Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

М. Виана, С. Луццатто, Исключения значений параметра в системах типа Эно,
УМН, 2003, том 58, выпуск 6, 3–44

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm674>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и
согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 13:41:04

УДК 517.925+517.938

ИСКЛЮЧЕНИЯ ЗНАЧЕНИЙ ПАРАМЕТРА В СИСТЕМАХ ТИПА ЭНО

М. Виана, С. Луццатто

Статья посвящена аттрактору Эно и родственным ему системам. Аттрактор Эно возникает при итерировании диффеоморфизма $H_{a,b}$ плоскости, $(x, y) \mapsto (1 - ax^2 + by, x)$. Когда b мало, это отображение близко к одномерному отображению $x \mapsto 1 - ax^2$. Последнее имеет складку, которая отражается и на свойствах $H_{a,b}$ с $b \neq 0$, — это отображение обладает некоторой гиперболичностью, но она не является равномерной. М. Бенедикс и Л. Карлесон нашли подход к исследованию таких отображений, доставляющий довольно полную информацию об аттракторе при “большинстве” значений a . Затем Л. Мора и М. Виана, а также многие другие авторы доказали, что подобные аттракторы возникают в гораздо более общих ситуациях, и теория таких систем также была хорошо развита. Данная статья представляет собой введение в эту область исследований. Не давая исчерпывающих доказательств, авторы старались выделить ключевые моменты, отсылая к оригинальным работам за подробным изложением.

Библиография: 48 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	4
1.1. Равномерная и неравномерная гиперболичность	4
1.2. Семейство Эно	6
1.3. Общие замечания и структура статьи	8
2. Геометрическая структура в динамическом пространстве	9
2.1. Одномерный случай	9
2.2. Двумерный случай	10
2.3. Гиперболические координаты	14
2.4. Критические точки	16
2.5. Ограниченная рекуррентность	18
2.6. Гиперболичность и искажение к моменту времени n	20
2.7. Новые критические точки	22
2.8. Мощность критического множества	22
3. Положительная мера в пространстве параметров	23
3.1. Одномерный случай	24
3.2. Двумерные проблемы	25
3.3. Обзор рассуждения	26
4. Комбинаторная структура	30

4.1. Первый шаг индукции	30
4.2. Свойства параметризованных критических точек	30
4.3. Пространство параметров в момент времени n	33
5. Вероятностное рассуждение	37
5.1. Ренормализация комбинаторики	38
5.2. Метрические границы	39
5.3. Комбинаторные границы	40
5.4. Средняя рекуррентность	41
5.5. Выводы	42
Список литературы	43

1. Введение

Эта статья представляет собой подробный обзор рассуждений, используемых в доказательстве того факта, что отображения типа Эно

$$\Phi_a(x, y) = (1 - ax^2, 0) + R(a, x, y), \quad \|R(a, x, y)\|_{C^3} \leq b,$$

имеют *странный аттрактор* для множества значений параметра a , имеющего положительную меру Лебега, если размер возмущения b достаточно мал. Сначала мы кратко излагаем *геометрическую модель* странного аттрактора в этом контексте, подчеркивая некоторые существенные геометрические свойства, а затем концентрируем наши усилия на построениях и оценках, которые нужны в доказательстве того, что эта геометрическая модель действительно осуществляется для *многих значений параметра*.

Наша амбициозная цель состоит в том, чтобы предложить изложение, которое было бы одновременно интуитивно ясным, синтетическим и строгим. Мы рассматриваем этот текст как введение и путеводитель для изучения оригинальных работ [6] и [29], в которых соответствующие результаты были доказаны впервые. Мы сосредоточимся на подробном описании всей структуры рассуждения и способа, которым это рассуждение разбивается на (многочисленные) составляющие его подрассуждения, одновременно отсылая читателя к оригинальным статьям за подробностями технических рассуждений. Мы начнем с некоторых технических и исторических замечаний, касающихся мотивировки задачи и включения ее в подходящий математический контекст.

1.1. Равномерная и неравномерная гиперболичность. Рассуждения, которые мы собираемся обсудить, лежат в центре определенной ветви теории динамических систем. Чтобы сформулировать ее цели и задачи, мы напомним сначала два понятия гиперболичности: *равномерную гиперболичность*, где гиперболические оценки предполагаются выполненными равномерно в каждой точке некоторого множества, и *неравномерную гиперболичность*, которая формулируется в терминах асимптотических гиперболических оценок (ненулевые показатели Ляпунова), выполняющихся

Мы весьма признательны Сильвену Кровизьеру и Жану-Кристофу Йоккозу за чтение предыдущей версии и очень полезные комментарии и Якову Григорьевичу Синаю за его интерес к этому тексту. Второй автор был частично поддержан фондом FAPERJ, Бразилия.

лишь почти всюду относительно некоторой инвариантной вероятностной меры. Понятие равномерной гиперболичности было введено Смейлом (см. [38] и библиографию к этой статье)¹ и было центральным понятием для значительной части исследований в области динамики, выполненных в течение 60-х и 70-х годов, включая фундаментальную работу Аносова [1] об эргодичности геодезических потоков²; понятие неравномерной гиперболичности было сформулировано в работе Песина [33] и было затем существенно разработано им и другими математиками.

В обоих случаях можно выделить два связанных между собой, но различных аспекта. С одной стороны, общая теория *предполагает* гиперболичность и занимается вопросами ее *следствий* геометрического и динамического характера, включая существование устойчивых и неустойчивых многообразий, вопросы эргодичности, формулы для энтропии, статистические свойства, и т. д. Этот аспект теории хорошо разработан в обоих случаях, хотя результаты, естественно, сильнее в равномерно гиперболическом случае. См. подробности и детальную библиографию в обстоятельных текстах [27], [37], [34], [19], [2], [47], [44], [3], [4].

С другой стороны, есть задача построения и нахождения примеров и, более общим образом, *проверки* гиперболичности у специальных классов систем. В этом отношении различие между равномерной и неравномерной гиперболичностью очень велико. Равномерно гиперболические системы могут быть построены относительно просто, и в принципе, а также часто и на практике, проверка условия равномерной гиперболичности требует лишь конечного числа итераций отображения. Основным техническим приемом проверки равномерной гиперболичности является метод *полей конусов*, включающий проверку открытого множества соотношений для частных производных отображения.

Проверка неравномерной гиперболичности – вообще говоря, гораздо более сложная проблема, отчасти потому, что это понятие имеет асимптотическую природу, т.е. зависит от поведения итераций, когда время стремится к бесконечности. Кроме того, неравномерно гиперболические системы могут содержать касания устойчивых и неустойчивых слоев, а в этом случае они не могут иметь дополнительных устойчивых и неустойчивых непрерывных инвариантных полей конусов. В действительности, инвариантные объекты для систем этого типа скорее всего находятся в измеримой категории, а не в топологической. Кроме того, есть некоторое затруднение, связанное с тем, что само определение неравномерной гиперболичности требует инвариантной меры. Такая мера обычно не бывает дана изначально, и требуется использовать преимущества гиперболичности системы даже для того, чтобы доказать само существование искомой меры. Во всяком случае, у нас все еще нет ясного понимания того, что именно делает динамическую систему неравномерно гиперболической, и, видимо, нужно исследовать еще много примеров таких систем, чтобы такое понимание было достигнуто.

Теория, описанная в этой статье, находится в центре продолжающейся работы по развитию инструментов, связанных с конкретными условиями, роль которых подобна роли условий полей конусов в равномерно гиперболическом случае и которые обеспечивают существование инвариантной меры, и свойство неравномерной гиперболичности более или менее одновременно. Упомянутые выше трудности даже более

¹А также Аносовым [1]. – *Прим. ред.*

²На замкнутых многообразиях отрицательной кривизны. – *Прим. ред.*

существенны в контексте систем типа Эно, поскольку нельзя ожидать постоянной неравномерной гиперболичности в пространстве параметров и это свойство нельзя проверить с помощью открытого множества условий, накладываемых на конечное число итераций. Мы постараемся описать здесь, как эти трудности разрешались с помощью захватывающих достижений в течение примерно последней четверти века.

1.2. Семейство Эно. Семейство Эно $H_{a,b}(x, y) = (1 - ax^2 + by, x)$ было введено в середине семидесятых годов [14] как упрощенная модель динамики, связанной с отображением Пуанкаре для системы обыкновенных дифференциальных уравнений (предложенной Э. Лоренцем, см. [20])³ и как простейшая модель двумерных динамических систем, проявляющих хаотическое поведение. Численные эксперименты, проведенные Эно, указали на наличие непериодического аттрактора для значений параметра $a \approx 1.4$ и $b \approx 0.3$. Однако числа не могут отличить действительно странный аттрактор от периодического аттрактора с большим периодом, и дать строгое доказательство существования странного аperiodического аттрактора было бы чрезвычайно важно. Впрочем, исходное утверждение Эно остается пока что не доказанным для рассмотренной им области изменения параметра, даже несмотря на значительный прогресс, достигнутый в этом направлении.⁴

Рис. 1. Поведение складок

Отличительной особенностью этих отображений, которая превращает их в модель для много более общих систем, является появление “складок” в виде, представленном на рис. 1: в заштрихованной области горизонтальные/растягивающие и вертикальные/сжимающие направления, грубо говоря, меняются местами. Это может приводить к появлению касаний между устойчивыми и неустойчивыми многообразиями,

³Однако оказалось, что системе Лоренца эта модель не вполне соответствует и является в некотором отношении более сложной. — *Прим. ред.*

⁴Хотя авторы и говорят об этом несколько ниже (в п. 2.2.3), уместно уже сейчас обратить внимание на то, что слово “складка” в настоящей работе (в отличие от теории особенностей гладких отображений) не является точным математическим термином, а выступает как наглядное, но не точное описательное выражение. (Складок и прочих критических точек, как это понимается в теории особенностей, у нас вообще нет, за исключением одномерного отображения $x \mapsto 1 - ax^2$, являющегося в некотором смысле предельным при $b \rightarrow 0$.) Позднее соответствующие явления получают формализацию (применительно к рассматриваемой системе!). Ее идея намечается в п. 2.2.3, а реализация намеченной там программы формально завершается в п. 2.4.8, где дается определение “множества критических точек” $\mathcal{C}$, опирающееся на предыдущие рассуждения и мотивируемое сопутствующими эвристическими соображениями. Это определение не может быть отделено от проводящегося в настоящей статье исследования отображений (типа) Эно при малых b , т.е. его нельзя выделить как нечто, так сказать, автономное. (По крайней мере, это так в рамках данной работы.)

где растягивающее и сжимающее поведения смешиваются, что приводит к тому, что если какая-то гиперболичность и есть, то обязательно строго неравномерная, и динамика оказывается структурно неустойчивой.

1.2.1. Случай $b = 0$. В сильно диссипативном пределе $b = 0$ семейство Эно сводится к семейству квадратичных одномерных отображений, а складка сводится к *критической точке*. Первые результаты появились именно в этом контексте. Изобилие аperiodического и неравномерно гиперболического поведения было впервые доказано Якобсоном [18] менее четверти века тому назад в статье, где техника исключения значений параметра была впервые применена для доказательства существования динамических явлений, возникающих на нигде не плотном множестве положительной меры.

Исходной точкой было формулирование некоторого геометрического условия, которое влечет неравномерную гиперболичность; в [18] это условие было определено как существование индуцированного отображения с некоторыми свойствами растяжения и искажения. Принципиальным прорывом было понимание того, что, поскольку это условие требует информации о всех итерациях отображения, неразумно пытаться доказать это условие для данного конкретного отображения. Вместо этого нужно начинать с семейства отображений, для которых можно провести некоторое конечное число шагов в построении требуемого индуцированного отображения. Затем нужно попытаться продолжить построение далее на шаг по времени, и каждый шаг исключает из дальнейшего рассмотрения значения параметра, для которых этого сделать нельзя. Тогда задача сводится к тому, чтобы показать, что не все значения параметра исключаются в пределе, и требуются вероятностные рассуждения, которые показывают, что доля исключаемых значений параметра экспоненциально убывает с ростом n , откуда следует, что полная мера исключенных значений относительно мала, и остается множество значений параметра, имеющее положительную меру, для которого построения могут быть проведены для всех итераций. Поэтому все соответствующие отображения – неравномерно гиперболические.

Было получено много обобщений теоремы Якобсона, использующих различные геометрические условия для определения понятия “хорошего” параметра и более общие семейства одномерных гладких отображений [5], [36], [28], [40], [41], [39], [12], [22], [17], а также отображения с критическими точками и особенностями с неограниченной производной [31], [23], [24]. Многие из этих статей использовали промежуточное геометрическое условие, формулируемое в терминах свойств орбит критических точек, с которым часто легче работать, чем с полным индуцированным отображением. Тогда можно показать с помощью независимого рассуждения, что подходящие условия на орбиты критических точек влекут существование индуцированного отображения, а поэтому и существование инвариантной меры и неравномерную гиперболичность.

1.2.2. Системы типа Эно. Распространение этих результатов на двумерный случай требует значительного числа новых аргументов и новых идей. Некоторые проблемы обсуждаются ниже, когда мы проводим более подробное сравнение с одномерным случаем. Сейчас мы упомянем только упомянутую выше “принципиальную” проблему: как должен выглядеть хороший параметр. Оказывается, можно обобщить упомянутый выше одномерный подход, формулируемый в терминах свойств рекуррентности орбит критических точек. Однако уже точная формулировка этого обобщения в высшей степени нетривиальна и занимает центральную часть теории.

Одним из выдающихся вкладов Бенедикса и Карлесона [6] было создание геометрической структуры, обобщающей касания устойчивых и неустойчивых слоев, играющих роль критических точек, вместе с неравномерной гиперболической динамикой. Они смогли тогда обобщить рассуждение об исключении значений параметра и сделать вывод, что эта структура действительно имеет место в семействе Эно $H_{a,b}$ на множестве параметров (a, b) положительной лебеговой меры с $b \approx 0$.

Вскоре после этого, в [29], подход Бенедикса и Карлесона был распространен на общие семейства типа Эно, что освободило рассуждения от какой-либо зависимости от явного выражения для отображения Эно, и была установлена также связь между этими системами и такими общими бифуркационными механизмами, как гомоклинические касания. Кроме того, статья [43] распространила выводы статьи [29] на случай произвольной размерности. Была развита эргодическая теория систем типа Эно, включая существование меры Синая–Рюэлля–Боуэна [9] (в частности, доказано, что аттрактор из [6], [29] – действительно неравномерно гиперболический в стандартном смысле), экспоненциальное перемешивание [10], [48] и свойство притягивающего множества аттрактора [8]. Кроме того, в [13] результаты [29] были распространены на более глобальный странный аттрактор, возникающий из циклов типа седло-узел, и при этом было замечено, что первоначальный подход можно применить к возмущениям весьма общих семейств уни- или мульти-модальных отображений в размерности 1, а не только к квадратичным семействам. В недавней статье [45] было показано, что вся теория допускает такое обобщение, и было выделено небольшое множество условий, при которых это обобщение работает. Сходные идеи были также применены в соответствующих контекстах в [12], [35], [32], [46].

1.3. Общие замечания и структура статьи. Одним из существенных моментов в построении в [6] являются понятие *динамически определенной критической точки*, которое представляет собой совершенно нетривиальное обобщение понятия критической точки в одномерном контексте, и связанное с ним понятие динамически определенных *конечно-временных приближений* к критической точке. Определение хорошего параметра формулируется в терминах существования подходящего множества таких критических точек, удовлетворяющих некоторым условиям гиперболичности вдоль их будущих орбит. Однако само существование критических точек связано с выполнением таких свойств гиперболичности и поэтому с множеством, где параметр является хорошим параметром, и мы сталкиваемся с другим затруднением, подобным обсужденному выше.

Решение лежит в наблюдении, что некоторое множество конечно-временных *приближений* к этим критическим точкам может быть определено для всех значений параметра в некотором достаточно малом параметрическом интервале. Тогда можно запустить индуктивное рассуждение, в котором из справедливости некоторого условия для критических приближений следует, что эти приближения можно уточнить и получить лучшие приближения. Параметры, для которых условие не выполняется, исключаются из дальнейших рассмотрений. Таким образом, как и в одномерном случае, нужно оценить размер исключаемых значений параметра на каждом шаге, чтобы заключить, что есть существенное множество значений параметра, для которых все критические приближения всегда удовлетворяют требуемому условию и, в частности, сходятся к “истинному” критическому множеству, которое тоже удовлетворяет всем этим условиям.

Все рассуждение в целом представляется чрезвычайно сложной индукцией, и изложение в оригинальных статьях иногда слишком кратко, особенно при описании процедуры исключения значений параметра. Более подробные объяснения некоторых важных мест были даны позже, например, в [31], где обращение с бесконечно многими критическими точками было подробно формализовано в одномерном случае. Однако было выдвинуто предложение подготовить удобный для читателя обзор идей всей процедуры в едином тексте с особым выделением вопросов, связанных с исключением значений параметра. Настоящий текст является ответом на это предложение.

В разделе 2 мы кратко описываем основные геометрические свойства аттрактора для “хороших” значений параметра Бенедикса–Карлесона, включая определение динамически определенных критических точек. Это соответствует формулировке в точности тех условий, которые определяют значения параметра, подлежащие исключению на каждом шаге рассуждения об исключении значений параметра. В оставшейся части статьи мы обсуждаем второй этап, а именно доказательство того факта, что множество хороших значений параметра имеет положительную лебегову меру.

Другой текст с аналогичными целями был написан примерно в то же время Бенедиксом и Карлесоном [7], а другое изложение исключений значений параметра содержится в [45] в несколько более общей постановке. Наше изложение основано на оригинальных статьях [6] и [29], хотя мы и излагаем здесь новую (не опубликованную ранее) формализацию рассуждений путем введения понятия *расширенного пространства параметров*, чтобы проследить за комбинаторикой каждого отдельного приближения критической точки на каждом шаге и сделать более явным эффект исключений значений параметра, связанных с кратными критическими точками. Этот формализм был развит как часть продолжающейся совместной работы об аттракторах, подобных аттрактору Лоренца, [25], и впервые анонсирован в [21].

2. Геометрическая структура в динамическом пространстве

В этом разделе мы приводим обзор основных геометрических свойств “хорошего” значения параметра и вводим обозначения и определения, нужные для проведения рассуждения об исключении значений параметра. В тех случаях, когда это не может привести к недоразумению, мы считаем параметр a фиксированным и не отмечаем этого явно.

2.1. Одномерный случай. В одномерном случае $\phi_a : x \mapsto 1 - ax^2$ рассуждение распадается на три основных шага.

2.1.1. Равномерное растяжение вне критической окрестности. Первый шаг является проявлением общего принципа одномерной динамики, доказанного Мане [26], согласно которому орбиты ведут себя равномерно гиперболическим образом, пока они остаются вне некоторой окрестности критических точек и периодических аттракторов. Более точно, мы используем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Существует такая постоянная $\lambda > 1$, что для любого $\delta > 0$ найдется такое $a_0(\delta)$, $a_0(\delta) < 2$, что для любого a , $a_0 \leq a \leq 2$, динамика ϕ_a вне δ -окрестности критической точки $c = 0$ является равномерно растягивающей со степенью растяжения λ .*

Таким образом, выбирая параметрический интервал Ω достаточно близким к $a = 2$, мы можем работать с отображениями, удовлетворяющими равномерным оценкам рас-

тяжения (которые также равномерны относительно параметра) вне некоторой *произвольно малой* окрестности критической точки с коэффициентом расширения λ , который не зависит от размера окрестности. Этот факт является существенным для всех последующих рассуждений.

2.1.2. Ограниченная рекуррентность и неравномерное растяжение. Как только постоянная $\delta > 0$, а соответствующая критическая окрестность Δ и подходящий параметрический интервал Ω фиксированы, мы определяем хороший параметр a условием рекуррентности

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ c_j \in \Delta}} \log |c_j - c|^{-1} \leq \alpha n \quad \text{для всех } n \geq 1, \quad (*)$$

где $c_j = \phi_a(c)$ – итерации критической точки, а $\alpha > 0$ – некоторая малая постоянная. Заметим, что это определение отличается от *основного предположения и предположения о свободном периоде* вместе взятых (хотя и эквивалентно им по существу); эти условия были первоначально сформулированы в [6], [29]. Это условие напоминает условие в [42] и оказалось особенно полезным в [23]–[25], где наличие множества разрывности требует дополнительного условия ограниченной возвращаемости, которое замечательным образом принимает в точности тот же вид. Кроме того, прямое вычисление, использующее оценки растяжения из предложения 1, см. [22], показывает, что при этом условии критическая орбита имеет экспоненциальный рост производной:

$$|D\phi^n(\phi(c))| \geq e^{\kappa n} \quad \text{для всех } n \geq 1 \quad (\text{EG})$$

для некоторой постоянной $\kappa > 0$. Согласно [11], [30] из условия (EG) следует, что соответствующее отображение – неравномерно гиперболическое.

2.1.3. Исключение значений параметра. Таким образом, задача сведена к доказательству того, что многие значения параметра в Ω удовлетворяют условию ограниченной рекуррентности (*). По существу, этот факт является следствием предложения 1 и наблюдения, что данные в этом предложении оценки равномерного расширения могут быть распространены до оценок расширения для производных по параметру. Таким образом, образы критической орбиты для различных значений параметра все более и более склонны к “случайному” распределению, и вероятность того, что они попадут очень близко к критической точке, становится все меньше и меньше. Тогда вероятность выполнения условий ограниченной рекуррентности положительна даже для всех итераций. В разделе 3.1 мы кратко описываем комбинаторное построение и оценки, требуемые при формализации этой стратегии. Это – также и частный случай стратегии, примененной в двумерном случае, который будет обсужден несколько более подробно.

2.2. Двумерный случай. В двумерной ситуации мы тоже можем разбить все рассуждение на три шага, как выше, хотя каждый из этих шагов много более сложен. В частности, сама формулировка условия рекуррентности (*) требует существенной работы, и мы сейчас сосредоточимся на этой проблеме, оставляя вопросы, связанные с исключением значений параметра, до следующих разделов.

2.2.1. Равномерная гиперболичность вне критической окрестности. В двумерном случае мы определяем критическую окрестность Δ как малую вертикальную полосу ширины 2δ .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Существует такая постоянная $\lambda > 1$, что для любого $\delta > 0$ существуют такие числа $b_0(\delta) > 0$ и $a_0(\delta) < 2$, что для любых $0 \leq b \leq b_0$ и $a_0 \leq a \leq 2$ динамика $\Phi_{a,b}$ вне вертикальной полосы Δ вокруг $x = 0$ равномерно гиперболична со степенью расширения λ и степенью сжатия b .*

Доказательство этого предложения зависит от того факта, что b мало, и поэтому $\Phi_{a,b}$ близко к одномерному семейству отображений, для которых выполняются оценки предложения 1. Как мы увидим, предположение сильной диссипативности $b \approx 0$ используется еще в одном месте, при оценке мощности критического множества на каждом шаге n .

2.2.2. Ограниченная рекуррентность и неравномерная гиперболичность.

Предположим теперь, что постоянные δ , a_0 , b_0 фиксированы и что для некоторого $0 < b \leq b_0$ мы выбрали интервал $\Omega \subset (a_0, 2)$ изменения параметра a . Мы хотим сформулировать некоторое условие, чтобы с его помощью охарактеризовать хорошие параметры в Ω . Наша цель – остаться как можно ближе к одномерной формулировке и определить *критическое множество* $\mathcal{C} \subset \Delta$, содержащее бесконечно много таких *критических точек*, что каждая точка удовлетворяет условию ограниченной рекуррентности

$$\sum_{\substack{1 \leq j \leq n \\ c_j \in \Delta}} \log |c_j - \mathcal{C}|^{-1} \leq \alpha n \quad \text{для всех } n \geq 1, \quad (*)$$

для некоторого достаточно малого $\alpha > 0$. Здесь расстояние $|c_j - \mathcal{C}|$ отвечает не стандартному хаусдорфову расстоянию между точкой c_j и множеством $\mathcal{C}$, а расстоянию между c_j и некоторой специальной точкой из $\mathcal{C}$, выбираемой с помощью обсуждаемой ниже процедуры.

Не самое прямое вычисление (составляющее на самом деле значительную часть доказательства теоремы 1 ниже) показывает, что это условие ограниченной рекуррентности влечет двумерный аналог условия экспоненциального роста:

$$|D\phi_{\phi(c)}^n w| \geq e^{\kappa n} \quad \text{для всех } n \geq 1, \quad (\text{EG})$$

для некоторой постоянной $\kappa > 0$ и горизонтального или “почти горизонтального” вектора w и для любой критической точки $c \in \mathcal{C}$. Мы не обсуждаем здесь, почему условие $(*)$ (вместе с условием равномерной гиперболичности вне Δ) также и достаточно, чтобы гарантировать глобальную неравномерную гиперболичность соответствующего отображения, и отсылаем к статьям [9], [10], [8], [16] по поводу построения меры Синая–Рюэлля–Боуэна при этих (или других, но по существу эквивалентных) условиях. Мы также откладываем обсуждение проверки того факта, что это условие выполняется для многих значений параметра Ω , до следующих разделов. Вместо этого, в оставшейся части этого раздела мы сосредоточиваемся на задаче определения критического множества $\mathcal{C}$.

2.2.3. Динамически определенные критические точки. Так как Φ – диффеоморфизм, то его якобиан нигде не обращается в нуль, и поэтому нет *априори* данных критических точек, как в одномерном случае. Однако что-то “плохое” происходит в критической области, поскольку равномерно гиперболические оценки вне Δ не могут быть распространены на Δ . Геометрически, это связано с описанными выше складками, что отражается на уровне дифференциала в том факте, что (грубо говоря) горизонтальные векторы отображаются в (грубо говоря) вертикальные векторы.

Динамически, это проблематично, поскольку (грубо говоря) горизонтальное направление – растягивающее, тогда как (грубо говоря) вертикальное направление – сильно сжимающее. Таким образом, любое расширение, достигнутое за несколько итераций, может быть потеряно в течение итераций, следующих за возвращением в Δ . Необходимо иметь более тонкий контроль за способом вращения векторов, чтобы показывать, что, после некоторого ограниченного времени и некоторого ограниченного сжатия, эти векторы возвращаются в (грубо говоря) горизонтальное направление и снова начинают растягиваться.

Можно надеяться геометрически охарактеризовать как *критические точки* такие точки, на которые складка оказывает наиболее драматический эффект, т.е. точки, в которых почти горизонтальный вектор, направленный *в точности* в растягивающем направлении (т.е. вектор, касательный к неустойчивому многообразию), отображается в почти вертикальный вектор в точности в сжимающем направлении (т.е. касательный к устойчивому многообразию). Оказывается, дело обстоит именно так, и множество критических точек $\mathcal{C}$ образовано множеством точек касательного пересечения некоторых устойчивых и некоторых неустойчивых многообразий. Однако, как указано выше, нельзя предполагать, что эти многообразия существуют для всех значений параметра, и поэтому построение требует индуктивного рассуждения о приближении *конечно-временными критическими точками*, которые также являются касаниями между кусками неустойчивых многообразий и некоторых *конечно-временных устойчивых слоев*, подлежащих описанию в дальнейшем. В следующих разделах мы более подробно изложим локальную геометрию, связанную с критическими точками и их приближениями. Сейчас мы поясним формальную структуру индукции.

2.2.4. Индукция. Мы начинаем с определения критического множества $\mathcal{C}^{(0)}$ и затем индуктивно предполагаем, что множество $\mathcal{C}^{(k)}$ критических точек порядка k определено при $1 \leq k \leq n-1$, причем каждая критическая точка удовлетворяет некоторым условиям гиперболичности $(EG)_{n-1}$, которые являются конечно-временными вариантами приведенного выше условия (EG) , вместе с условием $(BD)_{n-1}$ ограниченного искажения в некоторой окрестности, которое будет введено ниже. Существование множества $\mathcal{C}^{(n-1)}$ позволяет нам *установить* условие $(*)_{n-1}$ о возвращении точек множества $\mathcal{C}^{(n-1)}$ в то же самое множество. Это – конечно-временной вариант приведенного выше условия $(*)$ с $\mathcal{C}^{(n-1)}$ вместо $\mathcal{C}$.

Тогда главный индуктивный шаг состоит в том, чтобы показать, что если все точки $\mathcal{C}^{(n-1)}$ удовлетворяют этому условию рекуррентности, то условия $(EG)_n$ и $(BD)_n$ выполняются в окрестности множества $\mathcal{C}^{(n-1)}$. Теперь тот факт, что эти условия выполняются, позволяет нам так *определить* новое критическое множество $\mathcal{C}^{(n)}$, достаточно близкое в хаусдорфовой метрике к $\mathcal{C}^{(n-1)}$, что точки этого множества также автоматически удовлетворяют условиям $(*)_{n-1}$, $(EG)_n$ и $(BD)_n$. Это завершает индуктивный шаг. Если все точки множества $\mathcal{C}^{(n)}$ удовлетворяют условию $(*)_n$, то рассуждение можно повторить, чтобы получить критическое множество $\mathcal{C}^{(n+1)}$, и т.д. Множества $\mathcal{C}^{(n)}$ в конце концов сходятся к критическому множеству $\mathcal{C}$, которое состоит из касаний между устойчивыми и неустойчивыми слоями. Мы суммируем это рассуждение в следующей теореме.

ТЕОРЕМА 1. *Предположим, что для некоторого $a \in \Omega$ определено конечное критическое множество $\mathcal{C}^{(n-1)} \subset \Delta$.*

- (1) Если множество $\mathcal{C}^{(n-1)}$ удовлетворяет условию $(*)_{n-1}$, то оно удовлетворяет $(EG)_n$ и $(BD)_n$.
- (2) Если $\mathcal{C}^{(n-1)}$ удовлетворяет $(*)_{n-1}$, $(EG)_n$ и $(BD)_n$, то можно определить конечное множество $\mathcal{C}^{(n)}$, элементы которого являются критическими точками порядка n и удовлетворяют $(*)_{n-1}$, $(EG)_n$ и $(BD)_n$. Кроме того, $\mathcal{C}^{(n)}$ и $\mathcal{C}^{(n-1)}$ экспоненциально близки по переменной n в хаусдорфовом смысле.

В частности, если $(*)_n$ продолжает выполняться при растущих значениях n , то множество критических приближений сходится к множеству $\mathcal{C}$ истинных критических точек, удовлетворяющих условиям $(*)_n$, $(EG)_n$ и $(BD)_n$ для всех n .

Этот результат означает, что условия ограниченной рекуррентности $(*)_n$ в точности являются условиями, нужными для определения хорошего параметра, и он позволяет нам сосредоточить рассуждение об исключении значений параметра на рекуррентности критических приближений на каждом шаге n . Таким образом, все происходит в рамках, подобных одномерному случаю, за исключением того, что есть дополнительные осложнения, возникающие в связи с требованием обосновать индуктивный шаг, и того, что исключения должны быть сделаны относительно каждой критической точки.

2.2.5. Почему нам нужно критическое множество? Причина, по которой нам нужно критическое множество, а не просто отдельная критическая точка, состоит в способе, которым итерации, попадающие в критическую область Δ , компенсируются, чтобы сохранить экспоненциальный рост. Как только точка $z \in \mathcal{C}^{(n)}$ возвращается в Δ за время n , нужно искать некоторую точку $\zeta \in \mathcal{C}^{(n)}$, близкую к $\Phi^n(z)$, и передать информацию о гиперболичности на первых итерациях ζ , индуктивно, на период времени в орбите z , следующий за возвращением. Это правило хорошо работает, если обе точки ζ и $\Phi^n(z)$ находятся в касательном положении, т.е. находятся на одной и той же почти горизонтальной кривой. При этом, вообще говоря, точка ζ должна отличаться от z . Этот шаг вынуждает критическое множество $\mathcal{C}^{(n)}$ быть достаточно большим; действительно, мощность этих множеств должна стремиться к бесконечности при $n \rightarrow \infty$. К счастью, как мы сейчас увидим, можно работать с последовательностью критических множеств, мощность которых растет достаточно медленно, пока мы можем предполагать, что b мало. См. раздел 2.8. В дальнейшем мы определим понятие критической точки более формально и приведем набросок нашего рассуждения в доказательстве теоремы 1.

2.2.6. Постоянные и обозначения. Мы сначала введем некоторые понятия, которые будут постоянно использоваться в дальнейшем. Для данных точки ξ_0 и вектора w_0 положим $\xi_j = \Phi^j(\xi_0)$ и $w_j = D\Phi^j(\xi_0)w_0$ для всех $j \geq 0$. Мы будем предполагать, что вектор w_0 имеет наклон $\leq 1/10$, если явно не указано противное. Зафиксируем числа $\log 2 > \kappa \gg \alpha \gg \delta > 0$. Эти постоянные имеют следующий смысл:

- κ – нижняя граница гиперболичности двумерных отображений в условии $(EG)_n$;
- α используется при формулировке условия рекуррентности $(*)_n$, а также в определении понятия связывания;
- δ определяет ширину критической окрестности Δ .

Параметрический интервал Ω выбирается достаточно близко к $a = 2$ в зависимости от κ, α, δ . Предполагается, что размер возмущения b мал, причем он зависит от

всех предыдущих выборов. Некоторые служебные постоянные появляются в ходе рассуждения, и они связаны с предыдущими. Число $K = 5$ является верхней гранью C^3 -нормы наших отображений. Малое значение $\rho > 0$, например, $\rho = (10K^2)^{-2}$, используется, чтобы описать радиус допустимого отрезка неустойчивого многообразия вокруг каждой критической точки. Мы используем $\tau > 0$ при изучении условия рекуррентности. Оно выбирается в разделе 4.3.4, и оно гораздо меньше, чем α , и не зависит от δ . Постоянные $\kappa_1, \dots, \kappa_4 > 0$, зависящие только от κ , описывают расширения в течение связывающих периодов времени, а $\theta = C/|\log b|$ используется при ограничении числа критических точек, где $C > 0$ – некоторая большая постоянная, например, $C = 10 \log |\rho|$. Заметим, что $\theta \rightarrow 0$ при $b \rightarrow 0$.

2.3. Гиперболические координаты. Определение конечно-временной критической точки основано на понятии гиперболических координат, которое мы обсудим в этом разделе.

2.3.1. Неконформные линейные отображения. Предположим, что производное отображение $D\Phi_{\xi_0}^k$ в некоторой точке ξ_0 неконформно (очень мягкий вид гиперболичности). Тогда корректно определены *ортогональные* подпространства $E^{(k)}(\xi_0)$ и $F^{(k)}(\xi_0)$ в касательном пространстве, в которых векторы, соответственно, *сильнее всего сжимаются* и *сильнее всего растягиваются* отображением $D\Phi_{\xi_0}^k$. Элементарное наблюдение из линейной алгебры показывает, что линейное отображение L , переводящее единичный круг $\mathcal{S}^1$ в эллипс $L(\mathcal{S}^1) \neq \mathcal{S}^1$, определяет два *ортогональных* вектора e и f , образы которых отображаются в малую и большую оси эллипса соответственно. Направления $E^{(k)}$ и $F^{(k)}$ могут быть в принципе получены явно как решения дифференциального уравнения $d|D\Phi_{\xi_0}^k \cdot (\sin \theta, \cos \theta)|/d\theta = 0$, которое приводит к

$$\tan 2\theta = \frac{2(\partial_x \Phi_1^k \partial_y \Phi_1^k + \partial_x \Phi_2^k \partial_y \Phi_2^k)}{(\partial_x \Phi_1^k)^2 + (\partial_x \Phi_2^k)^2 - (\partial_y \Phi_1^k)^2 - (\partial_y \Phi_2^k)^2}. \quad (1)$$

Это показывает, что поля направлений, заданные $E^{(k)}$ и $F^{(k)}$, гладко зависят от точки базы и продолжаются на некоторую окрестность точки ξ_0 , на которой производная продолжает удовлетворять требуемому условию неконформности. Поэтому эти поля можно проинтегрировать и получить два гладких *ортогональных* слоения $\mathcal{E}^{(k)}$ и $\mathcal{F}^{(k)}$. Индивидуальные слои этих слоений являются естественными *конечно-временными вариантами* классических локальных устойчивых и неустойчивых многообразий. Действительно, они канонически определены именно свойством, что они сильнее всего сжимаются и сильнее всего растягиваются, соответственно, для некоторого определенного конечного числа итераций. Оценки, которые должны быть разработаны ниже, покажут, что, в некоторых ситуациях, устойчивые слои $\mathcal{E}^{(k)}(\xi_0)$ сходятся при $k \rightarrow \infty$ к классическому локальному устойчивому многообразию $W_\varepsilon^s(\xi_0)$.

Понятия направления наибольшего сжатия и интегральных кривых наибольшего сжатия играют центральную роль в оригинальных работах [6], [29], хотя они там не эксплуатируются так систематически, как здесь. Наш формализм был развит в контексте лоренцоподобных систем [25], [16] и приводит к существенному упрощению нескольких шагов рассуждения; в частности, этот формализм играет важную роль, позволяя нам формулировать индукцию в теореме 1 столь прямым образом. Идея приближения классического локального устойчивого многообразия конечно-временными локальными устойчивыми многообразиями была позже уточнена в [15], где она обра-

зует основу нового подхода к теореме о локальном устойчивом многообразии в более классических контекстах.

2.3.2. Обозначения. Перед тем как объяснить, как эти слоения используются для определения понятия критической точки, мы введем некоторые дополнительные обозначения. Пусть $H^{(k)}(\xi_0) = \{F^{(k)}(\xi_0), E^{(k)}(\xi_0)\}$ – координатная система в касательном пространстве в точке ξ_0 , определенная направлениями $F^{(k)}$ и $E^{(k)}$, и пусть $\mathcal{H}^{(k)} = \{\mathcal{F}^{(k)}, \mathcal{E}^{(k)}\}$ – семейство таких координатных систем в окрестности, в которой они определены. Пусть также $f^{(k)}(\xi_0)$ и $e^{(k)}(\xi_0)$ обозначают единичные векторы в направлениях $F^{(k)}(\xi_0)$ и $E^{(k)}(\xi_0)$ соответственно. Для $k = 0$ обозначим через $F^{(0)}$ и $E^{(0)}$ горизонтальное и вертикальное направления, соответственно, и, таким образом, $\mathcal{F}^{(0)}$ и $\mathcal{E}^{(0)}$ являются горизонтальным и вертикальным слоениями соответственно. Заметим, что $\mathcal{H}^{(k)}$ можно рассматривать как обитателя касательного расслоения – в виде семейства координатных систем – или фазового пространства – в виде слоения; мы не будем делать формальных различий между этими двумя интерпретациями. Для любого из введенных выше объектов мы используем индекс j , чтобы обозначить его образ при отображении Φ^j или при дифференциальном отображении $D\Phi^j$, если это удобно. В частности, положим $e_j^{(k)} = D\Phi^j(e^{(k)})$, $f_j^{(k)} = D\Phi^j(f^{(k)})$ и $\mathcal{H}_j^{(k)} = \Phi^j \mathcal{H}^{(k)}$. Кроме того, заметим, что $\mathcal{H}_k^{(k)}$ – тоже ортогональная система координат, тогда как $\mathcal{H}_j^{(k)}$, вообще говоря, не ортогональна при $j \neq k$. Заметим, что дифференциальное отображение $D\Phi_{\xi_0}^k$, выраженное в виде матрицы относительно гиперболических координат $\mathcal{H}^{(k)}$ и $\mathcal{H}_k^{(k)}$, имеет диагональный вид

$$D\Phi_{\xi_0}^k = \begin{pmatrix} \|f_k^{(k)}(\xi_0)\| & 0 \\ 0 & \|e_k^{(k)}(\xi_0)\| \end{pmatrix}.$$

Наконец, для $j, k \geq 0$ мы рассмотрим угол между слоями в $\mathcal{H}^{(k)}$ и $\mathcal{H}^{(k+1)}$ в некоторой точке ξ_0 , в которой оба слоения определены, и соответствующий угол между образами:

$$\theta^k = \theta^{(k)}(\xi_0) = \angle(e^{(k)}(\xi_0), e^{(k+1)}(\xi_0)) \quad \text{и} \quad \theta_j^{(k)} = D\Phi_{\xi_0}^j \theta^{(k)}(\xi_0),$$

а также производные этих углов по переменной точке базы ξ_0 :

$$D\theta^{(k)} = D_{\xi_0} \theta^{(k)}(\xi_0) \quad \text{и} \quad D\theta_j^{(k)} = D_{\xi_0} \theta_j^{(k)}(\xi_0).$$

2.3.3. Сходимость гиперболических координат. При $k = 1$ и $\xi_0 \notin \Delta$ из соотношения (1) следует, что

$$|\theta^{(0)}| = \mathcal{O}(b). \quad (2)$$

Таким образом, полагая b малым, мы можем гарантировать, что устойчивые и неустойчивые слоения $\mathcal{E}^{(1)}$, $\mathcal{F}^{(1)}$ как угодно близки к вертикальному и горизонтальному слоениям соответственно. Оказывается, что угол между последовательными сжимающими направлениями связан с гиперболичностью вдоль рассматриваемых орбит, и мы получаем весьма общую оценку, которая означает, что, пока индуктивное предположение $(EG)_k$ продолжает выполняться, имеем

$$|\theta^{(k)}| = \mathcal{O}(b^k). \quad (3)$$

В частности, в пределе эти направления сходятся к корректно определенному направлению, сжимаемому всеми прямыми итерациями. Эта сходимость имеет место в C^1 -норме (и даже в C^r -норме для любого фиксированного r), если b достаточно мало.

2.4. Критические точки. Теперь мы готовы ввести понятие *критической точки порядка k* , обычно обозначаемой символом $z^{(k)}$. Определение будет дано индуктивно. Обозначим множество таких точек через $\mathcal{C}^{(k)}$. Оно содержится в критической окрестности Δ , определенной условием

$$\Delta = \{(x, y) : |x| \leq \delta\}.$$

Все критические точки находятся на глобальном неустойчивом многообразии $W^u(P)$ гиперболической неподвижной точки $P \approx (1/2, 0)$; заметим, что у $W^u(P)$ много слоев и $W^u(P) \cap \Delta$ содержит бесконечно много связных компонент. Зафиксируем компактную допустимую окрестность W точки P внутри $W^u(P)$ с длиной $\lesssim 2$, которая продолжается налево от P через критическую область Δ . По определению, пересечение W с вертикальной прямой $\{x = 0\}$ является единственной критической точкой $z^{(0)}$ нулевого порядка.

2.4.1. Первый шаг индукции. Рассмотрим теперь кривую $W_0 = \Phi(W \cap \Delta)$. Как описано выше, отображение Φ приводит к *складке* именно в Δ , и поэтому W_0 *складывается* горизонтально. Квадратичная природа Φ гарантирует, что на самом деле получается квадратичная парабола (положительной кривизны), лежащая на боку. Кроме того, заметим, что $W_0 \cap \Delta = \emptyset$ и поэтому сжимающие направления $e_{\xi_0}^{(1)}$ порядка 1 определены в каждой точке $\xi_0 \in W_0$. Гладкость этих направлений, тот факт, что они по существу вертикальны, см. (2), и тот факт, что W_0 квадратично, гарантируют, что должна быть точка $z_0^{(1)} \in W_0$, дающая касание к сжимающему слою слоения $\mathcal{E}^{(1)}$. Несколько большая работа показывает, что слои сжимающего слоения $\mathcal{E}^{(1)}$ имеют малую кривизну, откуда в свою очередь следует, что может быть не более одной точки касания и это касание квадратично.

Определим $z^{(1)} = \Phi^{-1}(z_0^{(1)})$ как единственную критическую точку порядка 1, т.е. единственный элемент множества $\mathcal{C}^{(1)}$, и $z_0^{(1)}$ как соответствующее критическое значение. Заметим, что из условия малости b следует, что “вершина” параболы близка к $z_0^{(0)}$ и что устойчивые слои почти вертикальны. Поэтому точка касания $z_0^{(1)}$ близка к $z_0^{(0)}$, и расстояние между критическими точками $z^{(0)}$ и $z^{(1)}$ есть величина $\mathcal{O}(b)$. Это составляет первый шаг в индуктивном определении критического множества.

Характеристической особенностью критической точки $z^{(k)}$ порядка k является тот факт, что неустойчивое многообразие касается устойчивого слоения порядка k в критическом значении $z_0^{(k)} = \Phi(z^{(k)})$. Более формально, допустим, что для любого $k = 1, \dots, n-1$ критическое множество $\mathcal{C}^{(k)}$ содержит точки $z^{(k)}$ со следующими свойствами.

2.4.2. Поколение критической точки. Введем понятие *поколения* критической точки, которое полностью отличается от понятия *порядка* критической точки. Мы считаем, что критическая точка k – точка поколения $g \geq 1$, если она принадлежит разности $\Phi^g(W) \setminus \Phi^{g-1}(W)$, где W – определенная выше компонента $W^u(P)$ длины $\lesssim 2$, содержащая неподвижную точку P и пересекающая Δ полностью. Договоримся считать, что критическая точка принадлежит поколению 0, если она принадлежит W . Критические точки $z^{(0)}$ и $z^{(1)}$, введенные выше, являются критическими точками поколения 0, и таковы же все их уточнения $z^{(k)}$, $k \geq 1$, которые должны быть определены ниже. Как часть построения мы накладываем условие, что критические

точки порядка k должны принадлежать поколениям $\leq \theta k$, где $\theta \approx 1/\log b^{-1}$. В частности, единственными критическими точками порядка $\lesssim \log b^{-1}$ являются точки поколения 0.

2.4.3. Допустимые отрезки. Окрестность ω радиуса $\rho^{\theta k}$ вокруг $z^{(k)}$ внутри неустойчивого многообразия $W^u(P)$ является допустимой кривой, содержащейся в $\Phi^{\theta k}(W) \cap \Delta$; скажем, что кривая почти горизонтальна, или *допустима*, если она является графиком $\{x, y(x)\}$ с $|y'| \leq 1/10$, $|y''| \leq 1/10$. Кроме того, $z^{(k)}$ – единственный элемент множества $\mathcal{C}^{(k)}$ в ω (на самом деле мы имеем в виду итерации Φ^ℓ , где ℓ равно целой части θk , но не хотим переделывать обозначения). Заметим, что это условие выполняется при $k = 0, 1$, потому что можно выбрать допустимое W для достаточно малого b .

Поскольку каждая критическая точка располагает некоторым минимальным пространством с обеих сторон, в котором нет других критических точек, и критические точки вплоть до порядка k должны лежать на куске конечной длины в $W^{(u)}(p)$ (потому что они являются точками поколения $\leq \theta k$), мы получаем границу для возможного числа критических точек порядка k . Ниже мы сделаем эту границу явной; она будет играть важную роль в оценках.

2.4.4. Связанные окрестности. Для любых $n - 1 \geq k \geq j \geq 0$ и $z^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$ положим $z_j^{(k)} = \Phi^{j+1}(z^{(k)})$ и

$$B^{(j)}(z_0^{(k)}) = \{\xi_0 : |\xi_i - z_i^{(k)}| \leq e^{-2\alpha i} + 10^{-k} \text{ для всех } i \in [0, j]\}.$$

Это – путь формализации идеи, что есть множество точек, которое *примыкает* к орбите, или остается *связанным* с орбитой, точки $z^{(k)}$ вплоть до времени j . Последовательность итераций $0, \dots, k$ разбивается на *свободные итерации* и *связанные итерации*: j – связанное, если оно принадлежит связывающему периоду времени, относящемуся к некоторому возвращению $\nu < j \leq k$, т.е. все точки, связанные с $z^{(k)}$ вплоть до времени k , связаны также с другой критической точкой ζ между итерациями $\nu + 1$ и j . Это полностью разъясняется ниже в разделе 2.6.1. Если j – не связанная итерация, мы называем ее свободной. По договоренности нулевая итерация свободна.

2.4.5. Гиперболичность и искажение. Мы предполагаем, что отображение дифференциала $D\Phi^k$ удовлетворяет равномерно гиперболическим оценкам на связанной окрестности любой точки $z^{(k)}$:

$$\|w_j(\xi_0)\| := \|D\Phi_{\xi_0}^j(w_0)\| \geq e^{\kappa j} \quad (\text{EG})_k$$

для всех $j \in [0, k]$, любого $\xi_0 \in B^{(k)}(z_0^{(k)})$ и любого касательного вектора w_0 с наклоном $\leq 1/10$. В частности, устойчивые и неустойчивые слоения $\mathcal{E}^{(j)}$, $\mathcal{F}^{(j)}$ определены на всем $B^{(j)}(z_0^{(k)})$ и, что является частью индуктивного предположения, слои $\mathcal{F}^{(k)}$ являются допустимыми кривыми. Пусть $f^{(j)}$ – векторное поле единичной нормы, касательное к слоям $\mathcal{F}^{(j)}$ соответственно, и пусть $f_i^{(j)}$ – его образ под действием отображения дифференциала $D\Phi^i$ при $i \geq 0$. Для любой свободной итерации $j < k$ критической точки $z^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$ гиперболические координаты $\mathcal{H}^{(j)}$, как и их образы $\mathcal{H}_j^{(j)}$, являются C^2 -близкими к стандартной координатной системе $\mathcal{H}^{(0)}$ (т.е. неустойчивые

слои допустимы) и удовлетворяют равномерной оценке искажения: существует такая постоянная $D_0 > 0$, что для всех точек $\xi_0, \eta_0 \in B^{(k)}(z_0^{(k)})$ имеем

$$\log \frac{\|f_j^{(j)}(\xi_0)\|}{\|f_j^{(j)}(\eta_0)\|} \leq D_0 \sum_{i < j} \frac{|\xi_i - \eta_i|}{e^{-\alpha i}} \quad \text{и} \quad \angle(f_j^{(j)}(\xi_0), f_j^{(j)}(\eta_0)) \leq D_0 \frac{|\xi_j - \eta_j|}{e^{-\alpha j}}. \quad (\text{BD})_k$$

Свойство ограниченного искажения означает, что орбиты всех этих точек в некотором смысле неразличимы с аналитической точки зрения.

2.4.6. Квадратичные касания. Как указано выше, условие экспоненциального роста гарантирует, что гиперболические координаты $\mathcal{H}^{(k)}$ определены на всей связанной окрестности $B^{(k)}(z_0^{(k)})$. Тогда критическая точка $z^{(k)}$ характеризуется тем свойством, что соответствующее критическое значение $z_0^{(k)}$ является точкой касания между образом γ_0 допустимой кривой γ , содержащей $z^{(k)}$, и слоем $\mathcal{E}^{(k)}(z_0^{(k)})$ устойчивого слоения порядка k . Снова можно показать, что кривизна γ_0 много больше, чем кривизна устойчивых слоев $\mathcal{E}^{(k)}$, и поэтому это касание единственно и квадратично.

2.4.7. Гнездовые окрестности и предшественники. Существует последовательность

$$z^{(k-1)}, \dots, z^{(0)}$$

предшественников $z^{(k)}$ такая, что при $i = 0, \dots, k-1$ имеем $z^{(i)} \in \mathcal{C}^{(i)}$ и

$$B^{(i+1)}(z_0^{(i+1)}) \subset B^{(i)}(z_0^{(i)}).$$

Заметим, что член 10^{-k} в определении связанной окрестности много меньше величины $e^{-2\alpha i}$ для любого $i \leq k$ и поэтому этим членом можно пренебречь с геометрической точки зрения. Он введен только по формальным соображениям, чтобы обеспечить это гнездовое свойство, см. раздел 2.7.1.

2.4.8. Истинно критические точки. Множество критических точек $\mathcal{C}$ получается как множество предельных точек любой такой последовательности $\{z^{(k)}\}$ с $z^{(k)} \in \mathcal{C}^{(k)}$, что $z^{(k-1)}, \dots, z^{(0)}$ являются предшественниками $z^{(k)}$ для любого k .

2.5. Ограниченная рекуррентность. Предположим, что критические множества $\mathcal{C}^{(k)}$ определены и удовлетворяют приведенному выше условию для всех $k \leq n-1$. Мы сейчас объясним, как сформулировать условие ограниченной рекуррентности $(*)_{n-1}$ на множестве $\mathcal{C}^{(n-1)}$.

2.5.1. Условие рекуррентности. Пусть $0 \leq \nu \leq k$ – свободная итерация, и пусть $z^{(\nu)}$ – соответствующий предшественник $z^{(k)}$. Если ν -й образ $B^{(\nu)}(z_0^{(\nu)})$ пересекает Δ , то мы говорим, что ν – *свободное возвращение* для $z^{(k)}$. Тогда есть алгоритм, *рассуждение о захвате*, который сопоставляет точке $z_\nu^{(k)}$ специальную критическую точку $\zeta^{(\nu)} \in \mathcal{C}^{(\nu)}$ в *положении касания* к ней. Мы дадим лишь моментальную фотографию этого алгоритма в момент времени ν , отсылая читателя за подробным построением к [6; §6] или [29; §9].

Как часть рассуждения, мы построим целую последовательность кандидатов $\zeta_{(g_j)}$, которые являются критическими точками, расположенными на допустимых сегментах радиусов ρ^{g_j} внутри $\Phi^{g_j}(W)$ и такими, что *вертикальное* расстояние между $z_\nu^{(k)}$ и $\zeta_{(g_j)}$ не превосходит $b^{c g_j}$, как показано на рис. 2.

Рис. 2. Поиск связывающей точки

Эти точки определены для возрастающей последовательности g_i , которая не является слишком редкой: $g_{i+1} \leq 3g_i$. Тогда мы считаем связывающей точку $\zeta^{(\nu)} = \zeta_{(g_j)}$, где g_j – наибольшая из точек, для которых $\zeta_{(g_j)}$ определено и

$$g_j \leq \theta\nu \quad (4)$$

(постоянная $\theta = C / |\log b|$ была введена в разделе 2.2.6). Это условие объясняется в разделе 2.5.2.

Мы теперь определим “расстояние” до $z_{\nu}^{(k)}$ от критического множества $\mathcal{C}^{(\nu)}$ как наименьшее расстояние между ξ_{ν} и $\zeta^{(\nu)}$ среди всех точек ξ_{ν} , где $\xi_0 \in B^{(k)}(z_0^{(k)})$:

$$d(z_{\nu}^{(k)}) := |z_{\nu}^{(k)} - \mathcal{C}^{(\nu)}| := \min_{\xi_0 \in B^{(k)}(z_0^{(k)})} |\xi_{\nu} - \zeta^{(\nu)}|.$$

Располагая этим понятием расстояния до определенного выше критического множества, мы можем точно сформулировать условие ограниченной рекуррентности:

$$\sum_{\substack{\text{свободные возвращения} \\ \nu \leq k}} \log d(z_{\nu}^{(k)})^{-1} \leq \alpha k. \quad (*)_k$$

Заметим, что отсюда, в частности, следует, что $d(z_{\nu}^{(k)}) \geq e^{-\alpha\nu}$ и даже $d(\xi_{\nu}) \geq e^{-\alpha\nu}$ для всех $\xi_0 \in B^{(k)}(z_0^{(k)})$ и для всех $\nu \leq k$. Предположим, что все критические множества $\mathcal{C}^{(k)}$ удовлетворяют условию $(*)_k$ (а также условиям $(EG)_k$, $(BD)_k$ и другим приведенным выше условиям) для всех $k \leq n-1$. Докажем, что отсюда следует выполнение условий $(EG)_n$ и $(BD)_n$.

2.5.2. Касательное положение. Важное следствие условия ограниченной рекуррентности и рассуждения о захвате, кратко описанного в разделе 2.5.1, состоит в том, что связывающая точка $\zeta^{(k)}$ и ξ_k находятся в *касательном положении* для всех $\xi_0 \in B^{(k)}(z_0^{(k)})$: существует допустимая кривая γ , касательная к вектору $w_k(\xi_0)$ в ξ_k и касательная к неустойчивому многообразию в $\zeta^{(k)}$. В частности, критическая точка $\zeta^{(k)}$, выбранная с помощью рассуждения о захвате, имеет по существу ту же вертикальную координату, что и одна из точек ξ_k , включая критическую итерацию $z_k^{(k)}$.

Действительно, из условия ограниченной рекуррентности $(*)_k$ следует, что горизонтальное расстояние от z_k до связывающей точки не меньше $e^{-\alpha k}$. Следовательно, для установления касательного положения у нас есть выбор любого такого $\zeta_{(g_j)}$, что

$$e^{-\alpha k} \gg b^{cg_j}, \quad \text{или, что равносильно,} \quad g_j \geq \frac{\text{const}}{|\log b|} k.$$

Другими словами, это означает, что достаточно рассматривать критические точки поколений $g \leq \text{const } k / |\log b| = \theta k$, чтобы гарантировать существование точки в касательном положении. Действительно, именно так ведут себя и выражение $\theta = \theta(b)$, и условие (4). Как мы увидим ниже, этот факт гарантирует также, что число критических точек данного порядка не настолько велико, чтобы испортить оценки исключения значений параметра.

Смысл пребывания в касательном положении столь важен, что оказывается возможным получить оценки в точках возвращения, которые очень похожи на оценки в одномерной ситуации. В частности, грубо говоря, “потеря расширения” пропорциональна расстоянию до связывающей критической точки. См. [6; § 7], [29; § 9] и раздел 2.6.2 ниже.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В [6], [29] критическое множество строится так, что свойство касательного положения в свободных возвращениях удовлетворяется для самих критических точек. Одно из основных достижений [9] состоит в том, что рассуждение о захвате работает по существу и для любой другой точки в $W^{(u)}(p)$, и отсюда следует существование гиперболической меры Синая–Рюэлля–Боуэна. Дальнейшие результаты, такие как экспоненциальное убывание корреляций [10] и другие топологические и гиперболические свойства [45], чрезвычайно сильно зависят от этого факта. Кроме того, статья [8] делает еще один шаг вперед и доказывает, что для почти всех точек в лебеговском смысле в области притяжения возвращения в конце концов касательны. В доказательстве этих рассуждений ключевую роль играет то, что область притяжения “не имеет дыр”: среднее по времени почти каждой по Лебегу точки (а не только подмножества положительной меры) совпадает с мерой Синая–Рюэлля–Боуэна.

2.6. Гиперболичность и искажение к моменту времени n . Приведем набросок доказательства первой части теоремы 1, где показано, что условие ограниченной рекуррентности на критическом множестве $\mathcal{C}^{(n-1)}$ влечет некоторые оценки гиперболичности и искажения в окрестности каждой точки $\mathcal{C}^{(n-1)}$ вплоть до момента времени n . Ситуация, представляющая для нас интерес, возникает тогда, когда возвращение критической точки происходит в момент времени $n - 1$, поскольку в остальных случаях вычисления более или менее непосредственны. Однако в случае возвращения, как было показано выше, векторы получают вращение и достигают почти вертикальных направлений, которые затем насильно сжимаются при многих итерациях, что приводит к возможно неограниченной потере расширения, накопленного вплоть до времени n . Таким образом, идея состоит в том, чтобы использовать условие $(*)_{n-1}$ для контроля эффекта этих возвращений. Предположим, что $(n - 1)$ – свободное возвращение, как в предыдущем разделе, и пусть $\zeta = \zeta^{(n-1)}$ обозначает соответствующую ассоциированную критическую точку.

2.6.1. Связывающие периоды. Из наших индуктивных предположений следует, что гиперболические координаты $\mathcal{H}^{(k)}$ определены в окрестности $B^{(k)}(\zeta_0)$ для всех $k \leq n - 1$. Заметим, что эти связанные окрестности уменьшаются, когда k растет, но начинаются они с относительно больших, когда k мало. Поэтому должны существовать значения k , при которых образ $\gamma_0 = \Phi(\gamma)$ попадает в $B^{(k)}(\zeta_0)$. Обозначим через p наибольшее из этих чисел k . В принципе, мы не знаем, что $p < n - 1$, но нетрудно доказать, что на самом деле $p \sim \left| \log d(z_{n-1}^{(n-1)}) \right|$. В частности, при условии

$(*)_{n-1}$ получаем $p \sim \alpha n \ll n$ (при фиксированном малом α). Таким образом, точка ξ_n затенит ζ_0 за в точности p итераций. Мы скажем, что p – длина *связывающего периода*, ассоциированного с возвращением z_0 в Δ за время $n - 1$.

2.6.2. Локальная геометрия. Мы собираемся тщательно изучить геометрию γ_0 и $w_n(\xi_0)$ относительно гиперболических координат $\mathcal{H}^{(p)}$. У нас есть информация, что γ_0 касательно в ζ_0 к устойчивому слою $\mathcal{E}^{(n-1)}(\zeta_0)$ и что кривая γ_0 квадратична относительно координатных систем $\mathcal{H}^{(n-1)}$. Предположим на мгновение, что $p = n - 1$. Тогда из квадратичной природы γ_0 относительно $\mathcal{H}^{(n-1)}$ следует, что *наклон* $w_n(\xi_0)$ в этих координатах связан с расстоянием между ξ_{n-1} и ζ и более специальным образом с “горизонтальной” компонентой $w_n(\xi_0)$, т.е. компонента в направлении $f^{(n-1)}(\xi_n)$ пропорциональна $d(z_{n-1}^{(n-1)})$.

Эти оценки не могут быть непосредственно применены к гиперболическим координатам для любого $p \leq n - 1$, например, они могут быть неприменимы к стандартным координатам $\mathcal{H}^{(0)}$, потому что $w_n(\xi_0)$ может быть на самом деле совершенно вертикальной в этих координатах и поэтому не иметь горизонтальной компоненты. Тем не менее, из (3) следует, что угол между слоями, связанными с $\mathcal{H}^{(n-1)}$ и $\mathcal{H}^{(p)}$ для $p \leq n - 1$, имеет порядок b^p . Кроме того, $p \sim \log d(z_{n-1}^{(n-1)})^{-1} \ll \log d(z_{n-1}^{(n-1)}) / \log b$ и поэтому $b^p \ll d(z_{n-1}^{(n-1)})$ и длина горизонтальной компоненты в координатах $\mathcal{H}^{(p)}$ по существу та же, что и в $\mathcal{H}^{(n-1)}$.

2.6.3. Восстанавливающая гиперболичность. Тот факт, что горизонтальная компонента $w_n(\xi_0)$ (в гиперболических координатах) пропорциональна $d(z_{n-1}^{(n-1)})$, является двумерным аналогом очень простого факта в одномерном случае, а именно, уменьшение величины производной, вызываемое возвращением в Δ , пропорционально расстоянию до критической точки. Таким образом, даже если вектор $w_n(\xi_0)$ может быть очень близок к вертикали (на самом деле он может быть вертикальным в стандартных координатах) и поэтому подвергается сильному сжатию под действием сколь угодно большого числа итераций, мы не должны беспокоиться о сжатии, потому что мы знаем, что он имеет компоненты строго положительной длины, пропорциональной $d(z_{n-1}^{(n-1)})$, и, таким образом, порядка $e^{-\alpha n}$ в “горизонтальном” направлении, и эти компоненты подвергаются растяжению, давая нам нижнюю границу для истинного размера этого вектора. Используя индуктивные предположения, мы можем показать, что средняя экспоненциальная степень роста восстанавливается к концу связывающего периода:

$$\|D\Phi^{p+1}(\xi_{n-1})w_{n-1}\| \geq d(\xi_n)^{-\kappa_1} \geq e^{\kappa_2 p} \gg 1 \quad (5)$$

для всех $\xi \in B^{(n+p)}(z_0^{(k)})$, где постоянные $\kappa_1, \kappa_2 > 0$ зависят только от κ . На самом деле сильное сжатие применимо в этой точке, поскольку по его применению “вертикальная” компонента, т.е. компонента в направлении $e^{(n-1)}(\xi_n)$, сжимается очень быстро, поэтому наклон вектора очень быстро убывает, и он очень быстро возвращается в почти горизонтальное положение.

2.6.4. Ограниченное искажение. Используя геометрическую структуру и приведенные выше оценки, можно также доказать выполнение свойства ограниченного искажения $(BD)_n$. Это – техническое вычисление, и мы отсылаем за доказательством к [6], [29] или к [25] в гораздо более формальной постановке, чем используемая нами.

2.7. Новые критические точки. Мы приводим два алгоритма порождения новых критических множеств $\mathcal{C}^{(n)}$. Оба эти алгоритма связаны с тем фактом, что поскольку условие $(EG)_n$ выполнено во всех точках $\mathcal{C}^{(n-1)}$, то отсюда, в частности, следует, что гиперболические координаты $\mathcal{H}^{(n)}$ определены в окрестностях этих точек.

2.7.1. Уточнение множества критических точек порядка $n-1$. Поскольку $\mathcal{H}^{(n)}$, вообще говоря, не совпадает с $\mathcal{H}^{(n-1)}$, то критические точки $z^{(n-1)}$ уже не являются касательными к новым устойчивым слоениям $\mathcal{E}^{(n)}$. Вместо этого, новые слоения определяют новые точки касания с новыми устойчивыми слоями $\mathcal{E}^{(n)}$, близкими к старым слоям. По определению эти точки касания принадлежат новому множеству $\mathcal{C}^{(n)}$ критических точек порядка n . Согласно оценкам сходимости гиперболических координат, см., например, (3), “расстояние” между слоями $\mathcal{E}^{(n-1)}$ и слоями $\mathcal{E}^{(n)}$ имеет порядок b^{n-1} , и поэтому расстояние между новыми точками касания, т.е. новыми критическими точками, и старыми критическими точками тоже имеет порядок b^{n-1} , который чрезвычайно мал. Тогда легко видеть, что расстояние между итерациями $z_j^{(n-1)}$ и $z_j^{(n)}$ продолжает быть по существу пренебрежимо малым для всех $j \leq n$. В частности, выполняется гнездовое свойство связанных окрестностей, и новая точка $z^{(n)}$ наследует все свойства своего предшественника $z^{(n-1)}$ – такие, как ограниченная рекуррентность, экспоненциальный рост и ограниченное искажение.

2.7.2. Добавление действительно новых критических точек. Заметим, что могут быть и другие допустимые куски неустойчивого многообразия $W^u(P)$, которые либо слишком малы, либо не находятся на правом сечении $W^u(P)$ и поэтому не допускают наличия критических точек порядка $(n-1)$ (напомним свойство раздела 2.4.3), но в принципе могут допускать критические точки порядка n . Мы добавляем эти точки к новому критическому множеству $\mathcal{C}^{(n)}$ до тех пор, пока они достаточно близки к $\mathcal{C}^{(n-1)}$, так что, в частности, выполняется гнездовое свойство связанных окрестностей. Это завершает определение $\mathcal{C}^{(n)}$ и набросок доказательства теоремы 1.

2.8. Мощность критического множества. Перед тем как приступить к обсуждению зависимости от параметра определенных выше объектов, мы сделаем два важных замечания, касающихся определения множеств $\mathcal{C}^{(n)}$.

2.8.1. Почему нам нужно много критических точек. Напомним, что общая цель нашего рассуждения состоит в том, чтобы доказать существование многих значений параметра, для которых выполняются некоторые условия (неравномерной) гиперболичности. Как первый шаг в этом направлении, полезно начать с относительно скромной цели – показать, что неустойчивое многообразие $W^u(p)$ не содержится в области притяжения притягивающей периодической орбиты, что является необходимым (хотя и не достаточным) условием гиперболичности. Чтобы доказать это утверждение, достаточно показать, что почти все точки $z \in W^u(P)$ удовлетворяют условию экспоненциального роста $(EG)_n$ для всех $n \geq 1$. Доказательство этого факта требует контроля за возвращениями в Δ , и приведенное здесь рассуждение зависит от достижения этого контроля с помощью данного выше описания множества *критических точек*, существенное свойство которых в том, что критическая точка в касательном положении может всегда быть найдена в любом свободном возвращении до тех пор, пока выполняется условие ограниченной рекуррентности. Эта критическая точка может быть тогда использована, чтобы обеспечить рассуждение о затенении (связи) и показать, что условие экспоненциального роста может быть сохранено при переходе в Δ . Так как возвращения могут происходить на разных “высотах”, то каса-

тельное положение может быть гарантировано, только если есть *достаточно много* критических точек.

2.8.2. Почему нужно не очень много критических точек. Выбор критического множества, содержащего много точек, становится трудным в связи с нашей стратегией определения хорошего параметра в терминах некоторых условий возвращаемости на множество таких точек. Чем больше критических точек, тем более вероятно, что хоть одна из точек не будет удовлетворять этому условию, что приведет к необходимости исключить по крайней мере некоторое специальное значение параметра. Поэтому ключевую роль играет уверенность, что критических точек *относительно мало*, так что, накладывая условие рекуррентности на их орбиты, мы контролируем всю динамику, в том смысле, что можно доказать гиперболичность. В конечном счете, по крайней мере на нынешнем этапе развития теории, это требует сильных ограничений (малости) размера возмущения b .

2.8.3. Разумный компромисс. Основное ограничение числа критических точек данного порядка k возникает из-за требования, что они принадлежат поколениям $g \leq \theta k$ и что есть некоторое пространство вокруг них, в котором нет других критических точек, см. раздел 2.4.3. Из этих свойств непосредственно вытекает следующая важная граница для полного числа критических точек порядка k :

$$\#\mathcal{C}^{(k)} \leq \frac{|\Phi^{\theta k}(W)|}{2\rho^{\theta k}} \leq (5/\rho)^{\theta k}. \quad (6)$$

Постоянная 5 является верхней границей нормы производной.

В рассуждении об исключении значений параметра мы увидим, что эта граница достаточна, чтобы обеспечить исключение не слишком большого числа значений параметра. С другой стороны, причина, по которой мы можем позволить себе использование только критических точек с вышеприведенными свойствами, связана с особенностями построения в разделах 2.5.1 и 2.5.2: как мы видели, связывающая критическая точка в касательном положении может всегда быть найдена среди критических точек поколений $g \leq \theta k$, лежащих на допустимых неустойчивых сегментах радиусов $\rho^g \geq \rho^{\theta k}$.

3. Положительная мера в пространстве параметров

Мы теперь объясним, почему множество значений параметра a , для которых предыдущее построение работает, имеет положительную лебегову меру. Предполагается, что b достаточно мало и a меняется в интервале Ω , близком к $a = 2$ и не слишком малом.

ТЕОРЕМА 2. *Существует такое множество $\Gamma^* \subset \Omega$, что*

- (1) *лебегова мера $|\Gamma^*|$ положительна;*
- (2) *для всех $a \in \Gamma^*$ критическое множество $\mathcal{C}$ определено и удовлетворяет $(*)_n$ для всех $n \geq 0$.⁵*

Точное условие выбора интервала Ω дается в терминах предельного одномерного отображения $\phi_a(x) = 1 - ax^2$. Во-первых, итерации c_n критической точки остаются

⁵ $\mathcal{C}$ определено в разделе 2.4.8. – Прим. ред.

вне критической области Δ в течение первых N итераций для некоторого большого N . Во-вторых, $c_N(a) = \phi_a^{N+1}(c)$ описывает интервал длины $> \delta/10$ монотонным образом, когда a меняется в Ω . Это последнее требование гарантирует, что N находится в *ситуации выхода* (мы напомним это понятие через некоторое время). С помощью простого возмущения эти свойства распространяются на двумерные отображения типа Эно Φ_a , если b достаточно мало.

Доказательство зависит от построения гнездовой последовательности таких множеств $\Gamma^{(n)}$, что каждое значение параметра в $\Gamma^{(n)}$ имеет критическое множество $\mathcal{C}^{(n)}$, удовлетворяющее $(*)_{n-1}$. Тогда множество Γ^* есть просто пересечение всех $\Gamma^{(n)}$. Основная оценка связана с вероятностью исключения в каждый момент времени n , т.е. лебеговой мерой множества $\Gamma^{(n-1)} \setminus \Gamma^{(n)}$. Мы начинаем здесь с наброска построения множеств $\Gamma^{(n)}$ в одномерном случае и обсудим основные проблемы, связанные с обобщением построения в двумерной постановке.

3.1. Одномерный случай. Для данной критической точки $z = c = 0$ и целого $k \geq 0$ мы определяем отображение

$$z_k: \Omega \rightarrow Q, \quad z_k(a) = \phi_a^{k+1}(z(a)), \quad (7)$$

из пространства параметров в фазовое пространство, связывая k -ю итерацию критической точки $z_0(a) = \phi_a(z)$ с каждым значением параметра $a \in \Omega$. Как только $z_k(\Omega)$ пересекает критическую окрестность Δ , мы подразделяем эту окрестность на подынтервалы, рассматривая прообразы некоторого разбиения $\mathcal{I}$ множества Δ . Грубо говоря, разбиение состоит из интервалов, ограниченных последовательностью $\pm e^{-r}$ при $r \geq |\log \delta|$ (по соображениям, связанным с искажением, эти интервалы нужно дополнительно несколько подразбить). Затем мы исключаем подынтервалы значений параметра, в которых условие $(*)$ не выполняется в момент времени k .

Таким образом, мы получаем последовательность хороших множеств значений параметра $\Gamma^{(n-1)} \subset \dots \subset \Gamma^{(0)} = \Omega$ и соответствующие разбиения $\mathcal{P}^{(n-1)}, \dots, \mathcal{P}^{(0)}$, для которых все параметры в любом данном $\gamma \in \mathcal{P}^{(k)}$ имеют по существу неразличимые маршруты (в частности, в отношении критической рекуррентности) и по существу эквивалентные оценки производной вплоть до момента времени $k+1$ (в частности, ограничение z_k на элементы из $\mathcal{P}^{(k)}$ является диффеоморфизмом на свой образ).

На каждом шаге мы подразбиваем $\mathcal{P}^{(k)}$ до разбиения $\hat{\mathcal{P}}^{(k)}$ множества $\Gamma^{(k)}$, беря прообразы пересечений элементов $\mathcal{P}^{(k)}$ при отображении z_{k+1} с $\mathcal{I}$. Мы затем исключаем элементы $\hat{\mathcal{P}}^{(k)}$, для которых условие рекуррентности не выполняется, и определяем $\Gamma^{(k+1)}$ как объединение оставшихся элементов, а $\mathcal{P}^{(k+1)}$ как ограничение $\hat{\mathcal{P}}^{(k)}$ на $\Gamma^{(k+1)}$. Рассуждение, аналогичное рассуждению о больших отклонениях, показывает, что мера исключенного множества убывает с ростом k экспоненциально быстро,

$$|\Gamma^{(k)} \setminus \Gamma^{(k+1)}| \leq e^{-\tau_0 k} |\Omega| \quad \text{для всех } k \geq N,$$

где $\tau_0 > 0$ не зависит от N . Беря N достаточно большим (никаких исключаемых значений параметра значений внутри Ω перед моментом времени N не нужно), получаем отсюда, что после всех исключаемых значений параметра остается множество положительной меры. Мы не приводим здесь подробностей, потому что это – частный случай рассуждения в двумерном контексте, который обсуждается несколько более подробно ниже.

3.2. Двумерные проблемы. Мы обсуждаем здесь существенные различия между одномерной и двумерной ситуацией и основные трудности в обобщении описанной выше схемы на двумерный случай.

3.2.1. Много критических точек. Наиболее очевидное отличие состоит в том, что в двумерной ситуации есть много критических точек порядка n на каждом шаге n и *все* эти критические точки должны удовлетворять условию $(*)_n$. Таким образом, необходимо намного больше исключений значений параметра. Однако мы видели в (6), что мощность множества $\mathcal{C}^{(n)}$ растет вместе с n не быстрее чем экспоненциально и степень экспоненциального роста можно сделать как угодно малой, уменьшая b . Это – ключ к тому, чтобы гарантировать, что полная доля параметра, исключенная в момент времени n , продолжает быть экспоненциально малой относительно n : мера множества значений параметра, исключенных при наложении условия рекуррентности в каждой отдельной критической точке, убывает экспоненциально быстро с ростом n со степенью убывания τ_0 , что по существу то же, что и в размерности один, и потому не зависит от b . В разделе 3.3.1 мы сделаем эти объяснения более количественными.

3.2.2. Взаимодействие между различными критическими точками. Вторая важная проблема в том, что одномерное рассуждение зависит от отслеживания комбинаторных и аналитических данных, связанных с историей критической орбиты для различных значений параметра. Здесь мы можем делать в основном то же самое, но каждая из критических орбит имеет свой собственный набор связанных с ней данных, поскольку динамическая история и картина возвращения в критическую окрестность меняется от одной критической орбиты к другой. По этой причине будет удобно ввести расширенное пространство параметров, с отдельными комбинаторными структурами (разбиениями, маршрутами), относящимися к каждой критической точке. Когда мы пытаемся рассматривать эти структуры как по существу независимые, это не вполне точно, потому что разные критические орбиты действительно взаимодействуют друг с другом. А именно, критическая точка z может нуждаться в другой точке ζ как в связывающей точке, ассоциированной с некоторым свободным возвращением. Тогда если параметр удален потому, что ζ не удовлетворяет условию $(*)_n$ для этого значения параметра, то это удаление должно быть как-то зарегистрировано в комбинаторной структуре других критических точек z . В разделе 3.3.3 мы объясним, как с этим справиться.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Ни одно из этих двух соображений не связано на самом деле с размерностью: кратность критических точек и трудности, связанные с взаимодействием между их орбитами, возникают уже для *много*-модальных отображений в размерности 1. Действительно, в [31] эти трудности изучены в экстремальном случае *бесконечно*-модальных отображений интервала (т.е. с бесконечно многими критическими точками), путем применения той же стратегии определения различных, но не вполне независимых комбинаторных ситуаций и правил исключения в каждой критической точке, которую мы только что кратко описали и несколько детализируем в дальнейшем.

3.2.3. Продолжение критических точек. Другая фундаментальная трудность, на этот раз внутренним образом двумерная, – это задача обсуждения данной критической точки для различных значений параметра, что неявно участвовало в обсуждении двух предыдущих вопросов. Не вполне ясно, как это делать, потому что

критические точки определены динамически: это определение требует выполнения некоторых свойств гиперболичности, и точное положение точки зависит от геометрических и динамических свойств отображения для специальных значений параметра, которые очень неустойчивы при замене параметра. Мы используем тот факт, что критические точки конечного порядка действительно допускают *критическое продолжение* в окрестность в пространстве параметров: условие квадратичного касания, определяющее такие точки, имеет единственное гладкое решение в этой окрестности. В действительности, мы вводим здесь дополнительное предположение о касании порядка k , которое должно выполняться на критическом множестве $\mathcal{C}_a^{(k)}$, чтобы оно имело подходящее продолжение в пространство параметров.

Чтобы лучше понять ситуацию, предположим, например, что критическая точка порядка k допускает критическое продолжение на параметрический интервал ω . Предположим, однако, что существует такой подинтервал $\tilde{\omega} \subset \omega$, что множество $\omega \setminus \tilde{\omega}$ имеет две связные компоненты и что требуемое условие ограниченной рекуррентности $(*)_k$ не выполняется в критической точке при $a \in \tilde{\omega}$. Тогда критическая точка не может быть уточнена до приближения порядка $k + 1$ для критических точек в $\tilde{\omega}$, хотя она может быть уточнена в двух компонентах множества $a \in \omega \setminus \tilde{\omega}$. Мы должны задать вопрос, можно ли все еще рассматривать эти уточнения как продолжения друг друга, т.е. можем ли мы все еще говорить об одной критической точке с критическим продолжением на (несвязное) множество $\omega \setminus \tilde{\omega}$, или мы должны думать о двух независимых критических точках, определенных в двух различных параметрических интервалах. Подробнее о том, как эти проблемы решаются и как нам удастся соотносить критические точки, существующие для различных значений параметра, см. в разделах 3.3.1 и 4.2.

3.3. Обзор рассуждения. Мы будем рассматривать все эти проблемы формально, определяя *расширенное пространство параметров*, куда каждая критическая точка (конечного порядка) входит со своим собственным интервалом значений параметра, на который она допускает продолжение как критическая точка, и притом со своими собственными комбинаторными и аналитическими данными. В оставшейся части раздела мы опишем структуру этого расширенного пространства параметров на каждой итерации k и приведем схему основного вычисления, доказывающего, что $\Gamma^* = \bigcap_k \Gamma^{(k)}$ имеет положительную лебегову меру.

Рис. 3. Расширенное пространство параметров

3.3.1. Расширенное пространство параметров. Пространство параметров в момент времени k состоит из дизъюнктного объединения копий $\Omega_{[z]}$ (не обязательно

но непересекающихся) подынтервалов Ω , как указано на рис. 3. Каждый из этих интервалов входит с критической точкой $z^{(k)}(a)$ порядка k , определенной на некотором подмножестве $\Gamma_{[z]}^{(k)}$ в $\Omega_{[z]}$. Символ $[z]$ параметризует множество этих сегментов $\Omega_{[z]}$ и может рассматриваться как “класс эквивалентности” критической точки в том смысле, что существуют некоторое $\nu \leq k$ и критическая точка $z^{(\nu)}(a)$, допускающая продолжение в виде касания порядка ν над всем $\Omega_{[z]}$ и являющаяся предшественником $z^{(k)}(a)$, если только эта последняя точка определена. По этой причине имеет смысл рассматривать $z^{(k)}(a)$ как “ту же самую критическую точку” для разных значений параметра в его области определения. Кроме того, $z^{(\nu)}$ имеет *ситуацию выхода* в момент времени ν : образ

$$\Omega_{[z]} \ni a \mapsto z_{\nu}^{(\nu)}(a)$$

является допустимой кривой длины $\geq \delta/10$. Это в точности соответствует требованию, в одномерной постановке, что первоначальный параметрический интервал не должен быть слишком малым.

Множество $\Gamma_{[z]}^{(k)}$ является конечным объединением подынтервалов $\Omega_{[z]}$ и является подмножеством значений параметра в $\Omega_{[z]}$, для которых соответствующая критическая точка $z^{(k)}(a)$ удовлетворяет условию рекуррентности вплоть до момента времени k . При этом она входит с комбинаторной структурой в виде конечного разбиения $\mathcal{P}_{[z]}^{(k)}$ на подынтервалы, определенные так, чтобы все критические точки $z^{(k)}(a)$ с a , принадлежащим какому-либо одному элементу этого разбиения, имели одну и ту же историю, т.е. по существу те же оценки аналитического характера, гиперболичности, искажения и рекуррентности вплоть до времени $k - 1$.

3.3.2. Рассуждение об исключении значений параметра. Для любого $[z]$ мы исключаем некоторое множество значений параметра $E_{[z]}^{(k)} \subset \Omega_{[z]}$, чтобы усилить условие $(*)_k$. Эти индивидуальные исключения оцениваются во многом так же, как и в размерности 1, а подробности будут приведены в следующих разделах. Сейчас мы только отметим, что мы начнем с определения более тонкого разбиения $\hat{P}_{[z]}^{(k)} \succ \mathcal{P}_{[z]}^{(k)}$ параметрического множества $\Gamma_{[z]}^{(k)}$ в зависимости от положения критической точки $z_k^{(k)}(a)$ при каждом значении параметра $a \in \Gamma_{[z]}^{(k)}$. Затем мы решаем, какие значения параметра нужно исключить на основании этой дополнительной комбинаторной информации. Мы всегда исключаем целые элементы этого измельченного разбиения, а не просто индивидуальные значения параметра, даже если это может означать исключение несколько большего числа значений параметра, чем это нужно на самом деле. Это важно, поскольку это гарантирует, что оставшееся множество

$$\Gamma_{[z]}^{(k+1)} = \Gamma_{[z]}^{(k)} \setminus E_{[z]}^{(k)}$$

значений параметра, которые хороши для $[z]$ вплоть до момента времени k , наследует комбинаторную структуру, семейство атомов измельченного разбиения, которые не исключены, а это — относительно большие интервалы. Действительно, наши оценки исключения значений существенно зависят от нижних границ размеров интервалов значений параметра (малые интервалы могут быть даже полностью удалены за одно

данное возвращение!), и удаление индивидуальных значений параметра может привести к созданию таких малых связанных компонент в пространстве параметров. В разделе 5.5 мы получаем

$$|E_{[z]}^{(k)}| \leq e^{-\tau_0 k} |\Omega_{[z]}| \quad (8)$$

с $\tau_0 > 0$, не зависящим от b и N . По определению новое множество хороших значений параметра имеет вид

$$\Gamma^{(k+1)} = \Gamma^{(k)} \setminus \bigcup_{[z]} E_{[z]}^{(k)}. \quad (9)$$

Это значит, что мы считаем значение параметра хорошим в любой данный момент времени $k+1$, только если оно является хорошим для всех критических точек вплоть до этого момента времени. Заметим также, что нет разбиений, связанных с Γ^k или $\Gamma^{(k+1)}$; это как раз “сырые” множества значений параметра.

Чтобы оценить полный размер исключения значений, заметим, что если значение параметра a принадлежит интервалам $\Omega_{[z]}$ и $\Omega_{[w]}$, то, по определению критической точки, соответствующие предшествующие точки $z^{(\nu)}(a)$ и $w^{(\mu)}(a)$ удалены одна от другой не меньше чем на $2\rho^{\theta k}$ по отношению к внутренней метрике неустойчивого многообразия $W^{(u)}(p)$. Поскольку эти точки должны содержаться в компактной части $W^{(u)}(p)$ длины $\leq 2 \times 5^{\theta k}$ (так как мы начали со слоя длины ≤ 2 и итерировали это не более чем θk раз с максимальным расширением с множителем 5 на каждой итерации), то вычисление, совпадающее с проведенным для (6), дает следующую границу для размера этого семейства интервалов (см. раздел 4.3.5):

$$\#\{[z] \in \mathcal{C}^{(k)} : a \in \Omega_{[z]}\} \leq (5/\rho)^{\theta k} \text{ для любого } a \in \Omega. \quad (10)$$

Таким образом, полные исключения на этом шаге итерации удовлетворяют условию

$$\left| \bigcup_{[z]} E_{[z]}^{(k)} \right| \leq \sum_{[z]} |E_{[z]}^{(k)}| \leq e^{-\tau_0 k} \sum_{[z]} |\Omega_{[z]}| \leq e^{-\tau_0 k} (5/\rho)^{\theta k} |\Omega|, \quad (11)$$

согласно (8) и (10). Предполагая, что b мало, видим, что величина в правой части не больше $e^{-(\tau_0/2)k} |\Omega|$ и

$$|\Omega \setminus \Gamma^*| = \left| \bigcup_{k=N}^{\infty} \bigcup_{[z]} E_{[z]}^{(k)} \right| \leq \sum_{k=N}^{\infty} e^{-(\tau_0/2)k} |\Omega| < |\Omega|, \quad (12)$$

где Γ^* – пересечение всех $\Gamma^{(k)}$. Последнее неравенство предполагает, что N выбрано достаточно большим, и из него следует, что $|\Gamma^*| > 0$.

3.3.3. Взаимодействие между разными критическими орбитами. Заметим, что каждый индивидуальный параметрический интервал $\Gamma_{[z]}^{(k+1)}$ обычно содержит некоторые значения параметра, которые не принадлежат $\Gamma^{(k+1)}$: на каждом шаге могут существовать (глобально) плохие значения параметра, которые, тем не менее, хороши для *некоторых* критических точек, по крайней мере вплоть до этого шага. Это неизбежно, поскольку мы всегда исключаем целые разбиения интервалов, как

объяснено выше, и различные критические точки имеют различные разбиения. Однако небольшое размышление показывает, что это также и самое естественное, что может произойти.

Чтобы объяснить, почему, рассмотрим любое значение параметра $\bar{a}$, для которого есть гомоклиническая точка z , связанная с неподвижной точкой P (эти значения параметра образуют множество нулевой меры, и мы занимаемся этой ситуацией, поскольку она проливает свет на общий случай). Будущая орбита z сходится к P и поэтому никогда не уходит в критическую область. Условие рекуррентности выполнено автоматически, а гиперболическое свойство на гомоклинической орбите легко следует из предложения 2: нет необходимости в связывающем рассуждении, и т. д. Точка z – истинная критическая точка (точка касания между истинными устойчивым и неустойчивым многообразиями), и, с этой точки зрения, параметр $\bar{a}$ совершенно хорош, *несмотря на то, что $\bar{a}$ может быть плохим значением параметра для некоторой другой критической точки (в этом случае точка исключается из Γ^*) и отображение может даже иметь периодические аттракторы*: эта критическая точка никогда этого не узнает!

Сказав это, напомним, что, вообще говоря, различные критические орбиты действительно взаимодействуют друг с другом. В терминах нашего индуктивного построения это взаимодействие материализуется, когда критическая точка $[w] = w^{(k)}$ используется как связывающая, ассоциированная с некоторым свободным возвращением k другой критической точки $[z] = z^{(k)}$ (это событие не происходит в специальной ситуации, обсуждавшейся выше): значения параметра, исключенные потому, что $[w]$ не удовлетворяла условию $(*)_j$ на некоторой итерации $j \leq k$, должны быть также исключены из пространства параметров точки $[z]$. Мы действительно исключаем дополнительное множество элементов разбиения γ в $\hat{P}_{[z]}^{(k)}$, но только те элементы, которые уже *полностью удалены* в связи с исключениями значений параметра, связанными с другими критическими точками, т. е. такие, что $\gamma \cap \Gamma^{(k)} = \emptyset$. Это означает, что на самом деле мы исключаем несколько большее множество

$$\hat{E}_{[z]}^{(k)} \supset E_{[z]}^{(k)}$$

из параметрического интервала для $[z]$ к моменту времени k и полагаем

$$\Gamma_{[z]}^{(k+1)} = \Gamma_{[z]}^{(k)} \setminus \hat{E}_{[z]}^{(k)} \subset \Gamma_{[z]}^{(k)} \setminus E_{[z]}^{(k)}.$$

Простое, но важное наблюдение состоит в том, что эти исключения *не* влияют на проведенные ранее вычисления: по определению, любое значение параметра в разности множеств принадлежит $E_{[w]}^{(j)}$ для некоторого $[w]$ и некоторого $j \leq k$, и поэтому

$$\Gamma^{(k)} \setminus \bigcup_{[z]} \hat{E}_{[z]}^{(k)} = \Gamma^{(k)} \setminus \bigcup_{[z]} E_{[z]}^{(k)}. \quad (13)$$

Другими словами, соотношения (9) и (12) вообще не меняются!

Успех этой стратегии основан также на важном наблюдении, что *нам не нужно исключать элемент $\gamma \in \mathcal{P}_{[z]}^{(k)}$ до тех пор, пока хотя бы одно значение параметра $a \in \gamma$ принадлежит $\Gamma^{(k)}$* . Этот факт объясняется подробнее в разделе 4.2.5 и по существу связан с тем, что, пока есть хоть одно значение параметра $\tilde{a} \in \gamma \cap \Gamma^{(k)}$, работает рассуждение о захвате, и существует связывающая критическая точка $\zeta(\tilde{a})$ в касательном положении, если k является свободным возвращением для γ .

4. Комбинаторная структура

Мы переходим к детализации построения, кратко описанного в предыдущем разделе. Начнем с того, что дадим явные определения расширенного пространства параметров и множества хороших значений параметра для малых значений k .

4.1. Первый шаг индукции. Гиперболическая неподвижная точка P имеет продолжение $P(a)$ для всех $a \in \Omega$, и мы можем также рассмотреть продолжение $W(a)$ компактного интервала $W \subset W^u(P)$, введенного в разделе 2.4. Заметим, что $P(a)$ и $W(a)$ гладко зависят от параметра. Для данного k , $1 \leq k \leq N$, сжимающие направления $e^{(k)}$ порядка k определены в каждой точке $W_0(a) = \Phi_a(W(a) \cap \Delta)$ и существует единственная точка $z^{(k)}(a) \in W(a)$, в которой k -е сжимающее направление касательно к $W_0(a)$ в критическом значении $z_0^{(k)}(a) = \Phi_a(z^{(k)}(a))$. При $1 \leq k \leq N$ положим $\Gamma^{(k)} = \Omega$. Пусть для любого $a \in \Gamma^{(k)}$ критическое множество $\mathcal{C}_a^{(k)}$ состоит в точности из этой критической точки $z^{(k)}(a)$. Это определяет критическое множество $\mathcal{C}_a^{(k)}$ для всех $a \in \Omega$. Расширенное пространство параметров сводится к одному интервалу $\Omega_{[z]} = \Omega$.

4.2. Свойства параметризованных критических точек. Фиксируем $n \geq N$ и предположим индуктивно, что для всех k , $1 \leq k \leq n$, мы уже построили

- семейство интервалов $\{\Omega_{[z]} : [z]\}$, каждый из которых снабжен ассоциированной критической точкой $[z] = z^{(k)}$, определенной на множестве хороших значений параметра $\Gamma_{[z]}^{(k)} \subset \Omega_{[z]}$: эти критические точки удовлетворяют условиям $(*)_{k-1}$ и $(EG)_k$ для всех $a \in \Gamma_{[z]}^{(k)}$;
- множество $\Gamma^{(k)}$ значений параметра, хороших для всех критических точек: $\Gamma^{(k)} \cap \Omega_{[z]}$ содержится в $\Gamma_{[z]}^{(k)}$ для всех $[z]$.

Начиная отсюда, обозначим через $\mathcal{C}^{(k)}$ множество точек $[z]$, параметризующих введенное выше семейство интервалов, и мы рассматриваем $\mathcal{C}^{(k)}$ как множество всех критических точек порядка k . Чтобы избежать путаницы с обозначениями, используемыми в дальнейшем, заметим, что точки из $\mathcal{C}^{(k)}$ корректно определены, поскольку они удовлетворяют условию $(EG)_k$, но предполагается, что они удовлетворяют условию $(*)_{k-1}$ (а не $(*)_k$). Расширенное пространство параметров есть дизъюнктное объединение интервалов

$$\Omega_*^{(k)} = \coprod_{[z] \in \mathcal{C}^{(k)}} \Omega_{[z]}.$$

Эти объекты имеют следующие дополнительные свойства.

4.2.1. Глобально определенный предшественник. Существует критическая точка $z^{(\nu)}(a)$ некоторого порядка $\nu \leq k$, определенная на всем $\Omega_{[z]}$, которая является предшественником $z^{(k)}(a)$, если последний объект определен. Кроме того, ν есть ситуация выхода для $z^{(\nu)}$, так что образ $\Omega_{[z]}$ под действием $a \mapsto z_\nu^{(\nu)}(a)$ есть допустимая кривая длины $\geq \delta/10$.

4.2.2. Положение и единственность. Любая $z^{(\nu)}(a)$ является средней точкой допустимой кривой ω_a радиуса $\rho^{\theta\nu}$ внутри $\Phi_a^{\theta\nu}(W(a))$ при $a \in \Omega_{[z]}$. Критическое значение $z_0^{(\nu)}(a) = \Phi_a(z^{(\nu)}(a))$ есть точка квадратичного касания между $\Phi_a(\omega_a)$ и

устойчивым слоением порядка ν в граничной окрестности точки $z_0^{(\nu)}(a)$. Кроме того, $z^{(\nu)}(a)$ – единственный элемент множества $\mathcal{C}_a^{(\nu)}$ в ω_a .

4.2.3. Информация о маршрутах. Каждый элемент $[z] \in \mathcal{C}^{(k)}$ имеет последовательные множества хороших значений параметра $\Gamma_{[z]}^{(k)} \subset \dots \subset \Gamma_{[z]}^{(\nu)} = \Omega_{[z]}$ и соответствующие разбиения $\mathcal{P}_{[z]}^{(k)}, \dots, \mathcal{P}_{[z]}^{(\nu)}$. Они определены по существу так же, как и в размерности один, как мы объясним через некоторое время. Пусть $\mathcal{P}_*^{(k)}$ обозначает соответствующее индуцированное разбиение $\Omega_*^{(k)}$: с каждой $\gamma \in \mathcal{P}_*^{(k)}$ неявно ассоциирована критическая точка $[z] \in \mathcal{C}^{(k)}$ с $\gamma \in \mathcal{P}_{[z]}^{(k)}$. Мы всегда предполагаем, что γ пересекает $\Gamma^{(k)}$ в по крайней мере одной точке. Иначе мы немедленно удаляем γ : очевидно, это не влияет никаким образом на оценки меры. Каждая $\gamma \in \mathcal{P}_*^{(k)}$ имеет ассоциированную комбинаторную информацию, которую мы называем *маршрутной* информацией для γ . Она состоит из

– последовательности *времен выхода*

$$\nu = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_s < k, \quad s = s(\gamma) \geq 0;$$

– между любыми двумя временами выхода η_{i-1} и η_i (и между η_s и k) – последовательности *существенных возвращений*

$$\eta_{i-1} < \nu_1 < \dots < \nu_t < \eta_i, \quad t = t(\gamma, i) \geq 0;$$

– между любыми двумя существенными возвращениями ν_{j-1} и ν_j (и между ν_t и η_i) – последовательности *несущественных возвращений*

$$\nu_{j-1} < \mu_1 < \dots < \mu_u < \nu_j, \quad u = u(\gamma, i, j) \geq 0.$$

Любая из этих последовательностей может быть пустой, кроме первой, поскольку построение гарантирует, что ν всегда является временем выхода. Любая итерация j после времени выхода и перед последующим возвращением, включая само время выхода, называется *ситуацией выхода*. Соответствующая кривая-образ $\gamma_j = \{z_j^{(k)}(a) : a \in \gamma\}$ – допустимая и длинная. Времена выхода и времена существенных и несущественных возвращений являются *свободными возвращениями*. Любые возвращения в Δ , возникающие в течение связывающих периодов, ассоциированных с предыдущим возвращением, называются *связанными возвращениями*. Можно выбрать связывающие периоды для всех возвращений постоянными на интервале γ .

Каждому свободному возвращению ν можно сопоставить положительное целое число $|r|$, которое мы называем *глубиной возвращения*. Это соответствует положению γ_ν по отношению к разбиению $\mathcal{I}^\zeta = \{I_{r,m}^\zeta\}$, как мы увидим при выполнении индуктивного шага в разделе 4.3. По договоренности, глубина возвращения равна нулю во временах выхода. Пусть

$$\mathcal{R}_{[z]}^{(k-1)} : \Omega_{[z]} \rightarrow \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \mathcal{E}_{[z]}^{(k-1)} : \Omega_{[z]} \rightarrow \mathbb{N}$$

– функции, сопоставляющие каждому $a \in \gamma$ сумму всех свободных (существенных и несущественных) глубин возвращения и сумму существенных глубин возвращения,

соответственно, в обоих случаях для возвращений $\nu \leq k-1$. Эти функции постоянны на элементах разбиения, и поэтому они естественно индуцируют функции

$$\mathcal{R}^{(k-1)}: \mathcal{P}_*^{(k)} \rightarrow \mathbb{N} \text{ и } \mathcal{E}^{(k-1)}: \mathcal{P}_*^{(k)} \rightarrow \mathbb{N}.$$

4.2.4. Производные по фазе и параметру. Для любого $\gamma \in \mathcal{P}_*^{(k)}$ и ассоциированной критической точки скорость $D_a z_k^{(k)}(a)$ кривой $\gamma \ni a \mapsto z_k^{(k)}(a)$ равномерно сравнима, по аргументу и по величине, с образом вектора $f^{(k)}(z_0^{(k)}(a))$, наиболее растягивающегося под действием дифференциала $D\Phi_a^k(z_0^{(k)}(a))$. Используя также ограниченное искажение в фазовом пространстве $(\text{BD})_k$, мы получаем такую равномерную постоянную $D > 0$, что для любой свободной итерации k кривая

$$\gamma_k = \{z_k^{(k)}(a) : a \in \gamma\} = \{\Phi_a^{k+1}(z^{(k)}(a)) : a \in \gamma\}$$

допустима и удовлетворяет условию

$$\frac{1}{D} \frac{|\tilde{\gamma}_k|}{|\gamma_k|} \leq \frac{|\tilde{\gamma}|}{|\gamma|} \leq D \frac{|\tilde{\gamma}_k|}{|\gamma_k|} \quad (14)$$

для любого подынтервала $\tilde{\gamma} \subset \gamma$. См. [6; леммы 8.1 и 8.4] и [29; леммы 11.3, 11.5 и 11.6] по поводу доказательств этих свойств. Важная составная часть (ср. с [29; лемма 11.2] или [43; лемма 9.2]) – доказательство того, что критическая точка медленно меняется при изменении параметра a :

$$\|D_a z^{(k)}(a)\| \leq b^{1/20} \ll 1.$$

В частности, так как γ связна, то

$$|z^{(k)}(a) - z^{(k)}(\tilde{a})| \leq b^{1/20} |a - \tilde{a}| \quad (15)$$

для всех a и $\tilde{a}$, принадлежащих одному и тому же элементу $\gamma \in \mathcal{P}_{[z]}^{(k)}$.

4.2.5. Существование связывающей точки. Для любого такого $\gamma \in \mathcal{P}_*^{(k)}$, что k – свободное возвращение, существуют $\tilde{a} \in \gamma \cap \Gamma^{(k)}$ и $\zeta^{(k)} \in \mathcal{C}_{\tilde{a}}^{(k)}$ – подходящая связывающая точка для всех $z_k^{(k)}(a)$, где $a \in \gamma$ удовлетворяет $(*)_k$. Мы называем точку подходящей, если $z_k^{(k)}(a)$ и $\zeta^{(k)}(\tilde{a})$ находятся в касательном положении для всех $a \in \gamma$, удовлетворяющих условию рекуррентности в момент времени k . Это соответствует условию в разделе 2.5.

Заметим, что критическая точка для некоторого *фиксированного* значения параметра $\tilde{a}$ в пересечении $\gamma \cap \Gamma^{(k)}$ используется как связывающая критическая точка для всех $a \in \gamma$, и мы не нуждаемся в том, чтобы продолжение $\zeta(a)$ элемента $\zeta(\tilde{a})$ было хорошим для всех значений параметра в γ . Это полезно при работе с исключениями в разделе 3.3.3: нам нужно только удалить γ , если *все* ее значения параметра уже как-то исключены из множества хороших значений параметра. Причина, по которой это возможно, состоит в том, что интервал γ очень мал, $|\gamma| \leq e^{-\kappa_0 k}$ для некоторой постоянной κ_0 , связанной с κ , и критические точки медленно меняются с изменением параметра, см. (15), в то время как из $(*)_k$ следует, что $|\zeta^{(k)}(\tilde{a}) - z_k^{(k)}(a)| \geq e^{-\alpha k} \gg e^{-\kappa_0 k}$. См. [29; с. 65–66] или второе замечание в [43; § 9] по поводу явной оценки.

Кроме того, если p представляет собою связывающий период, ассоциированный с возвращением ν , то

$$\frac{|\gamma_{\nu+p+1}|}{|\gamma_{\nu}|} \geq e^{\kappa_3 r} \geq e^{\kappa_4 p} \gg 1, \quad (16)$$

где r – глубина возвращения, а постоянные κ_3 и κ_4 зависят только от κ . Действительно, это следует из соответствующего утверждения в фазовом пространстве (5) и свойства в разделе 4.2.4, утверждающего, что производные по фазе и параметру равномерно сравнимы.

4.3. Пространство параметров в момент времени n . Теперь мы объясним, как определяются исключения значений параметра и как “обновляются” пространство параметров и комбинаторная структура. Часть этого описания включает объяснение способа обновления этой структуры для учета “новых” критических точек, см. раздел 2.7.2, а также уточнения “старых” критических точек, см. раздел 2.7.1. Начнем с последних.

По определению, каждый интервал $\Omega_{[z]}$ с $[z] \in \mathcal{C}^{(n)}$ также принадлежит расширенному пространству параметров на следующей итерации $n+1$. Определим уточнение $\hat{P}_{[z]}^{(n)}$ разбиения $\mathcal{P}_{[z]}^{(n)}$, основанное на динамике вплоть до момента времени n , и обновим маршрутную информацию до момента времени n . Основываясь на этой информации, мы решаем исключить некоторые элементы $\hat{P}_{[z]}^{(n)}$ и затем определяем

- множество $\Gamma_{[z]}^{(n+1)}$ как объединение оставшихся элементов и
- разбиение $\mathcal{P}_{[z]}^{(n+1)}$, просто как ограничение $\hat{P}_{[z]}^{(n)}$ на $\Gamma_{[z]}^{(n+1)}$.

Соответствующая функция критической точки $z^{(n)}(a)$ заменяется улучшением $z^{(n+1)}(a)$ порядка $n+1$, определенным на $\Gamma_{[z]}^{(n+1)}$. Приступим к подробному описанию этих шагов.

4.3.1. Критическая окрестность и разбиения. Начнем с определения некоторого разбиения в динамическом пространстве. Не будет ограничением предположение, что $r_\delta = \lfloor \log \delta \rfloor$ – целое число. Для любого целого числа $r \geq r_\delta$ положим

$$I_{\pm r} = \{z = (x, y) \in Q : \pm x \in (e^{-r-1}, e^{-r}]\}.$$

Пусть теперь каждая полоса I_r подразбита в свою очередь на r^2 вертикальных полос $I_{r,m}$ равной ширины. Это определяет разбиение

$$\mathcal{I} = \{I_{r,m} : |r| \geq r_\delta \text{ и } m \in [1, r^2]\}$$

множества Δ (кроме $\{x = 0\}$). Для данного $I_{r,m}$ введем обозначение $\hat{I}_{r,m} = I_{r,m}^\ell \cup I_{r,m} \cup I_{r,m}^\rho$, где $I_{r,m}^\ell$ и $I_{r,m}^\rho$ – левый и правый элементы, примыкающие к $I_{r,m}$. Если $I_{r,m}$ оказывается экстремальным элементом $\mathcal{I}$, то мы просто обозначаем через $I_{r,m}^\ell$ или $I_{r,m}^\rho$ примыкающий интервал длины $\delta/10$. Для данной точки ζ мы определяем аналогичное разбиение $\mathcal{I}^\zeta$ с центром в ζ , просто сдвигая $\mathcal{I}$ горизонтально. Пусть I_r^ζ , $I_{r,m}^\zeta$, $\hat{I}_{r,m}^\zeta$ – соответствующие элементы разбиения.

4.3.2. Процесс разбиения. Пусть $[z] \in \mathcal{C}^{(n)}$ фиксировано. Для любого $\gamma \in \mathcal{P}_{[z]}^{(n)}$ мы различаем два случая. Назовем n неразрубающим временем в одной из следующих ситуаций:

- (а) $\gamma_n \cap \Delta$ пусто или содержится в одном из крайних элементов разбиения $\mathcal{J}^\zeta$;
- (б) n принадлежит связывающему периоду, ассоциированному с некоторым временем возвращения $\nu < n$ для γ .

В обеих ситуациях мы просто полагаем $\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)}$.

Назовем n разрубающим временем в оставшихся случаях, т.е. если n – свободная итерация и γ_n значительно пересекает Δ . В этом случае нам может потребоваться разделить γ_n на подынтервалы, чтобы гарантировать, что продолжают выполняться границы для искажения и другие свойства. Это зависит от положения γ_n по отношению к разбиению $\mathcal{J}^\zeta$ множества Δ с центром в связывающей точке ζ (напомним, что γ_n допустима и поэтому “трансверсальна” разбиению). Действительно, есть две разных ситуации.

Если γ_n пересекает не более двух элементов разбиения, то мы полагаем $\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)}$, т.е. мы не выполняем подразбиения. В этом случае мы говорим, что n – несущественное возвращение, и добавляем этот факт к маршрутной информации, уже ассоциированной с γ . Если γ_n пересекает по крайней мере три элемента разбиения, то мы разбиваем эту часть:

$$\gamma = \gamma^\ell \cup \bigcup_{(r,m)} \gamma^{(r,m)} \cup \gamma^\rho, \quad (17)$$

где (в обозначениях раздела 4.3.1)

- любая кривая $\gamma_n^{(r,m)} = \{z_n^{(n)}(a) : a \in \gamma^{(r,m)}\}$ пересекает $I_{r,m}^\zeta$ и содержится в $\hat{I}_{r,m}^\zeta$;
- γ_n^ℓ и γ_n^ρ либо пусты, либо являются компонентами $\gamma_n \setminus \Delta$ длины $\geq \delta/10$.

Если связные компоненты $\gamma_n \setminus \Delta$ имеют длину $< \delta/10$, то мы просто присоединяем их к примыкающему интервалу вида $\gamma_n^{(r,m)}$.

По определению, получаемые подынтервалы γ являются элементами $\hat{P}_z^{(n)}$. Интервалы γ^ℓ и γ^ρ называют *компонентами выхода* и говорят, что у них есть выход в момент времени n . Про все остальные интервалы говорят, что у них есть существенное возвращение в момент времени n , и соответствующие значения $|r|$ являются соответствующими глубинами существенных возвращений. По договоренности, компоненты выхода имеют нулевую глубину возвращения.

4.3.3. Исключения значений параметра. У нас теперь есть маршрутная информация вплоть до момента времени n и, в частности, глубины возвращения определены, как и функции $\mathcal{R}_{[z]}^{(n)}$ и $\mathcal{E}_{[z]}^{(n)}$, на $\hat{P}_{[z]}^{(n)}$. Фиксируем малую постоянную $\tau > 0$. Пусть

$$E_{[z]}^{(n)} = \bigcup \{\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)} : \mathcal{E}_{[z]}^{(n)}(\gamma) > \tau n\}. \quad (18)$$

Мы утверждаем, что если τ мало по сравнению с α , то все $\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)}$, не лежащие в $E_{[z]}^{(n)}$, удовлетворяют условию рекуррентности $(*)_n$. Отложим доказательство до раздела 4.3.4. Введем

$$\Gamma_{[z]}^{(n+1)} = \Gamma_{[z]}^{(n)} \setminus \left(E_{[z]}^{(n)} \cup \{\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)} : \gamma \cap \Gamma^{(n)} = \emptyset\} \right). \quad (19)$$

Кроме того, определим $\mathcal{P}_{[z]}^{(n+1)}$ как ограничение $\widehat{P}^{(n)}$ на $\Gamma_{[z]}^{(n+1)}$.

Заметим, что мы также удалили из пространства параметров $[z]$ интервалы, которые уже были полностью удалены из-за других критических точек, даже если они могут выглядеть как хорошие значения параметра для точки $[z]$. Это имеет отношение к взаимодействию между различными критическими орбитами, которое обсуждалось в разделе 3.3.3. Еще раз подчеркнем, что эти дополнительные исключения значений не оказывают вообще никакого влияния на новые множества хороших значений параметра для всех критических точек:

$$\Gamma^{(n+1)} = \Gamma^{(n)} \setminus \bigcup_{[z] \in \mathcal{C}^{(n)}} E_{[z]}^{(n)}. \quad (20)$$

Для значений параметра $a \in \Gamma_{[z]}^{(n+1)}$ мы заменяем $z^{(n)}(a)$ его уточнением $z^{(n+1)}(a)$, как обсуждалось в разделах 2.7 и 4.3.5. Это завершает построение в рассматриваемом случае.

4.3.4. Проверка условия рекуррентности. Мы сейчас объясним, почему все $[z] = z^{(n)} \in \mathcal{C}^{(n)}$ удовлетворяют условию $(*)_n$ для всех $a \in \Gamma_{[z]}^{(n+1)}$. Начнем с замечания, что если ν – возвращение для $[z]$, то, по построению, для глубины возвращения имеем $|r_\nu| \approx |\log d(z_\nu)|$. В частности, сумма в $(*)_n$ не превосходит $2\mathcal{R}^{(n)}([z])$. Кроме того, мы утверждаем, что сумма всех глубин свободных возвращений ограничена кратным суммы глубин существенных возвращений: существует такая равномерная постоянная $C > 0$, что

$$\mathcal{R}^{(n)}([z]) \leq C\mathcal{E}^{(n)}([z]). \quad (21)$$

В допущении этого утверждения, имея в виду (18) и (20), мы получаем, что

$$\sum_{\substack{\text{свободные} \\ \text{возвращения} \\ \nu \leq n}} \log \frac{1}{d(z_\nu^{(n)})} \leq 2\mathcal{R}^{(n)}([z]) \leq 2C\mathcal{E}^{(n-1)}([z]) \leq 2C\tau$$

для всех значений параметра $a \in \Gamma_{[z]}^{(n+1)}$. Утверждение получается при выборе $\tau < \alpha/(2C)$.

Мы должны доказать (21). Пусть $\mu_1 < \dots < \mu_s$ – несущественные возвращения в промежутке между последовательными существенными возвращениями $\nu_i < \nu_{i+1}$. Кроме того, пусть r_i – глубина возвращения, ассоциированная с ν_i , и ρ_j – глубина возвращения, ассоциированная с каждым μ_j , $1 \leq j \leq s$. Свойство (16) утверждает, что итерации $|\gamma_j|$ растягиваются на полный связывающий период, ассоциированный с любым свободным возвращением. Из-за гиперболического поведения нашего отображения вне критической области мы знаем, что эти кривые не сжимаются в течение свободных периодов. Отсюда

$$|\gamma_{\nu_{i+1}}| \geq e^{\kappa_3(r_i + \rho_1 + \dots + \rho_s)} |\gamma_{\nu_i}|.$$

Ясно, что $|\gamma_{\nu_{i+1}}| \leq 2$. С другой стороны,

$$|\gamma_{\nu_i}| \geq \text{const } e^{-r_i} r_i^{-2} \geq 2e^{-2r_i},$$

поскольку ν_i – существенное возвращение. Объединяя эти две оценки, находим

$$e^{\kappa_3(r_i + \rho_1 + \dots + \rho_s) - 2r_i} \leq 1 \Rightarrow \rho_1 + \dots + \rho_s \leq (2/\kappa_3)r_i.$$

Складывая эти неравенства для всех существенных возвращений ν_i , получаем

$$\mathcal{R}^{(n)}([z]) \leq C\mathcal{E}^{(n)}([z])$$

с $C = 2/\kappa_3$.

4.3.5. Новые критические точки. Наконец, мы должны включить в построение новые критические точки порядка $n + 1$. Прежде всего мы “обновляем” старые критические точки $[z] = z^{(n)}$, как это описано в разделе 2.7.1. Как легко видеть, эти точки удовлетворяют индуктивным предположениям разделов 4.2.1 и 4.2.2. Затем мы добавляем “действительно новые” критические точки $[\zeta] = \zeta^{(n+1)}$, как это указано в разделе 2.7.2. Чтобы удостовериться, что индуктивные предположения продолжают выполняться в этих точках, мы действуем следующим образом. Для любой критической точки $[z] = z^{(n)}$ порядка n и любой γ в соответствующем разбиении $\mathcal{P}_{[z]}^{(n+1)}$, для которого n находится в ситуации выхода, определенной в предыдущем разделе, мы вводим такие точки $\zeta^{(n+1)}$, что

- $\zeta^{(n+1)}$ определяется как критическое продолжение на все γ ;
- $\zeta^{(n+1)}(a)$ содержится в $\Phi_a^{\theta(n+1)}(W(a)) \setminus \Phi_a^{\theta n}(W(a))$ для всех $a \in \gamma$;
- $z^{(n)}(a)$ – предшественник $\zeta^{(n+1)}(a)$ для всех $a \in \gamma$.

По существу эти $\zeta^{(n+1)}$ являются дополнительными элементами критического множества к моменту времени $(n + 1)$. Однако есть возможность, что две или более критических точек $z^{i,(n)}$, определенных на интервалах γ_i , порождают с помощью этой процедуры критические функции $\zeta^{i,(n+1)}$, которые оказываются совпадающими при некотором значении параметра:

$$\zeta^{i,(n+1)}(a) = \zeta^{j,(n+1)}(a) \quad \text{для некоторых (и потому для всех) } a \in \gamma_i \cap \gamma_j. \quad (22)$$

Если бы мы рассматривали все эти $\zeta^{i,(n+1)}(a)$ как различные критические точки, то рассуждение о подсчете, которое доказывает (10) и приведено в следующем абзаце, было бы неверно. Вместо этого, мы начинаем с (почти) устранения избыточности следующим образом. Из любого семейства критических функций $\zeta^{i,(n+1)}$, удовлетворяющих условию (22), мы выделяем такое минимальное подсемейство $\zeta^{i_j,(n+1)}$, что объединение их областей определения γ_{i_j} совпадает с объединением γ_i . Мы сохраняем эти $\zeta^{i_j,(n+1)}$, но устраним все остальные $\zeta^{k,(n+1)}$, поскольку они очевидным образом избыточны. Важное, хотя и очень простое наблюдение состоит в том, что, ввиду минимальности, параметр a принадлежит не более чем двум из этих областей γ_{i_j} .

Критические функции $\zeta^{(n+1)}$, полученные таким образом, после только что описанного устранения избыточности, являются оставшимися элементами $[\zeta]$ в $\mathcal{C}^{(n+1)}$. Для любого из этих элементов полагаем

$$\Omega_{[\zeta]} = \Gamma_{[\zeta]}^{(n+1)} = \gamma \quad \text{и} \quad \mathcal{P}_{[\zeta]}^{(n+1)} = \{\Omega_{[\zeta]}\}.$$

Мы считаем эти критические точки “рожденными” в момент времени n . Таким образом, итерация $\nu = n$ является первым временем выхода для каждой $[\zeta]$; за исключением этого условия, комбинаторика $[\zeta]$ пуста, и нет исключений значений, соответствующих этим точкам в этот момент времени. Эта процедура *определяет* новое критическое множество $\mathcal{C}^{(n+1)}$ и, в частности, придает точный смысл символу $[z]$ на следующем этапе построения. По условию в разделе 4.2.2, есть не более

$$\frac{2|\Phi_a^{\theta(n+1)}(W(a)) \setminus \Phi_a^{\theta(n)}(W(a))|}{2\rho^{\theta(n+1)}}$$

этих новых критических точек, области определения которых $\Omega_{[\zeta]}$ содержат данный элемент $a \in \Omega$ (здесь $\nu = n$). Множитель 2 в числителе учитывает тот факт, что данная точка может представлять две “различные” критические точки, но не более, как обсуждалось в предыдущем абзаце. Другими словами,

$$\begin{aligned} & \#\{[w] \in \mathcal{C}^{(n+1)} : a \in \Omega_{[w]}\} \\ & \leq \#\{[z] \in \mathcal{C}^{(n)} : a \in \Omega_{[z]}\} + \frac{|\Phi_a^{\theta(n+1)}(W(a)) \setminus \Phi_a^{\theta(n)}(W(a))|}{\rho^{\theta(n+1)}}. \end{aligned}$$

Теперь простое индуктивное рассуждение дает границу в (10),

$$\#\{[w] \in \mathcal{C}^{(n+1)} : a \in \Omega_{[w]}\} \leq \frac{|\Phi_a^{\theta(n+1)}(W(a))|}{\rho^{\theta(n+1)}} \leq (5/\rho)^{\theta(n+1)}.$$

Это завершает n -й шаг построения.

5. Вероятностное рассуждение

Остается доказать, что множество $\Gamma^* = \bigcap_n \Gamma^{(n)}$ имеет положительную лебегову меру. Для любой критической точки мы используем рассуждение о больших отклонениях, подобное одномерному доказательству, чтобы получить оценку, подобную (8). Как обсуждалось в разделе 3.3.2, мы теперь суммируем все исключения значений, связанные с каждой критической точкой, используя границу для числа критических точек в (10). Таким образом, большая часть этого раздела имеет дело с исключениями значений, связанными с отдельной критической точкой $[z] \in \mathcal{C}^{(n)}$ для некоторого $n \geq N$. Проблема кратности критической точки учитывается с помощью формализма. Для простоты мы будем опускать индекс $[z]$ там, где это не может привести к путанице.

Мы разделим рассуждение на 4 части. Первый шаг – полезная реорганизация комбинаторной структуры на каждом $\Omega_{[z]}$. Причина, по которой это необходимо, состоит в том, что наши комбинаторные данные отслеживают маршруты критических орбит между возвращениями выхода (ситуациями выхода, совпадающими с разрывающимися временами), но не за их пределами. В моменты возвращений выхода динамика начинается “заново”, в том смысле, что последовательные маршруты весьма независимы от предшествующего поведения. Это – важная особенность возвращений выхода (система “выходит из прошлого”) и, поскольку эти возвращения довольно часты (продолжительное время ожидания экспоненциально маловероятно), также и существенная составная часть всего рассуждения об исключении значений. С другой стороны, в связи с возможностью многих промежуточных выходов это значит, что одни и

те же комбинаторные данные могут соответствовать нескольким различным интервалам разбиения, даже с неограниченной кратностью. Цель реорганизации, проводимой в разделе 5.1, в том, чтобы разложить весь набор элементов всех разбиений на некоторое число “блоков”, на каждом из которых кратность комбинаторики действительно ограничена. Стратегия состоит в том, чтобы сосредоточить наше внимание на подынтервалах выходящей компоненты только вплоть до следующего времени выхода, ассоциированного с каждым из подынтервалов.

Сосредоточиваясь на каждом из этих блоков, мы показываем в разделе 5.2, что интервалы экспоненциально малы в терминах полной суммы их глубин возвращения. Затем в разделе 5.3 мы проводим вычислительное рассуждение, чтобы установить мощность множества интервалов, глубины возвращения которых суммируются к некоторому данному значению. Мы показываем, что эта граница растет экспоненциально относительно суммы глубин возвращений, но ее скорость экспоненциального роста меньше той, которая была использована для оценки размера интервалов. Объединение этих двух оценок немедленно дает границу *средней* рекуррентности для точек в отдельном блоке. В следствии 1 мы затем показываем, как “суммировать вклады” каждого блока, чтобы получить оценку общей средней рекуррентности по всем точкам из $\Gamma^{(n)}$. Наконец, из рассуждения о больших отклонениях следует требуемая оценка доли исключенных значений параметра.

5.1. Ренормализация комбинаторики. По построению, для любого $\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)}$ есть последовательность $\nu = \eta_0 < \eta_1 < \dots < \eta_s \leq n$, $s \geq 0$, времен выхода, и для каждого i , $0 \leq i \leq s$, существуют предшественник $z^{(\eta_i)} \in \mathcal{C}^{(\eta_i)}$ и интервал $\gamma^{(\eta_i)}$ с $\gamma \subset \gamma^{(\eta_i)} \subset \Omega_{[z]}$, который является компонентой выхода для $z^{(\eta_i)}$. В частности, $z^{(\eta_i)}$ допускает продолжение на весь $\gamma^{(\eta_i)}$. Так как s может зависеть от γ , то нам удобно расширить определение $\gamma^{(\eta_i)}$ на все $0 \leq i \leq n$, и мы делаем это, полагая $\gamma^{(\eta_i)} = \gamma$ для $s + 1 \leq i \leq n$. Теперь рассмотрим дизъюнктное объединение

$$\mathcal{Q}^{(i)} = \mathcal{Q}_{[z]}^{(i)} = \coprod \{ \gamma^{(\eta_i)} : \gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)} \}.$$

Ясно, что $\mathcal{Q}^{(0)} = \{\Omega_{[z]}\}$ и $\mathcal{Q}^{(n)} = \hat{P}_{[z]}^{(n)}$, которое является разбиением $\Gamma_{[z]}^{(n)}$. Для данных $\gamma^{(\eta_i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}$ и $\gamma^{(\eta_j)} \in \mathcal{Q}^{(j)}$ с $i < j$ мы скажем, что $\gamma^{(\eta_j)}$ – *потомок* $\gamma^{(\eta_i)}$, если $\gamma^{(\eta_j)} \subset \gamma^{(\eta_i)}$ и $z^{(\eta_i)}$ – предшественник $z^{(\eta_j)}$. При $0 \leq i \leq n - 1$ и $\gamma \in \mathcal{Q}^{(i)}$ положим

$$\mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma) = \{ \gamma' \in \mathcal{Q}^{(i+1)} : \gamma' \text{ – потомок } \gamma \}.$$

Маршруты всех интервалов в $\mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma)$, очевидно, совпадают вплоть до момента времени η_i . Теперь мы можем определить функции $\Delta \mathcal{E}_{\gamma}^{(i)} : \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma) \rightarrow \mathbb{N}$, где

$$\Delta \mathcal{E}_{\gamma}^{(i)}(\gamma') = \mathcal{E}^{(\eta_{i+1})}(\gamma') - \mathcal{E}^{(\eta_i)}(\gamma)$$

– сумма всех глубин существенных возвращений, ассоциированных с маршрутом $\gamma' \in \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma)$ между временами выхода η_i и η_{i+1} . Наконец, пусть

$$\mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma, R) = \{ \gamma' \in \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma) : \Delta \mathcal{E}_{\gamma}^{(i)}(\gamma') = R \}.$$

5.2. Метрические границы. Пусть $\bar{\kappa} = \kappa_3/5$, где κ_3 – постоянная в (16). Напомним, что κ_3 не зависит от δ и b .

ЛЕММА 1. Для любых $[z] \in \mathcal{C}^{(n)}$, $0 \leq i \leq n-1$, $\gamma \in \mathcal{Q}^{(i)}$, $R \geq 0$ и $\gamma' \in \mathcal{Q}^{(i)}(\gamma, R)$ имеем

$$|\gamma'| \leq e^{-3\bar{\kappa}R} |\gamma|.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По построению, есть такие гнездовые интервалы $\gamma' \subset \gamma^{(\nu_t)} \subset \dots \subset \gamma^{(\nu_1)} \subset \gamma^{(\nu_0)} = \gamma$, что ν_0 есть время выхода для $\gamma = \gamma^{(\nu_0)}$ и для любого $j = 1, \dots, t$ интервал $\gamma^{(\nu_{j-1})}$ содержит существенное возвращение в момент времени ν_j , наступающее, когда интервал $\gamma^{(\nu_j)}$ создается как следствие разрубания. Напишем

$$\frac{|\gamma'|}{|\gamma|} = \frac{|\gamma^{(\nu_1)}|}{|\gamma^{(\nu_0)}|} \frac{|\gamma^{(\nu_2)}|}{|\gamma^{(\nu_1)}|} \dots \frac{|\gamma^{(\nu_t)}|}{|\gamma^{(\nu_{t-1})}|} \frac{|\gamma'|}{|\gamma^{(\nu_t)}|}. \quad (23)$$

Последний множитель имеет тривиальную границу $|\gamma'|/|\gamma^{(\nu_t)}| \leq 1$. Для множителей в середине используем следующую лемму.

ЛЕММА 2. Для всех $j = 1, \dots, t-1$ имеем

$$\frac{|\gamma^{(\nu_{j+1})}|}{|\gamma^{(\nu_j)}|} \leq e^{-r_{j+1} + (1-3\bar{\kappa})r_j}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По свойству ограниченного искажения (14) имеем

$$\frac{|\gamma^{(\nu_{j+1})}|}{|\gamma^{(\nu_j)}|} \leq D \frac{|\gamma_{\nu_j+p_j+1}^{(\nu_{j+1})}|}{|\gamma_{\nu_j+p_j+1}^{(\nu_j)}|}. \quad (24)$$

Из (16) следует, что для каждого из этих существенных возвращений

$$|\gamma_{\nu_j+p_j+1}^{(\nu_j)}| \geq e^{5\bar{\kappa}r_j} |\gamma_{\nu_j}^{(\nu_j)}| \geq \text{const } r_j^{-2} e^{(5\bar{\kappa}-1)r_j} \geq e^{(4\bar{\kappa}-1)r_j}.$$

Мы использовали здесь тот факт, что r^2 много меньше, чем $e^{\bar{\kappa}r}$, при $r \geq r_\delta \gg 1$. Чтобы получить верхнюю границу для числителя в (24), учтем, что $\gamma_k^{(\nu_{j+1})}$ остается вне критической области и является допустимой кривой между временем $\nu_j + p_j$ и временем ν_{j+1} . Таким образом, в течение этого периода его длина не может уменьшиться:

$$|\gamma_{\nu_j+p_j+1}^{(\nu_{j+1})}| \leq |\gamma_{\nu_{j+1}}^{(\nu_{j+1})}| \leq e^{-r_{j+1}}.$$

Заменяя эти две границы в (24), находим (учитывая, что r_δ велико):

$$\frac{|\gamma^{(\nu_{j+1})}|}{|\gamma^{(\nu_j)}|} \leq D e^{-r_{j+1} + (1-4\bar{\kappa})r_j} \leq e^{-r_{j+1} + (1-3\bar{\kappa})r_j},$$

как утверждалось в лемме 2.

Аналогичное рассуждение можно применить к первому множителю ($j = 0$) в (23). Длина $\gamma_{\nu_1}^{(\nu_1)}$ ограничена величиной e^{-r_1} по построению. Кроме того, компонента выхода $\gamma_{\nu_0}^{(\nu_0)}$ имеет длину $\geq \delta/10$. Так как эта компонента примыкает к Δ и все итерации между моментом времени ν_0 и моментом времени ν_1 происходят в гиперболической области Δ^c , то простое рассуждение о гиперболичности дает $|\gamma_{\nu_1}^{(\nu_0)}| \geq \delta^{9/10}$. Не будет ограничением предположение, что $5\bar{\kappa} = \kappa_3 < 1/10$. Таким образом, получаем

$$\frac{|\gamma^{(\nu_1)}|}{|\gamma^{(\nu_0)}|} \leq D \frac{|\gamma_{\nu_1}^{(\nu_1)}|}{|\gamma_{\nu_1}^{(\nu_0)}|} \leq D e^{-r_1} \delta^{-1+5\bar{\kappa}} \leq e^{-r_1} \delta^{-1+3\bar{\kappa}}. \quad (25)$$

Подставляя эти границы в (23), находим

$$\begin{aligned} \frac{|\gamma'|}{|\gamma|} &\leq \exp \left(-r_1 - (1 - 3\bar{\kappa}) \log \delta + \sum_{j=1}^{t-1} (-r_{j+1}) + \sum_{j=1}^{t-1} (1 - 3\bar{\kappa}) r_j \right) \\ &= \exp \left(-(1 - 3\bar{\kappa}) \log \delta - r_t - 3\bar{\kappa} \sum_{j=1}^{t-1} r_j \right) \leq \exp \left(-3\bar{\kappa} \sum_{j=1}^t r_j \right). \end{aligned}$$

Во втором неравенстве мы использовали соотношение $r_t \geq |\log \delta|$. В правой части стоит $e^{-3\bar{\kappa}R}$, что завершает доказательство леммы 1.

5.3. Комбинаторные границы.

ЛЕММА 3. Для любых $[z] \in \mathcal{C}^{(n)}$, $0 \leq i \leq n-1$, $\gamma \in \mathcal{Q}^{(i)}$ и $R \geq 0$ имеем

$$\#\mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma, R) \leq e^{\bar{\kappa}R}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для данного $\gamma' \in \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma, R)$ обозначим через $\eta_i = \nu_0 < \nu_1 < \dots < \eta_t < \eta_{i+1}$ соответствующую последовательность существенных возвратов между последовательными ситуациями выхода. Каждому ν_i разрубающая процедура в разделе 4.3.2 сопоставляет пару целых чисел (r_i, m_i) с $|r_i| \geq r_\delta$ и $1 \leq m_i \leq r_i^2$. По определению, $|r_1| + \dots + |r_t| = R$. Последовательность (r_i, m_i) полностью определяет γ' , за исключением того, что следующая ситуация выхода η_{i+1} может породить две компоненты выхода, которые, таким образом, используют одну и ту же последовательность. Таким образом, не считая безболезненного множителя 2, мощность $\mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma, R)$ ограничена числом последовательностей (r_i, m_i) , $t \geq 1$, с $|r_1| + \dots + |r_t| = R$, $|r_i| \geq r_\delta$ и $1 \leq m_i \leq r_i^2$.

Начнем с оценки числа целых решений задачи

$$r_1 + \dots + r_t = R \quad \text{с} \quad r_i \geq r_\delta. \quad (26)$$

Это соответствует числу способов разбиения R объектов в t непересекающихся подмножеств, которое, как хорошо известно, ограничено сверху числом $(R+t)!/(R!t!)$. Используя приближенную формулу Стирлинга, получаем

$$\frac{(R+t)!}{R!t!} \leq \text{const} \frac{(R+t)^{R+t}}{R^R t^t} = \text{const} \left[\left(1 + \frac{t}{R}\right)^{1+\frac{t}{R}} \left(\frac{R}{t}\right)^{\frac{t}{R}} \right]^R.$$

Напомним, что $R \geq tr_\delta$ и $r_\delta \rightarrow \infty$ при $\delta \rightarrow 0$. Мы видим, что оба множителя в последнем выражении стремятся к 1, когда δ стремится к нулю. Следовательно, выбирая δ достаточно малым, мы убеждаемся, что число решений задачи (26) меньше, чем $e^{\overline{\kappa}R/4}$.

Теперь, чтобы завершить доказательство, мы должны взять сумму по всем значениям t , и нам также нужно учесть знак каждого r_i и изменение m_i от 1 до r_i^2 . Последнее означает, что любая фиксированная последовательность r_i соответствует не более чем $\prod_{i=1}^t r_i^2$ элементам разбиения. При фиксированном R произведение является наибольшим, если r_i примерно равны. Таким образом, эта кратность ограничена величиной $(R/t)^t$. В области, представляющей интерес для нас, функция $t \mapsto (R/t)^t$ монотонно возрастает по t . Таким образом, мы можем ограничить ее величиной r_δ^{R/r_δ} , которая не превосходит $e^{\overline{\kappa}R/4}$, если r_δ велико. Таким образом, получаем

$$\#\mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma, R) \leq 2 \sum_{t \leq R/r_\delta} 2^t e^{\overline{\kappa}R/2} \leq 4 \cdot 2^{R/r_\delta} e^{\overline{\kappa}R/2} \leq e^{\overline{\kappa}R},$$

если r_δ достаточно велико.

5.4. Средняя рекуррентность. Из лемм 1 и 3 непосредственно следует, что

$$\sum_{\gamma' \in \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma, R)} |\gamma'| \leq e^{-2\overline{\kappa}R} |\gamma|. \quad (27)$$

С помощью этого неравенства мы собираемся получить оценку для распределения функции возвращаемости, принимая во внимание полный маршрут вплоть до момента времени n .

Следствие 1. Для любого $[z] \in \mathcal{C}^{(n)}$ имеем

$$\int_{\Gamma_{[z]}^{(n)}} e^{\overline{\kappa}\mathcal{E}^{(n)}} \leq e^{n/r_\delta} |\Omega_{[z]}|.$$

Доказательство. Прежде всего напомним, что $\mathcal{Q}^{(n)} = \hat{P}_{[z]}^{(n)}$ – разбиение $\Gamma_{[z]}^{(n)}$ и $\mathcal{E}^{(n)}$ постоянна на элементах $\mathcal{Q}^{(n)}$. Таким образом,

$$\int_{\Gamma_{[z]}^{(n)}} e^{\overline{\kappa}\mathcal{E}^{(n)}} = \sum_{\gamma^{(n)} \in \mathcal{Q}^{(n)}} e^{\overline{\kappa}\mathcal{E}^{(n)}} |\gamma^{(n)}|.$$

Кроме того, $\mathcal{E}^{(n)} = \mathcal{E}^{(n-1)} + \Delta\mathcal{E}^{(n-1)}$, где $\mathcal{E}^{(n-1)}$ зависит только от элемента $\gamma^{(n-1)}$ в $\mathcal{Q}^{(n-1)}$, содержащего $\gamma^{(n)}$. Поэтому

$$\sum_{\gamma^{(n)} \in \mathcal{Q}^{(n)}} e^{\overline{\kappa}\mathcal{E}^{(n)}} |\gamma^{(n)}| \leq \sum_{\gamma^{(n-1)} \in \mathcal{Q}^{(n-1)}} e^{\overline{\kappa}\mathcal{E}^{(n-1)}} \sum_{\gamma^{(n)} \in \mathcal{Q}^{(n)}} e^{\overline{\kappa}\Delta\mathcal{E}^{(n-1)}} |\gamma^{(n)}|,$$

и, итерируя рассуждение, получаем

$$\begin{aligned} \sum_{\gamma^{(n)} \in \mathcal{Q}^{(n)}} e^{\overline{\kappa}\mathcal{E}^{(n)}} |\gamma^{(n)}| &\leq \sum_{\gamma^{(1)} \in \mathcal{Q}^{(1)}(\gamma^{(0)})} e^{\overline{\kappa}\Delta\mathcal{E}^{(0)}} \dots \sum_{\gamma^{(i+1)} \in \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma^{(i)})} e^{\overline{\kappa}\Delta\mathcal{E}^{(i)}} \\ &\dots \sum_{\gamma^{(n-1)} \in \mathcal{Q}^{(n-1)}(\gamma^{(n-2)})} e^{\overline{\kappa}\Delta\mathcal{E}^{(n-2)}} \sum_{\gamma^{(n)} \in \mathcal{Q}^{(n)}(\gamma^{(n-1)})} e^{\overline{\kappa}\Delta\mathcal{E}^{(n-1)}} |\gamma^{(n)}|. \end{aligned} \quad (28)$$

Для любых $0 \leq i \leq n-1$ и $\gamma^{(i)} \in \mathcal{Q}^{(i)}$ можем написать

$$\sum_{\gamma^{(i+1)}} e^{\bar{\kappa} \Delta \mathcal{E}^{(i)}(\gamma^{(i+1)})} |\gamma^{(i)}| = |Q^{i+1}(\gamma^{(i)}, 0)| + \sum_{R \geq r_\delta} e^{\bar{\kappa} R} |Q^{(i+1)}(\gamma^{(i)}, R)|,$$

где сумма слева берется по всем $\gamma^{(i+1)} \in \mathcal{Q}^{(i+1)}(\gamma^{(i)})$. Из соотношения (27) следует, что

$$\sum_{R \geq r_\delta} e^{\bar{\kappa} R} |Q^{(i+1)}(\gamma^{(i)}, R)| \leq \sum_{R \geq r_\delta} e^{-\bar{\kappa} R} |\gamma^{(i)}| \leq 2e^{-\bar{\kappa} r_\delta} |\gamma^{(i)}|$$

и поэтому

$$\sum_{\gamma^{(i+1)}} e^{\bar{\kappa} \Delta \mathcal{E}^{(i)}(\gamma^{(i+1)})} |\gamma^{(i)}| \leq (1 + 2e^{-\bar{\kappa} r_\delta}) |\gamma^{(i)}| \leq e^{1/r_\delta} |\gamma^{(i)}| \quad (29)$$

(последнее неравенство использует соотношение $\log(1 + 2e^{-\bar{\kappa} r_\delta}) \leq 4e^{-\bar{\kappa} r_\delta} \leq 1/r_\delta$, верное в предположении, что r_δ достаточно велико). Подставляя (29) в (28) последовательно для всех значений i и вспоминая, что $\gamma^{(0)} = \Gamma_{[z]}^{(0)} = \Omega_{[z]}$, получаем

$$\sum_{\gamma^{(n)} \in \mathcal{Q}^{(n)}} e^{\bar{\kappa} \mathcal{E}^{(n)}} |\gamma^{(n)}| \leq e^{n/r_\delta} |\Omega_{[z]}|,$$

как и утверждалось.

5.5. Выводы. Используя неравенство Чебышёва и определение

$$E_{[z]}^{(n)} = \{\gamma \in \hat{P}_{[z]}^{(n)} : \mathcal{E}^{(n)} \geq \tau(n+1)\},$$

получаем (напомним, что $\hat{P}_{[z]}^{(n)}$ – разбиение $\Gamma_{[z]}^{(n)}$)

$$|E_{[z]}^{(n)}| \leq e^{-\tau \bar{\kappa}(n+1)} \int_{\Gamma_{[z]}^{(n)}} e^{\bar{\kappa} \mathcal{E}^{(n)}} \leq e^{\left(\frac{1}{r_\delta} - \bar{\kappa} \tau\right)n} |\Omega_{[z]}| \leq e^{-\bar{\kappa} \tau n/2} |\Omega_{[z]}|.$$

Поэтому, используя (10), имеем

$$\left| \bigcup_{[z] \in \mathcal{C}^{(n)}} E_{[z]}^{(n)} \right| \leq e^{-\bar{\kappa} \tau n/2} \sum_{[z]} |\Omega_{[z]}| \leq e^{-\bar{\kappa} \tau n/2} (5/\rho)^{\theta n} |\Omega|.$$

Пока $\bar{\kappa}$ и τ не зависят от размера возмущения b , мы можем сделать постоянную θ как угодно малой, уменьшая b . Таким образом, мы можем предполагать, что последнее выражение не превосходит величины $e^{-\bar{\kappa} \tau n/4} |\Omega|$.

Это означает, что $|\Gamma^{(n)} \setminus \Gamma^{(n+1)}| \leq e^{-\bar{\kappa} \tau n/4} |\Omega|$ для всех n , откуда следует, что

$$|\Gamma^{(n+1)}| \geq \left(1 - \sum_{i=N}^n e^{-\bar{\kappa} \tau i/4}\right) |\Omega|$$

и

$$|\Gamma^*| \geq \left(1 - \sum_{n=N}^{\infty} e^{-\bar{\kappa} \tau n/4}\right) |\Omega| > 0.$$

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Д. В. Аносов. Геодезические потоки на замкнутых римановых многообразиях отрицательной кривизны // Труды МИАН. 1967. Т. 90.
- [2] Д. В. Аносов, В. В. Солодов. Гиперболические множества // Итоги науки и техники. Совр. проблемы матем. Фунд. напр. Т. 66. Динамические системы - IX. М.: ВИНТИ, 1991. С. 12–99.
- [3] V. Baladi. Positive Transfer Operators and Decay of Correlations. River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2000. (Adv. Ser. Nonlinear Dynam. V. 16.)
- [4] L. Barreira, Ya. Resin. Lectures on Lyapunov exponents and smooth ergodic theory // Proc. Sympos. Pure Math. 2001. V. 69. P. 3–106. Appendix A by M. Brin and Appendix B by D. Dolgopyat, H. Hu and Ya. Pesin.
- [5] M. Benedicks, L. Carleson. On iterations of $1 - ax^2$ on $(-1, 1)$ // Ann. of Math. (2). 1985. V. 122. № 1. P. 1–25.
- [6] M. Benedicks, L. Carleson. The dynamics of the Hénon map // Ann. of Math. (2). 1991. V. 133. № 1. P. 73–169.
- [7] M. Benedicks, L. Carleson. Parameter selection in the Hénon family // Preprint. Stockholm: Royal Institute of Technology (KTH), 2002.
- [8] M. Benedicks, M. Viana. Solution of the basin problem for Hénon-like attractors // Invent. Math. 2001. V. 143. № 2. P. 375–434.
- [9] M. Benedicks, L. S. Young. Sinai–Bowen–Ruelle measures for certain Hénon maps // Invent. Math. 1993. V. 112. № 3. P. 541–576.
- [10] M. Benedicks, L. S. Young. Markov extensions and decay of correlations for certain Hénon maps // Astérisque. 2000. V. 261. P. 13–56.
- [11] P. Collet, J.-P. Eckmann. Positive Lyapunov exponents and absolute continuity for maps of the interval // Ergodic Theory Dynam. Systems. 1983. V. 3. № 1. P. 13–46.
- [12] M. J. Costa. Saddle-node horseshoes giving rise to global Hénon-like attractors // An. Acad. Brasil. Ciênc. 1998. V. 70. № 3. P. 393–400.
- [13] L. J. Díaz, J. Rocha, M. Viana. Strange attractors in saddle-nodes cycles: prevalence and globality // Invent. Math. 1996. T. 125. C. 37–74.
- [14] M. Hénon. A two-dimensional mapping with a strange attractor // Comm. Math. Phys. 1976. V. 50. № 1. P. 69–77.
- [16] M. Holland, S. Luzzatto. Dynamics of two-dimensional maps with criticalities and singularities (to appear).
- [15] M. Holland. A new proof of the stable manifold theorem for hyperbolic fixed points on surfaces // Preprint; <http://front.math.ucdavis.edu/math.DS/0301235>.
- [17] A. J. Homburg, T. Young. Intermittency in families of unimodal maps // Ergodic Theory Dynam. Systems. 2002. V. 22. № 1. P. 203–225.
- [18] M. V. Jakobson. Absolutely continuous invariant measures for one-parameter families of one-dimensional maps // Comm. Math. Phys. 1981. V. 81. № 1. P. 39–88.
- [19] A. Katok, B. Hasselblatt. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995. (Encyclopaedia Math. Appl. V. 54.)
- [20] E. D. Lorenz. Deterministic nonperiodic flow // J. Atmospheric Sci. 1963. V. 20. P. 130–141.
- [22] S. Luzzatto. Bounded recurrence of critical points and Jakobson's theorem // London Math. Soc. Lecture Note Ser. 2000. V. 274. P. 173–210.
- [21] S. Luzzatto. Combinatorial structure of the parameter space for Lorenz-like and Hénon-like maps // Workshop on Dynamical Systems, International Centre for Theoretical Physics, Trieste, 1998; http://www.ictp.trieste.it/www_users/math/prog1069.html.
- [23] S. Luzzatto, W. Tucker. Non-uniformly expanding dynamics in maps with singularities and criticalities // Inst. Hautes Études Sci. Publ. Math. 1999. V. 89. P. 179–226.
- [24] S. Luzzatto, M. Viana. Positive Lyapunov exponents for Lorenz-like families with criticalities // Astérisque. 2000. V. 261. P. 201–237.
- [25] S. Luzzatto, M. Viana. Lorenz-like attractors without continuous invariant foliations // Preprint, 2003.

- [26] R. Mañé. Hyperbolicity, sinks and measure in one-dimensional dynamics // *Comm. Math. Phys.* 1985. V. 100. № 4. P. 495–524; Erratum: *Comm. Math. Phys.* 1987. V. 112. № 4. P. 721–724.
- [27] R. Mañé. *Ergodic Theory and Differentiable Dynamics*. Berlin: Springer-Verlag, 1987.
- [28] W. de Melo, S. van Strien. One-dimensional dynamics: the Schwarzian derivative and beyond // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1988. V. 18. № 2. P. 159–162.
- [29] L. Mora, M. Viana. Abundance of strange attractors // *Acta Math.* 1993. V. 171. № 1. P. 1–71.
- [30] T. Nowicki, S. van Strien. Absolutely continuous invariant measures for C^2 unimodal maps satisfying the Collet–Eckmann conditions // *Invent. Math.* 1988. V. 93. № 3. P. 619–635.
- [31] M. J. Pacifico, A. Rovella, M. Viana. Infinite-modal maps with global chaotic behavior // *Ann. of Math. (2)*. 1998. V. 148. № 2. P. 441–484; Corrigendum: *Ann. of Math. (2)*. 1999. V. 149. № 2. P. 705.
- [32] J. Palis, J.-C. Yoccoz. Fers à cheval non uniformément hyperboliques engendrés par une bifurcation homocline et densité nulle des attracteurs // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 2001. V. 333. № 9. P. 867–871.
- [33] Я. Б. Песин. Характеристические экспоненты Ляпунова и гладкая эргодическая теория // *УМН*. 1977. Т. 32. № 4. С. 55–112.
- [34] M. Pollicott. *Lectures on Ergodic Theory and Pesin Theory on Compact Manifolds*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1993. (London Math. Soc. Lecture Note Ser. V. 180.)
- [35] A. Pumarino, J. A. Rodríguez. Coexistence and persistence of infinitely many strange attractors // *Ergodic Theory Dynam. Systems*. 2001. V. 21. № 5. P. 1511–1523.
- [36] M. Rychlik. Another proof of Jakobson's theorem and related results // *Ergodic Theory Dynam. Systems*. 1988. V. 8. № 1. P. 93–109.
- [37] M. Shub. *Global Stability of Dynamical Systems*. New York: Springer-Verlag, 1987.
- [38] S. Smale. Differentiable dynamical systems // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1967. V. 73. P. 747–817.
- [39] Ph. Thieullen, C. Tresser, L.-S. Young. Positive Lyapunov exponent for generic one-parameter families of unimodal maps // *J. Anal. Math.* 1994. V. 64. P. 121–172.
- [40] M. Tsujii. Positive Lyapunov exponents in families of one-dimensional dynamical systems // *Invent. Math.* 1993. V. 111. № 1. P. 113–137.
- [41] M. Tsujii. A proof of Benedicks–Carleson–Jacobson theorem // *Tokyo J. Math.* 1993. V. 16. № 2. P. 295–310.
- [42] M. Tsujii. Small random perturbations of one-dimensional dynamical systems and Margulis–Pesin entropy formula // *Random Comput. Dynam.* 1992/93. V. 1. № 1. P. 59–89.
- [43] M. Viana. Strange attractors in higher dimensions // *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*. 1993. V. 24. № 1. P. 13–62.
- [44] M. Viana. Stochastic dynamics of deterministic systems // *Lecture Notes XXI Braz. Math. Colloq., IMPA, Rio de Janeiro*, 1997.
- [45] Q. Wang, L. S. Young. Strange attractors with one direction of instability // *Comm. Math. Phys.* 2001. V. 218. № 1. P. 1–97.
- [46] Q. Wang, L.-S. Young. From invariant curves to strange attractors // *Comm. Math. Phys.* 2002. V. 225. № 2. P. 275–304.
- [47] J.-C. Yoccoz. Introduction to hyperbolic dynamics // *NATO Adv. Sci. Inst. Ser. C Math. Phys. Sci.* 1995. V. 464. P. 265–291.
- [48] L.-S. Young. Statistical properties of dynamical systems with some hyperbolicity // *Ann. of Math. (2)*. 1998. V. 147. № 3. P. 585–650.

Instituto de Matemática Pura e Aplicada, Rio de Janeiro, Brazil;

Imperial College, London, UK

E-mail: viana@impa.br, stefano.luzzatto@imperial.ac.uk

Поступила в редакцию

14.08.2003