальную ограниченность в L^2 операторов с гладкими символами $a \in S_{1,0}^0$ нулевого порядка. Отметим также, что в важном случае $\phi(y, \xi) = \psi(\xi) \cdot y$, отмеченном выше, условие (3) также выполнено, так как функция $\nabla \psi$ однородна с нулевым порядком. Через $[s]$ будем обозначать целую часть s .

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что условия (2), (3) на фазовую функцию выполнены. Предположим, что $a(x, \xi)$ удовлетворяет одному из следующих условий.*

- 1) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ для $\alpha, \beta \in \{0, 1, 2, 3\}^n$.
- 2) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ и непрерывны для $|\alpha|, |\beta| \leq [n/2] + 1$.
- 3) Существуют вещественные $\lambda, \lambda' > n/2$, такие, что $(1 - \Delta_x)^{\lambda/2} (1 - \Delta_\xi)^{\lambda'/2} a(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$.
- 4) Существуют вещественное $\lambda > 1/2$ и константа C такие, что оценка

$$\|\delta_x^\alpha(h) \delta_\xi^\beta(h') a(x, \xi)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)} \leq C \prod_{i,j=1}^n |h_i|^{\alpha_i \lambda} |h'_j|^{\beta_j \lambda}$$

справедлива для всех $\alpha, \beta \in \{0, 1\}^n$ и всех $h = (h_1, \dots, h_n), h' = (h'_1, \dots, h'_n) \in \mathbb{R}^n$. Здесь $\delta_x^\alpha(h) = \delta_{x_1}^{\alpha_1}(h_1) \cdots \delta_{x_n}^{\alpha_n}(h_n)$ – разностные операторы, т.е.

$$\delta_{x_i}^0(h_i) a(x, \xi) = a(x, \xi) \quad \text{и} \quad \delta_{x_i}^1(h_i) a(x, \xi) = a(x + h_i e_i, \xi) - a(x, \xi),$$

где e_i – i -й стандартный базисный вектор в $\mathbb{R}^n$. δ_ξ^β определяется аналогично.

- 5) $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \in L^\infty(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ и непрерывны для $|\alpha| \leq [n/2] + 1$, $\beta \in \{0, 1, 2\}^n$.
 6) Существует вещественное $2 \leq p < \infty$ такое, что $\partial_x^\alpha \partial_\xi^\beta a(x, \xi) \in L^p(\mathbb{R}_x^n \times \mathbb{R}_\xi^n)$ для $|\alpha| \leq [n(1/2 - 1/p)] + 1$, $|\beta| \leq 2n$.

Тогда оператор T в (1) ограничен в $L^2(\mathbb{R}^n)$.

Случай псевдодифференциальных операторов с $\phi(y, \xi) = y \cdot \xi$ был рассмотрен в [2] при условии 1), в [3] в условиях 2) и 3), в [4] при условии 4), а также в [5] в условиях 5) и 6). Отметим, что условия 1), 2) и 5) могут содержаться одно в другом при некоторых значениях n .

Сейчас мы дадим характеристику ограниченности в терминах пространств Бесова, обобщающую теорему 1. Для псевдодифференциальных операторов T с $\phi(y, \xi) = y \cdot \xi$ задача была рассмотрена в [6]. Напомним определение пространства Бесова $B_{p,q}^{(s,s')}$ для $0 < p, q \leq \infty$ и мультииндексов (s, s') , где $s = (s_1, \dots, s_N)$ и $s' = (s'_1, \dots, s'_{N'})$. Обозначим через $\mathbf{n} = (n_1, \dots, n_N)$, $\mathbf{n}' = (n'_1, \dots, n'_{N'})$ разложения $\mathbb{R}_x^n$ и $\mathbb{R}_{\xi}^{n'}$ в прямое произведение пространств меньшей размерности: $n = n_1 + \dots + n_N = n'_1 + \dots + n'_{N'}$. Тогда $f \in B_{p,q}^{(s,s')} = B_{p,q}^{(s,s')}(\mathbb{R}^{(\mathbf{n}, \mathbf{n}')})$, если $f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^{2n})$ и

$$\|f\|_{B_{p,q}^{(s,s')}} = \left\{ \sum_{\mathbf{j}, \mathbf{k} \geq 0} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \int_{\mathbb{R}^{n'}} |2^{\mathbf{j} \cdot \mathbf{s} + \mathbf{k} \cdot \mathbf{s}'} \mathcal{F}^{-1} \Phi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}} \mathcal{F} f(x, \xi)|^p dx d\xi \right)^{q/p} \right\}^{1/q} < \infty.$$

Мы используем обозначения $\mathbf{j} = (j_1, \dots, j_N)$, $\mathbf{k} = (k_1, \dots, k_{N'})$, $\mathcal{F}$ — преобразование Фурье и $\Phi_{\mathbf{j}, \mathbf{k}}(y, \eta) = \Theta_{j_1}(y_1) \cdots \Theta_{j_N}(y_N) \Theta_{k_1}(\eta_1) \cdots \Theta_{k_{N'}}(\eta_{N'})$, где переменные $y, \eta \in \mathbb{R}^n$ разделены в соответствии с разбиениями $\mathbf{n}, \mathbf{n}'$, а функции $\Theta_i(z) \in \mathcal{S}$ задают диадическую систему соответствующей размерности: $\text{supp } \Theta_0 \subset \{z : |z| \leq 2\}$, $\text{supp } \Theta_i \subset \{z : 2^{i-1} \leq |z| \leq 2^{i+1}\}$ для $i \in \mathbb{N}$, $\sum_{i=0}^\infty \Theta_i(z) = 1$ и $2^{i|\alpha|} |\partial^\alpha \Theta_i(z)| \leq C_\alpha$ для всех $i \geq 0$ и всех z . Естественная модификация имеет место при $p, q = \infty$ (см. [7]).

ТЕОРЕМА 2. *Предположим, что условия (2), (3) на фазовую функцию выполнены. Пусть $2 \leq p \leq \infty$. Тогда для некоторой константы C и всех $a(x, \xi) \in B_{p,1}^{(1/2-1/p)(\mathbf{n}, \mathbf{n}')})$ справедлива оценка*

$$\|Tu\|_{L^2(\mathbb{R}^n)} \leq C \|a(x, \xi)\|_{B_{p,1}^{(1/2-1/p)(\mathbf{n}, \mathbf{n}')})} \|u\|_{L^2(\mathbb{R}^n)}$$

для всех $u \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^n)$. Эта оценка также равномерна по всем символам a , и константа C зависит только от размерностей и констант в (2), (3).

Заметим, что условия теоремы 1 2)–5) содержатся в теореме 2 при $p = \infty$ ($N = N' = 1$ в условиях 2), 3); $N = N' = n$ в 4); $N = 1, N' = n$ в 5)). Условие 1) теоремы 1 сильнее условия 4). Теорема 1 при условии 6) следует из теоремы 2 с тем же p и $N = N' = 1$. Хотя теорема 2 является более сильной, условия теоремы 1 легче проверить. Отметим также, что символы из класса $S_{0,0}^0$ также покрываются теоремой 2 с $p = \infty$. Более подробное обсуждение связи различных классов символов и пространств Бесова можно найти в [6] и [7].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] М. В. Ружанский // УМН. 2000. Т. 55. С. 99–170. [2] A. P. Calderón, R. Vaillancourt // J. Math. Soc. Japan. 1971. V. 23. P. 374–378. [3] H. O. Cordes // J. Funct. Anal. 1975. V. 18. P. 115–131. [4] A. G. Childs // Proc. Amer. Math. Soc. 1976. V. 61. P. 252–254. [5] R. R. Coifman, Y. Meyer. Au-delà des opérateurs pseudo-différentiels. Paris: Math. Soc. France, 1978. (Astérisque. V. 57.) [6] M. Sugimoto // J. Math. Soc. Japan. 1988. V. 40. P. 105–122. [7] H. Triebel. Theory of Function Spaces. Basel: Birkhäuser, 1983. (Monographs Math. V. 78.)

Имперский колледж, Лондонский университет;
 Университет Осаки
E-mail: ruzh@ic.ac.uk, sugimoto@math.wani.osaka-u.jp

Принято редколлегией
 27.07.2003