Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Л. О. Чехов, Р. Ч. Пеннер, Введение в квантовую теорию Т'ерстона, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 93–138

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm676>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 13:40:55

УДК 514.753.2+517.958:530.145:512

ВВЕДЕНИЕ В КВАНТОВУЮ ТЕОРИЮ ТЁРСТОНА

Л. О. ЧЕХОВ, Р. Ч. ПЕННЕР

Дается обзор теории квантовых пространств Тейхмюллера и Тёрстона. Приводится описание теории Тёрстона, или теории автострад, и производится квантование этой теории на основе процедуры квантования координат пространств Тейхмюллера римановых поверхностей с дырками, которые допускают описание с помощью ленточных графов, предложенное Р. Ч. Пеннером и В. В. Фоком. В обеих теориях важную роль играют квантовые преобразования из группы классов отображений, удовлетворяющие пятичленному соотношению. Пространство канонических измеримых автострад интерпретируется как замыкание пространства наблюдаемых 3D гравитации, которые представляют собой длины замкнутых геодезических на римановой поверхности с дырками. Доказано существование такого замыкания как в классическом, так и в квантовом случае и обсуждаются многочисленные алгебраические структуры, возникающие в соответствующих теориях.

Библиография: 32 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	94
2. Классические пространства Тейхмюллера	96
2.1. Пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}^H(S)$ поверхностей с дырками. Техника графов	96
2.2. Форма Вейля–Петерсона	103
2.3. Пуассоновы алгебры геодезических функций	104
3. Квантование	107
3.1. Квантование пространств Тейхмюллера	107
3.2. Операторы длин геодезических	112
3.3. Алгебра квантовых геодезических	114
3.4. Квантование алгебр Нельсон и Редже	117
3.5. Улучшенное квантовое упорядочение	117
4. Квантование теории Тёрстона	120
4.1. Канонические измеримые автострады	120
4.2. Аппроксимирующие ламинации и основная теорема	124
4.3. Элементы доказательства	127
5. Заключение	136
Список литературы	137

1. Введение

Одно из главных приложений техники пространств Тейхмюллера в современной математической физике состоит в описании гильбертова пространства и алгебры наблюдаемых в трехмерной (3D) квантовой гравитации. Начиная с работы Г. Верлинде и Э. Верлинде [1], считается установленным, что классическое фазовое пространство гравитации Эйнштейна на трехмерном многообразии задается пространством Тейхмюллера на его границе. (Аналогично, классическое фазовое пространство 3D теории Черна–Саймонса представляет собой пространство модулей плоских связностей на его границе; эта теория была проквантована в работах [2], [3].) Пространство Тейхмюллера допускает каноническую пуассонову структуру (структуру Вейля–Петерсона) и группу симметрий, представляющую собой группу классов отображений.

Имея в руках пуассонову структуру, можно задаться вопросом квантования этой структуры, получив тем самым возможное описание квантовой 3D гравитации. Согласно принципу соответствия, (1) алгебра наблюдаемых соответствующей квантовой теории есть некоммутативная деформация $*$ -алгебры функций, согласованная с пуассоновой структурой; (2) пространство Гильберта теории есть пространство $*$ -представлений этой алгебры; (3) группа симметрий действует на алгебре наблюдаемых с помощью автоморфизмов. Если принять на веру то, что квантование пуассонова многообразия существует и единственно, то для того чтобы решить данную проблему, достаточно построить семейство $*$ -алгебр, зависящих от параметра квантования $\hbar$, задать действие группы классов отображений на этом семействе посредством внешних автоморфизмов и показать, что таким образом построенные алгебра и действие воспроизводят классическую алгебру, классическое действие и пуассонову структуру в пределе $\hbar \rightarrow 0$. Эта программа была успешно реализована в работах [4], [5] и [6], и ее краткому описанию посвящены разделы 2 и 3 данной работы. На самом деле проблема, решенная в указанных работах, несколько отличается от исходно поставленной, поскольку метод работ [4], [5] годится для описания только лишь *открытых* 2D поверхностей (2D поверхностей с непустой границей, которая может быть просто одним проколом). Соответствующее пространство Тейхмюллера обладает вырожденной пуассоновой структурой Вейля–Петерсона, а группа классов отображений при этом действует как группа симметрий. Ниже будет дано описание деформационного квантования такого пространства Тейхмюллера, действия группы классов отображений с помощью внешних автоморфизмов, представлений алгебры и индуцированного действия группы классов отображений на пространстве представлений на основе техники работ [4], [5]. В согласии с работой [1], пространство представлений алгебры наблюдаемых может быть также интерпретировано как пространство конформных блоков в конформной теории поля Лиувилля. Эта программа находится сейчас в стадии разработки (см. [7]). Конструкцию данной работы, таким образом, можно интерпретировать как конструкцию пространств конформных блоков с описанием действия группы классов отображений для такой конформной теории поля.

Действие группы классов отображений удобно описывать с помощью техники триангулированных поверхностей, которая в свою очередь допускает описание в терминах графов. Эта конструкция примыкает к конструкции клеточного разбиения пространства модулей типа Пеннера и Концевича [8], [9].

Ключевым моментом процедуры квантования является построение такого квантового аналога преобразования из группы классов отображений, которое бы задавало согласованным образом морфизмы между квантовыми $*$ -алгебрами и одновременно сохраняло бы квантовые алгебры геодезических. Основной математической образующей данной конструкции оказывается фаддеевская версия функции квантового дилוגарифма [10]. Получающееся пятичленное соотношение при этом интерпретируется как единственное нетривиальное соотношение в некотором группоиде, для которого группа классов отображений оказывается максимальной подгруппой. Похожая конструкция была разработана одновременно и независимо Р. М. Кашаевым [6]. Различие между двумя подходами состоит в различии между получаемыми размерностями пуассоновых листов: в случае ленточного графа с V трехвалентными вершинами (в предположении отсутствия вершин старших валентностей), E ребрами и $F = n$ гранями, который задает разбиение римановой поверхности, чей род вычисляется по формуле Эйлера $V - E + F = 2 - 2g$, в кашаевском подходе участвуют $2E$ переменных и $V + F$ центральных элементов (по одному при каждой вершине и при каждой грани), так что получаемая размерность пуассонова листа равна $2E - V - n = 8g - 8 + 3n$, в то время как в предлагаемом подходе имеются E переменных и F центральных элементов, так что получаемая пуассонова размерность $E - F = 6g - 6 + 2n$ в точности равна размерности пространства Тейхмюллера римановой поверхности рода g с n проколами (отмеченными точками). Подход работ [4], [5], таким образом, более пригоден для описания 2D топологических теорий, в то время как кашаевский подход оказывается полезен при описании теории Лиувилля как решеточной теории (например, с его помощью удастся вычислить центральный заряд поля Лиувилля, см. [11]).

В разделе 4 дается описание последних достижений квантовой теории Тейхмюллера. В этом разделе приводится часть результатов работы [12], посвященной квантованию теории Тёрстона [13]. В основе геометрии Тёрстона лежит понятие взвешенных (метризованных) железнодорожных путей (train tracks) [для благозвучности будем называть их автострадами в русском варианте], которые представляют собой наборы расщепляющихся и сливающихся путей на римановой поверхности. Используя естественные соотношения эквивалентности для таких путей, их можно привести к каноническому виду на представляющем поверхность (вложенном) графе и снабдить их поперечными мерами, что задает набор *дополнительных* данных на римановой поверхности. На самом деле, этот набор дополнительных данных параметризует (проективизованное) пространство наблюдаемых (ламинаций) на поверхности. Собственно ламинации, которые представляют собой наборы замкнутых кривых конечной длины без (само)пересечений, отвечают рациональным точкам данного множества; иррациональные точки отвечают бесконечно длинным кривым в исходной картине. Вводятся понятия автострады, несущей ламинацию, и серии аппроксимирующих ламинаций для автострад с произвольными поперечными мерами. Доказывается основная теорема, утверждающая, что каждой точке в наборе дополнительных данных можно поставить в соответствие число (в классическом случае) или оператор (в квантовом случае), которые представляют собой пределы (классических или квантовых) длин аппроксимирующих ламинаций, деленных на их *графические длины* – классические положительно определенные функции, являющиеся просто линейными функциями от чисел, показывающих, сколько раз компонентные кривые ламинации проходят через

данное ребро. Это, очевидно, дает возможность описания алгебр наблюдаемых на множестве обобщенных наблюдаемых для данного класса римановых поверхностей. Хотя полное доказательство приводится лишь для тора с одной отмеченной точкой и существенно конструктивно использует понятие цепных дробей, нет оснований сомневаться, что аналогичная конструкция имеет место для римановых поверхностей произвольного рода. В классическом случае это следует из подхода Ф. Бонахона [14], [15] к асимптотическому поведению геометрически близких кривых в гиперболической геометрии – свойство, которое, безусловно, должно иметь аналог в квантовом подходе.

2. Классические пространства Тейхмюллера

Напомним вкратце классическое описание пространств Тейхмюллера комплексных структур на римановых поверхностях с дырками.

Пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}^h$ представляет собой пространство комплексных структур на (возможно открытой) римановой поверхности S по модулю диффеоморфизмов, гомотопически эквивалентных тождественному. В окрестности граничной компоненты комплексная структура изоморфна как комплексное многообразие либо кольцу (дырке), либо проколотому диску (прокол, или пункция).

Будем рассматривать вместо пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}^h(S)$ его конечное накрытие $\mathcal{T}^H(S)$. Точка в накрытии $\mathcal{T}^H(S)$ задается точкой исходного пространства $\mathcal{T}^h(S)$ и ориентациями всех дырок (но не проколов) на поверхности S . Такое накрытие, очевидно, разветвляется над подпространством поверхностей с проколами.

Ориентируемая 2D поверхность может быть всегда непрерывно конформно преобразована к поверхности с постоянной кривизной. Теорема униформизации Пуанкаре утверждает, что всякая комплексная поверхность S с постоянной отрицательной кривизной (в дальнейшем равной -1) представляет собой фактор-поверхность от верхней полуплоскости $\mathbb{H}_+^2$, снабженной гиперболической метрикой $ds^2 = dz d\bar{z} / (\text{Im } z)^2$, относительно действия дискретной фуксовой подгруппы $\Delta(S)$ группы автоморфизмов $PSL(2, \mathbb{R})$:

$$S = \mathbb{H}_+^2 / \Delta(S). \quad (2.1)$$

В гиперболической метрике геодезические представляют собой либо полуокружности с концами на вещественной прямой $\mathbb{R}$, либо вертикальные полупрямые; все точки границы $\mathbb{R}$ лежат на бесконечном расстоянии друг от друга и от любой внутренней точки.

Каждый гиперболический гомотопический класс замкнутых кривых γ содержит единственную *замкнутую геодезическую* длины $l(\gamma) = |\log \lambda_1 / \lambda_2|$, где λ_1 и λ_2 суть (несовпадающие) собственные значения элемента группы $PSL(2, \mathbb{R})$, отвечающего геодезической γ .

2.1. Пространство Тейхмюллера $\mathcal{T}^H(S)$ поверхностей с дырками. Техника графов. Центральным моментом конструкции является описание пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}^H(S)$ в терминах ленточных графов.

Ленточным графом Γ (жирным графом) называется граф, в котором в каждой вершине задан циклический порядок ребер, входящих в данную вершину. В дальнейшем все рассматриваемые графы будут трехвалентными. Для того чтобы координати-

зовать пространство Тейхмюллера, следует поставить в соответствие каждому (неориентированному) ребру *вещественное число*; набор всех таких чисел имеет вид $\{Z_\alpha \mid \alpha \in E(\Gamma), Z_\alpha \in \mathbb{R}\}$, где множество $E(\Gamma)$ нумерует набор всех (неориентированных) ребер графа Γ .

2.1.1. Описание группы классов отображений с помощью графов. Напомним, что группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$ представляет собой группу гомотопических классов диффеоморфизмов поверхности S . В этом разделе дается простое комбинаторное описание группы $\mathcal{D}(S)$ для произвольной открытой поверхности S .

Ленточный граф, нарисованный на ориентируемой поверхности, наследует каноническую ленточную структуру, согласованную с ориентацией поверхности.

Обозначим через $|\Gamma|(S)$ множество комбинаторных типов трехвалентных графов, отвечающих данной поверхности. Для каждого элемента множества $|\Gamma|(S)$ фиксируем *метки*, т.е. тотальный порядок ребер графа. Обозначим через $\Gamma(S)$ множество изотопических классов вложений отмеченных ленточных графов в поверхность S . Наличие меток приводит к изменению множества вложений, так как некоторые графы имеют нетривиальные группы симметрий. Введение меток представляет собой способ избавиться от этого произвола. (Здесь и ниже вертикальные линии $|\cdot|$ обозначают класс диффеоморфизмов.)

Группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$, очевидно, действует свободно на пространстве отмеченных вложенных графов, в то время как пространство комбинаторных графов задается фактором

$$\Gamma(S)/\mathcal{D}(S) = |\Gamma|(S).$$

Напомним теперь, что группу можно представлять как категорию с одним единственным объектом такую, что все морфизмы оказываются обратимыми. Аналогично, *группоид* – это просто категория, в которой все морфизмы обратимы, а любые два объекта связаны по крайней мере одним морфизмом. Так как группы автоморфизмов различных объектов группоида, очевидно, изоморфны друг другу, существует канонический способ ассоциировать группу с группоидом. Перейдем теперь к построению группоида, задающего группу классов отображений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $|\Gamma|(S)$ обозначает множество объектов. Для любых двух графов $|\Gamma|, |\Gamma_1| \in |\Gamma(S)|$ морфизм из $|\Gamma|$ в $|\Gamma_1|$ задается гомотопическим классом отмеченных вложений графов $|\Gamma|$ и $|\Gamma_1|$ в поверхность S по модулю действия диагональной группы классов отображений; обозначим этот морфизм через $|\Gamma, \Gamma_1|$. Если имеются три вложенных отмеченных графа $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$, то композиция морфизмов $|\Gamma, \Gamma_1|$ и $|\Gamma_1, \Gamma_2|$ дает по определению морфизм $|\Gamma, \Gamma_2|$. Такая категория называется *модулярным группоидом*.

Можно легко проверить, что: (1) композиция морфизмов однозначно определена; (2) класс диагональных вложений $|\Gamma, \Gamma|$ представляет собой тождественный морфизм, а морфизм, обратный морфизму $|\Gamma, \Gamma_1|$, есть просто $|\Gamma_1, \Gamma|$; (3) группа автоморфизмов объекта есть группа классов отображений $\mathcal{D}(S)$.

Чтобы задать описание модулярного группоида в терминах генераторов и соотношений, необходимо ввести в рассмотрение выделенный набор морфизмов, называемых

флипами (перескоками) и *симметриями графа*. Морфизм $|\Gamma, \Gamma_\alpha|$ называется флипом, если вложение графа Γ_α получается из вложения графа Γ , при стягивании ребра α и раздутии полученной четырехвалентной вершины в другом направлении (см. рис. 2 ниже). Обозначение Γ_α используется, с тем чтобы подчеркнуть связь этого графа с графом Γ . Заметим, что обозначение Γ_α может относиться сразу к нескольким отмеченным вложенным графам для данного графа Γ , поскольку маркировка графа Γ_α не фиксирована.

Каждой симметрии σ графа Γ отвечает автоморфизм, обозначаемый просто $|\Gamma, \Gamma_\sigma|$.

Заметим, что никакого канонического способа отождествить ребра различных графов, даже если между ними задан морфизм, не существует. Тем не менее, для двух графов, связанных флипом, такое отождествление можно ввести. Оно оказывается особенно явным в дуальной картине, в которой преобразование флипа просто сводится к замене одного ребра другим. Таким образом можно отождествить множества меток на ребрах двух графов, если только морфизм между этими двумя графами задается последовательностью флипов. Это естественное отождествление будет использоваться, а соответствующие ребра различных графов будут обозначаться одним символом, если понятно, какая последовательность флипов, связывающая эти графы, была использована. Чтобы избежать непонимания, подчеркнем, что это отождествление не связано с маркировкой.

В этих обозначениях граф $\Gamma_{\alpha_1 \dots \alpha_n}$ — это граф, получаемый в результате последовательных флипов на ребрах $\alpha_n, \dots, \alpha_1$ исходного графа Γ .

Существуют три типа соотношений между флипами, которые выполнены при любом выборе маркировок для графов, участвующих в соотношениях.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Двойной флип на одном и том же ребре представляет собой преобразование симметрии графа: если $|\Gamma_\alpha, \Gamma|$ — флип на ребре α , то $|\Gamma, \Gamma_\alpha|$ также представляет собой флип и¹*

R.2. $|\Gamma, \Gamma_\alpha| |\Gamma_\alpha, \Gamma| = 1$.

Преобразования флипов коммутируют на несоседних ребрах: если ребра α и β не имеют общих вершин, то

R.4. $|\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\alpha| |\Gamma_\alpha, \Gamma| = |\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\beta| |\Gamma_\beta, \Gamma|$.

Пять последовательных флипов на ребрах α и β , имеющих ровно одну общую вершину, оказываются тождественным преобразованием: для таких α и β графы $\Gamma_{\alpha\beta}$ и $\Gamma_{\beta\alpha}$ связаны флипом и

R.5. $|\Gamma, \Gamma_\alpha| |\Gamma_\alpha, \Gamma_{\beta\alpha}| |\Gamma_{\beta\alpha}, \Gamma_{\alpha\beta}| |\Gamma_{\alpha\beta}, \Gamma_\beta| |\Gamma_\beta, \Gamma| = 1$.

Доказательства соотношений **R.2** и **R.4** очевидны. Соотношение **R.5** принимает более наглядный вид в представлении дуальных графов. В самом деле, граф, дуальный трехвалентному графу, есть граф с треугольными гранями. Преобразование флипа исходного графа соответствует стиранию ребра дуального графа и проведению дополнительной диагонали в появившемся четырехугольнике. На рис. 1 видно, как комбинация пяти флипов приводит к тождеству.

ТЕОРЕМА 1. 1. *Преобразования флипов и симметрий графа порождают модулярный группоид.*

¹Обозначение **R.n** указывает на число n графов, участвующих в данном соотношении.

Рис. 1

2. Единственными соотношениями между генераторами являются соотношения **R.2**, **R.4**, **R.5** и естественные соотношения между флипами и симметриями графа.

Заменяя группу классов отображений на модулярный группоид, можно просто выразить последний через генераторы и соотношения.

Отметим, что всякая симметрия графа может быть представлена как отношение двух флипов на данном ребре, а следовательно, модулярный группоид можно породить одними только флипами.

Теорему 1 можно доказать с помощью прямых комбинаторных методов симплицальной геометрии (см. [16]). Мы дадим идею другого доказательства, специфического для двумерной ситуации.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Поставим в соответствие каждому связному симплицальному комплексу группоид, принимая точку в каждом симплексе старшей размерности за объект, а гомотопические классы ориентированных путей, связывающие выбранные точки, за морфизмы. Соответствующая группа есть фундаментальная группа топологического пространства, задаваемого комплексом.

С каждым симплексом коразмерности один можно связать два класса путей (от-

личающиеся ориентацией и имеющие результатом композиции тождественный морфизм), связывающие смежные симплексы старшей размерности. Естественно снова называть эти морфизмы флипами. Соотношения между флипами связаны с каждым симплексом коразмерности два. Очевидно, что этот набор флипов порождает группоид и что все соотношения между флипами задаются симплексами коразмерности два.

То же свойство выполнено и для орбифолдных симплициальных комплексов, в которых симплексы заменяются частными относительно действия конечных групп. В этом случае необходимо выбрать в качестве объекта одну точку общего положения в каждом из симплексов старшей размерности, а в качестве морфизмов рассматривать орбифолдные классы гомотопий путей. Соответствующая группа будет орбифолдной фундаментальной группой орбифолда, задаваемого комплексом. Группоид при этом порождается флипами и группами симметрий симплексов старшей размерности, но по-прежнему нетривиальные соотношения между флипами задаются симплексами коразмерности два.

Рассмотрим теперь штребелевское [17] орбифолдное симплициальное разбиение пространства модулей комплексных структур на поверхности S . Орбифолдная фундаментальная группа пространства модулей $\mathcal{M}$ представляет собой просто группу классов отображений $\mathcal{Q}(S)$. Напомним, что штребелевские орбисимплексы занумерованы ленточными графами, отвечающими поверхности S , а размерность симплекса равна числу ребер соответствующего графа. Отсюда легко видеть, что группоид штребелевского комплекса совпадает с модулярным группоидом. Более того, флипы одного отвечают флипам другого. Соотношения между флипами задаются симплексами коразмерности два, которые отвечают либо графам с двумя четырехвалентными вершинами (что приводит к соотношению **R.4**), либо графам с одной вершиной валентности пять (что дает соотношение **R.5**). Соотношение **R.2** выполнено для любого симплициального комплекса.

Заметим, что штребелевский комплекс имеет нетривиальную группу гомотопий в точности из-за редукций римановых поверхностей. Процедура компактификации модулярного симплициального комплекса сводится к замыканию симплициального комплекса путем добавления симплексов коразмерности два и выше, отвечающих редукцированным поверхностям по типу Делиня и Мамфорда (что делает комплекс гомотопически тривиальным). Однако не существует графов, соответствующих этим добавленным симплексам, а следовательно, их надо исключать из комплекса всегда, когда рассматривается клеточное разбиение в терминах ленточных графов, которое тем самым имеет нетривиальную гомотопию, если только соответствующая риманова поверхность допускает вырождение. Заметим, что и здесь препятствием к тривиальности гомотопической группы служат лишь симплексы коразмерности два, отвечающие элементарным редукциям римановых поверхностей.

2.1.2. Описание пространства Тейхмюллера с помощью графов. Начиная с работ К. Штребеля [17], ленточные графы используются при координатизации пространств модулей. После работ Р. И. Пеннера [8] ленточные графы стали использоваться для описания не только модулярных пространств, но и пространств Тейхмюллера. Ниже приводится явная и простая версия такого описания.

ТЕОРЕМА 2 [18]. Пусть дан трехвалентный ленточный граф $\Gamma \in \Gamma(S)$ ро-

да g с n выколотыми точками. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между множеством точек пространства $\mathcal{T}^H(S)$ и множеством $\mathbb{R}^{\# \text{ребра}}$ ребер этого графа, снабженных вещественными числами.

Ниже приводится явный способ, как построить фуксову группу $\Delta(S) \subset PSL(2, \mathbb{R})$, отвечающую данному набору чисел на ребрах графа $\Gamma \in \Gamma(S)$ и такую, что $S = \mathbb{H}_+^2 / \Delta(S)$.² Для этого необходимо поставить в соответствие каждому элементу γ фундаментальной группы $\pi_1(S)$ элемент $P_\gamma \in PSL(2, \mathbb{R})$.

Каждому ребру α поставим в соответствие матрицу $X_{Z_\alpha} \in PSL(2, \mathbb{R})$ преобразования Мёбиуса

$$X_{Z_\alpha} = \begin{pmatrix} 0 & -e^{Z_\alpha/2} \\ e^{-Z_\alpha/2} & 0 \end{pmatrix}. \quad (2.2)$$

Чтобы запараметризовать *путь* по ребрам графа, введем матрицы “правых” и “левых” поворотов:

$$R = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad L \equiv R^2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -1 \end{pmatrix}, \quad (2.3)$$

и соответствующие операторы R_Z и L_Z :

$$R_Z \equiv RX_Z = \begin{pmatrix} e^{-Z/2} & -e^{Z/2} \\ 0 & e^{Z/2} \end{pmatrix}, \quad (2.4)$$

$$L_Z \equiv LX_Z = \begin{pmatrix} e^{-Z/2} & 0 \\ -e^{-Z/2} & e^{Z/2} \end{pmatrix}. \quad (2.5)$$

Введем понятие *геодезической* (замкнутой геодезической кривой) на графе.

Пусть *замкнутый путь* на графе Γ есть любой ориентированный путь, начинающийся и кончающийся на одном и том же ориентированном ребре графа (ребре с направлением). Каждому такому пути поставим в соответствие произведение матриц

$$P_{Z_1 \dots Z_n} = L_{Z_n} L_{Z_{n-1}} R_{Z_{n-2}} \dots R_{Z_2} L_{Z_1}, \quad (2.6)$$

где матрицы L_{Z_i} или R_{Z_i} ставятся в зависимости от того, какой поворот – левый или правый – путь совершает на соответствующем шаге (пути с разворотами назад не в конечной точке оказываются эквивалентными соответствующим путям (2.6) с убранными аппендиксами). Если путь (2.6) совершает разворот в конечной точке, то необходимо добавить дополнительные матрицы L или R к этому произведению, например, $P_{Z_1 \dots Z_n} \rightarrow LP_{Z_1 \dots Z_n} L$. Тем не менее $\text{tr } P_{Z_1 \dots Z_n}$ не зависит от вставления такого аппендикса.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2 [18]. *Существует взаимно однозначное соответствие между множеством классов сопряженности ориентированных путей $\{P_{Z_1 \dots Z_n}\}$ и множеством замкнутых (ориентированных) геодезических $\{\gamma\}$ на римановой поверхности; длина l_γ геодезической определяется соотношением*

$$G_\gamma \equiv 2 \cosh(l_\gamma/2) = \text{tr } P_{Z_1 \dots Z_n}, \quad (2.7)$$

²Заметим, что гомотопическая группа $\pi_1(S)$ изоморфна группе $\pi_1(\Gamma)$.

где матричное произведение $P_{Z_1 \dots Z_n}$ берется по единственному пути без возвращений назад (не обязательно элементу группы $\pi_1(\Gamma)$, поскольку теперь начальная точка не важна), который отвечает данному классу сопряженности на множестве ориентированных путей в графе Γ .

В дальнейшем функция G_γ называется *геодезической функцией*.

ПРИМЕР 1. Рассмотрим геодезическую γ_j , обходящую вокруг j -й дырки (геодезическую вокруг грани). Тогда, очевидно, соответствующее матричное произведение имеет вид $\text{tr } R_{Z_1} R_{Z_2} \dots R_{Z_n}$ или $\text{tr } L_{Z_1} L_{Z_2} \dots L_{Z_n}$ в зависимости от ориентации. В этом случае, так как все матрицы R_x (L_x) верхне- (нижне-) треугольны, из формулы (2.7) следует, что

$$l_{\gamma_j} = \left| \sum_{i=1}^n Z_i \right|, \quad (2.8)$$

в то время как знак этой суммы зависит от ориентации дырки.

Таким образом, по каждому погруженному графу $\Gamma \in \Gamma(S)$ построена глобальная система координат. Соответственно, существуют отображения переклейки между координатными системами, отвечающими различным погруженным графам, которые и есть, другими словами, морфизмы модулярного группоида. Из теоремы 1 следует, что любая функция переклейки может быть представлена как композиция функций переклеек, отвечающих флипам.

Для флипа функция переклейки дается преобразованием (2.10) ниже. В соответствии с теоремой 1, эти функции переклеек задают координатные выражения для действия группы классов отображений.

2.1.3. Геодезические ламинации. В дальнейшем рассмотрении главную роль играют геодезические, не имеющие самопересечений. В действительности, эти геодезические образуют базис как в классическом, так и в квантовом пространствах геодезических.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Назовем *геодезической ламинацией* (ГЛ) (также называемой *множественной кривой*) на двумерной поверхности гомотопический класс конечного набора само- и взаимно непересекающихся неориентированных замкнутых кривых (замкнутых геодезических). Каждой ГЛ поставим в соответствие произведение $G_{\gamma_1} \dots G_{\gamma_n}$ величин (2.7) для всех геодезических, входящих в ГЛ. Также будем считать, что ГЛ, содержащая стягиваемую кривую (длины нуль), есть удвоенная ГЛ, не содержащая такую кривую.

Будем называть ГЛ *простой*, если она содержит лишь одну (несамопересекающуюся) геодезическую.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Будем называть геодезическую *графически простой* по отношению к графу $\Gamma(S)$, если она не проходит более чем единожды по каждому из ребер графа. Очевидно, что набор всех графически простых геодезических зависит от выбора вложенного графа, всегда конечен, состоит только из самонепересекающихся геодезических и *инвариантен* относительно действия группы классов отображений. Тем не менее, это понятие оказывается полезным в дальнейшем изложении.

2.2. Форма Вейля–Петерсона. На пространстве $\mathcal{T}^H(S)$ существует каноническая пуассонова структура, называемая формой Вейля–Петерсона. Эта структура вырождена, и ее функции Казимира суть длины геодезических, обходящих дырки.

В координатах $\{Z_\alpha\}$ скобка Вейля–Петерсона B_{WP} имеет очень простой вид.

ТЕОРЕМА 3 [18]. В терминах переменных Z_i имеем:

$$B_{\text{WP}} = \sum_v \sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial Z_{v_i}} \wedge \frac{\partial}{\partial Z_{v_{i+1}}}, \quad (2.9)$$

где сумма берется по всем вершинам v , а v_i , $i = 1, 2, 3 \bmod 3$, представляют собой циклически упорядоченный набор индексов ребер, инцидентных данной вершине.

Доказательство [18] основывается на независимости этой формы от выбора вложенного графа и от набора функций Казимира (см. ниже).

Преобразование графа, сохраняющее вид пуассоновой структуры (2.9) при операции флипа и превращающееся в тождество после серии флипов, изображенной на рисунке 1 для дуального графа (т.е. удовлетворяющее *тождеству пятиугольника*), имеет вид, изображенный на рис. 2, где

$$M_Z: \{A, B, C, D, Z\} \rightarrow \{A + \phi(Z), B - \phi(-Z), C + \phi(Z), D - \phi(-Z), -Z\} \quad (2.10)$$

и в классическом случае [18]

$$\phi(Z) = \log(e^Z + 1). \quad (2.11)$$

ЛЕММА 1. Преобразование (2.10), (2.11) сохраняет следы произведений по путям (2.7), так что классические длины геодезических инвариантны относительно действия группы классов отображений.

Рис. 2

Хотя это следует из геометрии (см. [18]), можно и непосредственно проверить, что преобразование (2.9) с функцией $\phi(Z)$ из формулы (2.11) приводит к тождеству $M_Z^2 = I$ и удовлетворяет соотношению пятиугольника, приведенному на рис. 1.

Опишем теперь набор элементов Казимира алгебры (2.9).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. Единственными центральными элементами пуассоновой алгебры (2.9) являются линейные суммы $\sum_{i \in I_\alpha} Z_i$, $\alpha = 1, \dots, n$, где n – число дырок, а I_α – набор индексов ребер (возможно с кратностями), которые образуют границу дырки с номером α (ср. с (2.8)). Все элементы Казимира инвариантны относительно преобразований из группы классов отображений (2.10), поскольку они представляют собой настоящие длины (возможно, с точностью до знаков) геодезических, обходящих вокруг дырок.

2.3. Пуассоновы алгебры геодезических функций. Функции $\{G_\gamma\}$ (2.7) исследовались В. Гольдманом в работе [19]. Они образуют алгебру (как относительно умножения, так и относительно пуассоновой скобки Вейля–Петерсона) над $\mathbb{Z}/2$.

2.3.1. Классическое распутывающее соотношение. Используя формулу $\text{tr}(AB) + \text{tr}(AB^{-1}) - \text{tr} A \cdot \text{tr} B = 0$, которая выполняется для произвольных (2×2) -матриц A и B с единичными детерминантами, можно “распутать” любое произведение геодезических функций, т.е. выразить его в виде однозначно заданной конечной линейной комбинации ГЛ. Рассмотрим часть графа и введем дополнительный множитель $\#G$ – полное число геодезических в графе, который представляет собой объединение соответствующего подграфа и оставшейся части графа, которая считается одной и той же для всех подграфов, участвующих в нижеприведенном соотношении. Тогда классическое распутывающее (skein) соотношение может быть представлено в унифицированном виде

$$(-1)^{\#G} \begin{array}{c} \diagup \quad \diagdown \\ \diagdown \quad \diagup \end{array} + (-1)^{\#G} \begin{array}{c} \text{)} \quad (\end{array} + (-1)^{\#G} \begin{array}{c} \text{)} \quad \text{)} \\ (\quad (\end{array} = 0. \quad (2.12)$$

2.3.2. Пуассоновы скобки для геодезических функций. Рассмотрим пуассонову структуру геодезических функций. Функции двух непересекающихся геодезических имеют тривиальную скобку и, согласно лемме 1, это же верно для любых двух геодезических, входящих в одну и ту же ГЛ. Так как скобка Пуассона $\{\mathcal{A}, \mathcal{B}\}$ всегда представима в виде суммы скобок Пуассона, составляющих $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ (правило Лейбница), достаточно рассмотреть случай одного лишь “простого” пересечения двух геодезических с соответствующими геодезическими функциями G_1 и G_2 вида

$$G_1 = \text{tr}_1 \cdots X_C^1 R^1 X_Z^1 L^1 X_A^1 \cdots, \quad (2.13)$$

$$G_2 = \text{tr}_2 \cdots X_B^2 L^2 X_Z^2 R^2 X_D^2 \cdots, \quad (2.14)$$

где индексы 1 и 2 относятся к матричным пространствам.

Скобка между матрицами X_C^1 и X_B^2 обладает простой r -матричной структурой:

$$\{X_C^1, X_B^2\} = \frac{1}{4}(-1)^{i+j}(e_{ii}^1 \otimes e_{jj}^2)X_C^1 \otimes X_B^2, \quad (2.15)$$

где базисные матрицы e_{ij} имеют единицу на пересечении i -й строки и j -го столбца, а все остальные их элементы – нулевые. Тогда прямые вычисления приводят к ответу

$$\{G_1, G_2\} = \frac{1}{2}(G_H - G_I), \quad (2.16)$$

где функция G_I отвечает геодезической, получаемой, если стереть ребро Z и соединить вместе попарно ребра “ A ” и “ D ” и ребра “ B ” и “ C ” естественным образом; функция G_H отвечает геодезической, дважды проходящей по ребру Z , так что она имеет вид $\text{tr} \cdots X_C R_Z R_D \cdots \cdots X_B L_Z L_A \cdots$ (топологически эти кривые наглядно представлены в выражении (2.12)). Эти соотношения были впервые получены в работе [19] в непрерывной параметризации (классическая алгебра Тураева–Виро).

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Поскольку скобки Пуассона удовлетворяют правилу Лейбница, соотношение (2.16) естественным образом обобщается на случай множественных пересечений (которые могут происходить в том числе и на том же самом ребре).

ПРИМЕР 2. В случае тора $(\mathcal{T}_{1,1}^h)$ имеются три генератора X, Y, Z такие, что

$$\{X, Y\} = \{Y, Z\} = \{Z, X\} = 2$$

(элемент Казимира равен $X + Y + Z$). Тогда геодезические функции трех графически простых геодезических имеют вид:

$$\begin{aligned} G_X &= \text{tr} L X_Y R X_Z = e^{-Y/2 - Z/2} + e^{-Y/2 + Z/2} + e^{Y/2 + Z/2}, \\ G_Y &= \text{tr} R X_X L X_Z = e^{-Z/2 - X/2} + e^{-Z/2 + X/2} + e^{Z/2 + X/2}, \\ G_Z &= \text{tr} R X_Y L X_X = e^{-X/2 - Y/2} + e^{-X/2 + Y/2} + e^{X/2 + Y/2}. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Вводя геодезическую функцию

$$\tilde{G}_Z = \text{tr} L_Y R_Z R_X L_Z = e^{-X/2 - Y/2 - Z} + e^{X/2 - Y/2} (e^{-Z} + e^Z + 2) + e^{X/2 + Y/2 + Z},$$

получаемую из G_Z с помощью преобразования флипа, получим, что $\{G_X, G_Y\} = \tilde{G}_Z/2 - G_Z/2$, и так как из соотношения (2.12) следует, что $G_X G_Y = G_Z + \tilde{G}_Z$, получим:

$$\{G_X, G_Y\} = \frac{1}{2} G_X G_Y - G_Z, \quad (2.18)$$

т.е. классическая пуассонова алгебра замыкается на подмножестве $\{G_X, G_Y, G_Z\}$ геодезических функций (оставшиеся соотношения получаются циклическими перестановками в формуле (2.16)), но за это замыкание приходится платить введением элементов второго порядка в правую часть.

2.3.3. Пуассоновы алгебры геодезических для старших родов. Чтобы обобщить пример 2, необходимо найти такой граф, на котором графически простые геодезические образовывали бы удобный алгебраический базис. Такой граф представлен на рис. 3, на котором m ребер ленточного графа соединяют в скрещивающемся порядке два горизонтальных линейных подграфа; двухвалентные вершины на концах этих подграфов условны. Графически простые замкнутые геодезические в этой картине – это те и только те геодезические, которые проходят ровно по двум различным “вертикальным” ребрам представляющего графа; эти геодезические потому удобно

нумеровать (упорядоченными) индексами этих ребер, т.е. вводятся обозначения $\mathcal{G}_{ij}$, где $i < j$. Пуассонова алгебра функций $\mathcal{G}_{ij}$ имеет вид:

$$\{\mathcal{G}_{ij}, \mathcal{G}_{kl}\} = \begin{cases} 0, & j < k, \\ 0, & k < i, j < l, \\ \mathcal{G}_{ik}\mathcal{G}_{jl} - \mathcal{G}_{kj}\mathcal{G}_{il}, & i < k < j < l, \\ \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{jl} - \mathcal{G}_{il}, & j = k, \\ \mathcal{G}_{il} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{il}, & i = k, j < l, \\ \mathcal{G}_{ik} - \frac{1}{2}\mathcal{G}_{ij}\mathcal{G}_{kj}, & j = l, i < k. \end{cases} \quad (2.19)$$

Граф на рис. 3 имеет род $\frac{m}{2} - 1$ и две грани (дырки), если m четно, и род $(m-1)/2$ и одну грань (дырку), если m нечетно. Такие базисы геодезических для четных m и гладких римановых поверхностей рассматривались в работах [20], [21]. Полученные в этих статьях пуассоновы алгебры геодезических *в точности совпадают* с выражениями (2.19). Это так называемые соотношения $so_q(m)$ алгебр, чьи представления строились и исследовались в работе [22].

В математической литературе эта алгебра также появлялась как пуассонова алгебра данных монодромии (матриц Стокса) для некоторого матричного дифференциального уравнения [23] и как алгебра симплектического группоида верхнетреугольных матриц $\mathcal{G}$ [24]. Для $(m \times m)$ -матриц в этой алгебре присутствуют $\left[\frac{m}{2}\right]$ центральных элементов, порождаемых полиномиальными инвариантами $f_{\mathcal{G}}(\lambda) \equiv \det(\mathcal{G} + \lambda \mathcal{G}^T) = \sum f_i(\mathcal{G})\lambda^i$. Полная пуассонова размерность d алгебры (2.19) равна $\frac{m(m-1)}{2} - \left[\frac{m}{2}\right]$, и при $m = 3, 4, 5, 6, \dots$ имеем $d = 2, 4, 8, 12, \dots$. Размерности соответствующих пространств Тейхмюллера равны $D = 2, 4, 8, 10, \dots$, и тем самым пространства Тейхмюллера вкладываются как *пуассоновы листы* в алгебру (2.19); размерности этих специальных листов становятся меньше максимальной размерности пуассоновых представлений для алгебр (2.19), только начиная с поверхности рода два с двумя дырками.

Рис. 3

3. Квантование

Квантование пуассонова многообразия, которое эквивариантно относительно действия дискретной группы $\mathcal{D}$, представляет собой семейство $*$ -алгебр $\mathcal{A}^{\hbar}$, зависящих от положительного вещественного параметра $\hbar$, в то время как группа $\mathcal{D}$ действует внешними автоморфизмами. Это семейство обладает следующими свойствами.

1. (Плоскостность.) Все алгебры (неканонически) изоморфны как линейные пространства.

2. (Соответствие.) При $\hbar = 0$ алгебра изоморфна как $\mathcal{D}$ -модуль $*$ -алгебре комплекснозначных функций на пуассоновом многообразии.

3. Скобка Пуассона на $\mathcal{A}^0$, задаваемая условием $\{a_1, a_2\} = \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{[a_1, a_2]}{\hbar}$, совпадает со скобкой Пуассона, задаваемой пуассоновой структурой на многообразии.

3.1. Квантование пространств Тейхмюллера. В этом разделе производится квантование пространства Тейхмюллера $\mathcal{T}^{\hbar}(S)$ эквивариантным образом относительно действия группы классов отображений.

Пусть $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma)$, где $\Gamma \in \Gamma_0(S)$, – алгебра, порождаемая генераторами $Z_{\alpha}^{\hbar}$ (по одному генератору на каждое (неориентированное) ребро α), с соотношениями

$$[Z_{\alpha}^{\hbar}, Z_{\beta}^{\hbar}] = 2\pi i \hbar \{z_{\alpha}, z_{\beta}\} \quad (3.1)$$

(ср. с (2.9)) и $*$ -структурой

$$(Z_{\alpha}^{\hbar})^* = Z_{\alpha}^{\hbar}. \quad (3.2)$$

Здесь z_{α} и $\{\cdot, \cdot\}$ обозначают соответствующие координатные функции и скобки Пуассона на классическом пространстве Тейхмюллера. В силу соотношений (2.9) правая часть соотношения (3.1) представляет собой константу, принимающую только пять возможных значений $0, \pm 2\pi i \hbar$ и $\pm 4\pi i \hbar$.

На языке модулярного группоида, нам только что удалось построить по одной $*$ -алгебре для каждого объекта. Теперь, чтобы описать эквивариантность, надо поставить в соответствие каждому морфизму модулярного группоида гомоморфизм соответствующих $*$ -алгебр. Для этого надо поставить в соответствие каждому флипу морфизм алгебр и проверить, что соотношение $M_Z^2 = I$ (рис. 2) и пятичленное соотношение, представленное на рис. 1 для дуального графа, выполнены для морфизмов соответствующих алгебр.

Зададим морфизм флипа по-прежнему соотношением (2.10), но теперь уже с (квантовой) функцией

$$\phi(z) \equiv \phi^{\hbar}(z) = -\frac{\pi \hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp, \quad (3.3)$$

где контур интегрирования Ω идет по вещественной оси и обходит начало координат сверху.

Функция (3.3) есть не что иное, как обобщение Л. Д. Фаддеева [10] функции квантового дилогарифма.

Описываемые алгебры и морфизмы между ними удовлетворяют следующим свойствам.

ТЕОРЕМА 4. 1. Семейство алгебр $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma)$ есть квантование $\mathcal{T}(S)$, где $\Gamma \in \Gamma_0(S)$.

2. Центр алгебры порождается суммами $\sum_{\alpha \in I} Z_{\alpha}^{\hbar}$ по всем ребрам $\alpha \in I$, задающим границу данной грани I .

3. В пределе $\hbar \mapsto 0$ морфизм (2.10), (3.3) совпадает с классическим морфизмом (2.10), (2.11).

4. Морфизм (2.10), (3.3) действительно представляет собой морфизм $*$ -алгебр.

5. Морфизмы $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{T}^{1/\hbar}(\Gamma)$, задаваемые соотношением $Z_{\alpha}^{\hbar} \mapsto Z_{\alpha}^{1/\hbar}$, коммутируют с морфизмами (2.10).

6. Морфизмы флипов удовлетворяют двучленному соотношению $M_Z^2 = I$ (ср. с (2.10)).

7. Морфизмы флипов удовлетворяют соотношению пятиугольника, представленному на рис. 1.³

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Свойства 1, 2 и 6 очевидны.

Свойство 3 будет доказано, если

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \phi^{\hbar}(z) = \log(e^z + 1). \quad (3.4)$$

Поскольку $\lim_{z \rightarrow -\infty} \phi^{\hbar}(z) = 0$, достаточно доказать, что

$$\lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{\hbar}(z) = \frac{1}{e^{-z} + 1}.$$

Левая часть последнего равенства легко вычисляется с помощью вычетов:

$$\begin{aligned} \lim_{\hbar \rightarrow 0} \frac{\partial}{\partial z} \phi^{\hbar}(z) &= \lim_{\hbar \rightarrow 0} \left(-\frac{\pi \hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{-i p e^{-i p z}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp \right) \\ &= \frac{i}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-i p z}}{\sinh(\pi p)} dp = \frac{i}{2} \frac{1}{1 + e^z} \left(\int_{\Omega} - \int_{\Omega+i} \right) \frac{e^{-i p z}}{\sinh(\pi p)} dp \\ &= \frac{-1}{1 + e^z} \operatorname{Res}_{z=i\pi} \frac{e^{-i p z}}{\sinh(\pi p)} = \frac{1}{e^{-z} + 1}. \end{aligned} \quad (3.5)$$

Чтобы доказать свойство 4, необходимо проверить, что $[A + \phi^{\hbar}(Z), B - \phi^{\hbar}(-Z)] = 0$ и $[A + \phi^{\hbar}(Z), D - \phi^{\hbar}(-Z)] = -2\pi i \hbar$ (оставшиеся соотношения очевидно выполнены). Для этого проверим сначала тождество

$$\phi^{\hbar}(z) - \phi^{\hbar}(-z) = z. \quad (3.6)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \phi^{\hbar}(z) - \phi^{\hbar}(-z) &= -\frac{\pi \hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-i p z} - e^{i p z}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp \\ &= -\frac{\pi \hbar}{2} \left(\int_{\Omega} + \int_{-\Omega} \right) \frac{e^{-i p z}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp \\ &= \frac{\pi \hbar}{2} 2\pi i \operatorname{Res}_{z=0} \frac{e^{-i p z}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} = z. \end{aligned}$$

³Этот результат был независимо получен Р. М. Кашаевым [6].

Используя это свойство, можно преобразовать коммутаторы,

$$\begin{aligned} [A + \phi^{\hbar}(Z), B - \phi^{\hbar}(-Z)] &= [A, B] - [A, \phi^{\hbar}(-Z)] + [\phi^{\hbar}(Z), B] \\ &= 2\pi i \hbar \left(-1 - \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}(-\phi^{\hbar}(-Z)) + \frac{\partial}{\partial \bar{Z}}\phi^{\hbar}(Z) \right) = 0. \end{aligned}$$

Аналогично получим:

$$\begin{aligned} [A + \phi^{\hbar}(Z), D - \phi^{\hbar}(-Z)] &= [A, D] - [A, \phi^{\hbar}(-Z)] + [\phi^{\hbar}(Z), D] \\ &= 2\pi i \hbar \left(\frac{\partial}{\partial Z}(-\phi^{\hbar}(-Z)) + \frac{\partial}{\partial Z}\phi^{\hbar}(Z) \right) = 2\pi i \hbar. \end{aligned}$$

Необходимо также проверить, что квантовый морфизм сохраняет вещественную структуру, что, очевидно, эквивалентно условию вещественности для функции $\phi^{\hbar}(z)$. Имеем

$$\begin{aligned} \overline{\phi^{\hbar}(z)} &= -\frac{\pi \hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{ip\bar{z}}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp \\ &= \frac{\pi \hbar}{2} \int_{-\Omega} \frac{e^{ip\bar{z}}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp \\ &= -\frac{\pi \hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ip\bar{z}}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi \hbar p)} dp = \phi^{\hbar}(\bar{z}). \end{aligned}$$

Чтобы проверить свойство 5, достаточно убедиться в том, что морфизм $\mathcal{T}^{\hbar}(\Gamma) \rightarrow \mathcal{T}^{1/\hbar}(\Gamma)$ коммутирует с флипом. Это означает, что $(A + \phi^{\hbar}(Z))/\hbar = A/\hbar + \phi^{\hbar}(Z/\hbar)$, $(B - \phi^{1/\hbar}(-Z))/\hbar = A/\hbar - \phi^{\hbar}(-Z/\hbar)$, и т. д. Тем самым, достаточно доказать, что

$$\phi^{\hbar}(z)/\hbar = \phi^{1/\hbar}(z/\hbar). \quad (3.7)$$

В самом деле,

$$\begin{aligned} \phi^{1/\hbar}(z/\hbar) &= -\frac{\pi}{2\hbar} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz/\hbar}}{\sinh(\pi p) \sinh(\pi p/\hbar)} dp \\ &= -\frac{\pi}{2\hbar} \int_{\Omega} \frac{e^{-iqz}}{\sinh(\pi \hbar q) \sinh(\pi q)} d(q\hbar) = \phi^{\hbar}(z)/\hbar. \end{aligned} \quad (3.8)$$

Перейдем теперь к доказательству наиболее нетривиального свойства 7. Это свойство может быть переформулировано в следующем виде.

Имеется семь генераторов, участвующих в последовательности флипов, изображенной на рис. 1 для дуального графа, на котором они обозначены как A, B, C, D, E, X и Y . В результате флипов часть графа, изображенная на рис. 1, испытывает

циклические вращения. Обозначим через $A_i, B_i, C_i, D_i, E_i, X_i$ и Y_i элементы алгебры, ассоциированные с ребрами этой части графа после того, как выполнены i флипов. Согласно формулам (2.10), (3.3), эти элементы преобразуются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} X_{i+1} \\ Y_{i+1} \\ A_{i+1} \\ B_{i+1} \\ C_{i+1} \\ D_{i+1} \\ E_{i+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Y_i - \phi^h(-X_i) \\ -X_i \\ D_i \\ E_i \\ A_i + \phi^h(X_i) \\ B_i - \phi^h(-X_i) \\ C_i + \phi^h(X_i) \end{pmatrix}. \quad (3.9)$$

Докажем теперь, что это операторное преобразование периодически с периодом пять.

Предположим на время, что уже доказана пятипериодичность для оператора X_i . Тогда пятипериодичность оператора Y_i очевидна, поскольку $Y_{i+1} = -X_i$. Пятипериодичность, например, оператора A_i следует из вычисления

$$X_{i+1} = Y_i - \phi^h(X_i) = -X_{i-1} - \phi^h(X_i).$$

Таким образом,

$$\phi^h(-X_i) = -X_{i+1} - X_{i-1}.$$

С учетом (3.6) получим:

$$\phi^h(X_i) = X_i - X_{i+1} - X_{i-1}.$$

Теперь можно использовать эти тождества, чтобы преобразовать A_{i+5} :

$$\begin{aligned} A_{i+5} &= D_{i+4} = B_{i+3} - \phi^h(-X_{i+3}) = E_{i+2} - \phi^h(-X_{i+3}) \\ &= C_{i+1} + \phi^h(X_{i+1}) - \phi^h(-X_{i+3}) = A_i + \phi^h(X_i) + \phi^h(X_{i+1}) - \phi^h(-X_{i+3}) \\ &= A_i + (X_i - X_{i-1} - X_{i+1}) + (X_{i+1} - X_i - X_{i+2}) + (X_{i+4} + X_{i+2}) \\ &= A_i + X_{i+4} - X_{i-1} = A_i. \end{aligned}$$

Тем самым показано, что пятипериодичность A_i (и тем самым пятипериодичность B_i, C_i, D_i, E_i и Y_i) следует из пятипериодичности оператора X_i .

Докажем теперь пятипериодичность оператора X_i . Для этого введем четыре новых алгебраических элемента:

$$U = e^{X_i}, \quad V = e^{Y_i}, \quad \tilde{U} = e^{X_i/\hbar}, \quad \tilde{V} = e^{Y_i/\hbar}.$$

Они удовлетворяют следующим коммутационным соотношениям:

$$\begin{aligned} U_i V_i &= q^{-2} V_i U_i, & \tilde{U}_i \tilde{V}_i &= \tilde{q}^{-2} \tilde{V}_i \tilde{U}_i, \\ U_i \tilde{V}_i &= \tilde{V}_i U_i, & V_i \tilde{U}_i &= \tilde{U}_i V_i, & \tilde{U}_i &= (U_i)^\hbar, & \tilde{V}_i &= (V_i)^\hbar, \end{aligned} \quad (3.10)$$

где

$$q = e^{-2\pi i \hbar}, \quad \tilde{q} = e^{-2\pi i \hbar}.$$

При флипе эти переменные преобразуются особенно простым образом:

$$U_{i-1} = V_i^{-1}, \quad (3.11)$$

$$V_{i-1} = U_i(1 + q^{-2}V_i), \quad (3.12)$$

$$\tilde{U}_{i-1} = \tilde{V}_i^{-1}, \quad (3.13)$$

$$\tilde{V}_{i-1} = V_i(1 + \tilde{q}^{-2}\tilde{V}_i). \quad (3.14)$$

На первом этапе доказательства рассмотрим законы обратных преобразований для X_i и Y_i :

$$X_{i-1} = -Y_i; \quad Y_{i-1} = X_i + \phi^{\hbar}(Y_i).$$

Уравнения (3.11) и (3.13), очевидно, выполнены. Затем, с использованием стандартной формулы

$$e^{A+F(B)} = e^A e^{\int_B^{B+[A,B]} F(z) dz},$$

получим:

$$\begin{aligned} V_{i-1} &= e^{Y_{i-1}} = e^{X_i + \phi^{\hbar}(Y_i)} = e^{X_i} e^{\int_Y^{Y+2\pi i\hbar} \phi^{\hbar}(z) dz} \\ &= U_i \exp\left(-\frac{\pi\hbar}{2} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}(e^{-2p\pi\hbar} - 1)}{(-ip) \sinh(\pi p) \sinh(\pi\hbar p)} dp\right) \\ &= U_i \exp\left(\frac{\pi\hbar}{i} \int_{\Omega} \frac{e^{-ip(z-\pi i\hbar)}}{p \sinh(\pi p)} dp\right) = U_i(1 + q^{-2}V_i). \end{aligned}$$

Доказательство соотношения (3.14) аналогично.

Теперь для того, чтобы доказать пятипериодичность оператора X_i , достаточно проверить, что оба оператора U_i и $\tilde{U}_i$ являются пятипериодичными. В самом деле, если бы пятипериодичным был бы лишь оператор U_i , то этого было бы еще недостаточно, так как логарифм оператора – величина, определенная неоднозначно. Однако если имеются два семейства операторов U и $\tilde{U}$, которые непрерывно зависят от параметра $\hbar$, тогда, если предположить существование оператора X (также непрерывно зависящего от $\hbar$) такого, что $U = e^X$ и $\tilde{U} = e^{X/\hbar}$, то этот оператор оказывается однозначно определенным. (Его можно найти как предел $\lim_{m+n/\hbar \rightarrow 0} (U^m \tilde{U}^n) / (m + n/\hbar)$ при каждом иррациональном значении параметра $\hbar$.) Пятипериодичность последовательности операторов (3.12) (и (3.14)) проверяется прямым вычислением с использованием соотношений (3.10).

СЛЕДСТВИЕ 1. 1. Пусть K – оператор, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(\mathbb{R})$ и имеющий интегральное ядро

$$K(x, z) = F^{\hbar}(z) e^{-\frac{zx}{2\pi i\hbar}}, \quad (3.15)$$

где

$$F^{\hbar}(z) = \exp\left(-\frac{1}{4} \int_{\Omega} \frac{e^{-ipz}}{p \sinh(\pi p) \sinh(\pi\hbar p)} dp\right). \quad (3.16)$$

Тогда оператор K унитарен с точностью до мультипликативной константы и удовлетворяет тождеству

$$K^5 = \text{const.} \quad (3.17)$$

2. Пусть $\hbar = t/n$ – рациональное число, и предположим, что оба целых числа t и n нечетны. Введем линейный оператор $L(u)$, действующий в пространстве $\mathbb{C}^n$ и зависящий от одного положительного вещественного параметра u , путем задания его матричных элементов:

$$L(u)_j^i = F^\hbar(j, u) q^{-4ij}, \quad (3.18)$$

где

$$F^\hbar(j, u) = (1 + u)^{j/n} \prod_{k=0}^{j-1} (1 + q^{-4k+2} u^{1/n})^{-1}.$$

Тогда имеет место следующее тождество:

$$L(u)L(v + uv)L(v + vu^{-1} + u^{-1})L(u^{-1}v^{-1} + u^{-1})L(v^{-1}) = 1. \quad (3.19)$$

Используя эту конструкцию, Р. М. Кашаев [25] построил набор собственных функций для квантового преобразования дееновского вращения. В обозначениях Кашаева квантовый дилогарифм $e_b(z)$ есть не что иное, как функция $1/F^\hbar(2z)$ из формулы (3.16). Мы вернемся к обсуждению ее свойств при рассмотрении последовательности квантовых дееновских вращений на торе в разделе 4.

3.2. Операторы длин геодезических. Рассмотрим теперь вложение алгебры геодезических (2.7) в подходящее замыкание построенной алгебры $\mathcal{T}^\hbar(S)$.

Для каждой геодезической γ функция G_γ (2.7) выражается в терминах координат графа на пространстве $\mathcal{T}^H$:

$$G_\gamma \equiv \text{tr } P_{Z_1 \dots Z_n} = \sum_{j \in J} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in E(\Gamma)} m_j(\gamma, \alpha) z_\alpha \right\}, \quad (3.20)$$

где $m_j(\gamma, \alpha)$ – целые числа и J – конечный набор индексов. Для того чтобы найти квантовые аналоги этих функций, обозначим через $\widehat{\mathcal{T}}^\hbar$ замыкание алгебры $\mathcal{T}^\hbar$, содержащее величины e^{xZ_α} при каждом вещественном x . Пусть для каждого замкнутого пути γ на поверхности S соответствующий оператор квантовой геодезической $G_\gamma^\hbar \in \widehat{\mathcal{T}}^\hbar$ имеет вид:

$$G_\gamma^\hbar \equiv \times \text{tr } P_{Z_1 \dots Z_n} \times \equiv \sum_{\substack{j \in J \\ \kappa \in \{j\}}} \exp \left\{ \frac{1}{2} \sum_{\alpha \in E(\Gamma)} (m_j(\gamma, \alpha) Z_\alpha^\hbar + 2\pi i \hbar c_j^\kappa(\gamma, \alpha)) \right\}, \quad (3.21)$$

где введение квантового упорядочения $\times \dots \times$ предполагает, что классическое выражение (3.20) подправлено: в него вводятся дополнительные целые коэффициенты $c_j^\kappa(\gamma, \alpha)$, которые определяются нижеприведенными условиями.

Заметим, что операторы $\{G_\gamma^{\frac{1}{\hbar}}\}$ могут рассматриваться как операторы из алгебры $\widehat{\mathcal{T}}^\hbar$. В терминах генераторов алгебры $\widehat{\mathcal{T}}^\hbar$ они имеют вид:

$$G_\gamma^{\frac{1}{\hbar}} = \sum_{j \in J} \exp \left\{ \frac{1}{2\hbar} \sum_{\alpha \in E(\Gamma)} (m_j(\gamma, \alpha) Z_\alpha^\hbar + 2\pi i c_j^\kappa(\gamma, \alpha)) \right\}. \quad (3.22)$$

В дальнейшем для простоты обозначений уберем индекс $\hbar$ из определения квантовой функции $G^\hbar$, которая тем самым будет записываться просто как G , предполагая, что это либо оператор, либо классическая функция, в зависимости от контекста. В оставшейся части статьи будут, главным образом, рассматриваться квантовые функции типа $G^\hbar$; рассмотрение в секторе $G^{1/\hbar}$ аналогично, не приводит к новым эффектам (по крайней мере на данном этапе понимания проблемы) и будет опущено. Также можно называть квантовые геодезические функции просто квантовыми геодезическими, поскольку квантовые объекты вообще допускают только функциональное, а не геометрическое описание.

Сформулируем теперь определяющие свойства квантовых геодезических.

1. Действие группы классов отображений $\Delta(S)$ (2.10) сохраняет множество $\{G_\gamma^\hbar\}$, т.е. для любого $\delta \in \Delta(S)$ и любого замкнутого пути γ имеем $\delta(G_\gamma^\hbar) = G_{\delta\gamma}^\hbar$.

2. *Алгебра геодезических.* Произведение двух квантовых геодезических должно представляться в виде линейной комбинации *квантовых геодезических ламинаций* (КГЛ) и должно получаться из (квантового) распутывающего соотношения [26]. Аналогично классическому случаю, КГЛ представляет собой набор квантовых геодезических, отвечающих само- и взаимно-непересекающимся геодезическим.

3. *Неориентируемость.* Квантовые следы прямого и обратного геодезических операторов должны совпадать.

4. *Степени геодезических.* Квантовая геодезическая $G_{n\gamma}$ с неотрицательным показателем намотки n должна выражаться через квантовую геодезическую G_γ точно так же, как и в классическом случае:

$$G_{n\gamma} = 2T_n(G_\gamma/2), \quad (3.23)$$

где $T_n(x)$ – многочлены Чебышёва.

5. Для любых двух кривых γ и γ' операторы $G_\gamma^\hbar$ и $G_{\gamma'}^{\frac{1}{\hbar}}$ коммутируют.

6. Если замкнутые пути γ и γ' не пересекаются, то соответствующие операторы $G_\gamma^\hbar$ и $G_{\gamma'}^\hbar$ коммутируют.

Из свойства 6 следует, что *все* квантовые геодезические, образующие КГЛ, взаимно коммутируют, и, следовательно, порядок, в котором они входят в КГЛ, не имеет значения.

Обозначим вейлевское упорядочение обычным значком нормального упорядочения $:\cdots$, т.е.

$$: e^{a_1} e^{a_2} \cdots e^{a_n} : \equiv e^{a_1 + \cdots + a_n} \quad \text{для любого множества } \{a_i : a_i \neq -a_j\}. \quad (3.24)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Если квантовые преобразования из группы классов отображений (2.10) переводят графически простую геодезическую G в другую графически простую геодезическую $\tilde{G}$, то для обеих соответствующих квантовых геодезических все коэффициенты $c_j^s(\gamma, \alpha)$ в выражении (3.21) равны нулю.

ПРИМЕР 3. Квантовые геодезические для тора. На торе с одной дыркой имеются три графически простые квантовые геодезические, имеющие в точности вид (2.17) при упорядочении по Вейлю. Тогда квантовая геодезическая $\tilde{G}_Z$, получаемая из G_Z с помощью преобразования флипа, имеет вид:

$$\tilde{G}_Z = e^{-X/2-Y/2-Z} + e^{X/2-Y/2-Z} + e^{X/2-Y/2} \cdot 2 \cos(\pi\hbar) + e^{X/2-Y/2+Z} + e^{X/2+Y/2+Z}. \quad (3.25)$$

Произведение двух графически простых квантовых геодезических имеет вид:

$$G_X G_Y = e^{i\pi\hbar/2} \tilde{G}_Z + e^{-i\pi\hbar/2} G_Z. \quad (3.26)$$

Обозначив $q \equiv e^{-i\pi\hbar}$, $[A, B]_q \equiv q^{1/2}AB - q^{-1/2}BA$ и $\xi \equiv q - q^{-1}$, получим из формулы (3.26), что

$$[G_X, G_Y]_q = \xi G_Z, \quad [G_Y, G_Z]_q = \xi G_X, \quad [G_Z, G_X]_q = \xi G_Y. \quad (3.27)$$

Эта алгебра представляет собой в точности $so_q(3)$ – квантовую алгебру, изучавшуюся в работе [22], т.е. она есть конечнопорожденная алгебра с лексикографическим базисом. В этой алгебре имеется единственный центральный элемент (квантовое соотношение Маркова):

$$\mathcal{M} = G_X G_Y G_Z - q^{1/2}(G_X^2 + q^{-2}G_Y^2 + G_Z^2). \quad (3.28)$$

3.3. Алгебра квантовых геодезических. Пусть квантовые геодезические G_1 и G_2 отвечают соответствующим графически простым геодезическим с единственным нетривиальным пересечением. Таким образом, для функций G_1 и G_2 из формулы (3.21) и предложения 4 следует, что надо применить простое упорядочение Вейля.

После некоторых вычислений получим (ср. с (2.16))

$$G_1 G_2 = e^{-i\pi\hbar/2} G_Z + e^{i\pi\hbar/2} \tilde{G}_Z, \quad (3.29)$$

где G_Z в точности совпадает с классическим выражением для G_1 , упорядоченным по Вейлю (ср. с (2.16)), в то время как выражение для $\tilde{G}_Z$ содержит нетривиальные квантовые поправки:

$$\begin{aligned} \tilde{G}_Z &= \times \text{tr}_1 \text{tr}_2 \cdots (e_{ij}^1 \otimes e_{ji}^2) [X_Z^1 \otimes X_Z^2] \cdots \times \\ &= : \text{tr}_1 \text{tr}_2 \cdots (e_{ij}^1 \otimes e_{ji}^2) [X_Z^1 \otimes X_Z^2 + 2(1 - \cos \pi\hbar) e_{11}^1 \otimes e_{22}^2] \cdots :. \end{aligned}$$

Здесь $e_{ij}^1 \otimes e_{ji}^2$ – стандартная r -матрица, переставляющая пространства “1” и “2”, и в результате получается “распутывающее” соотношение типа (2.16). Локально, это

соотношение имеет в точности вид, предложенный В. Г. Тураевым [26], т.е. для пересекающихся в одной точке графически простых геодезических имеет место определяющее соотношение

$$\begin{array}{c} G_1 \\ \diagdown \\ G_2 \end{array} \begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array} = e^{-i\pi\hbar/2} \begin{array}{c} G_Z \\ \text{---} \end{array} + e^{i\pi\hbar/2} \begin{array}{c} \tilde{G}_Z \\ \text{---} \end{array} \quad (3.30)$$

(Порядок пересечения линий, соответствующих G_1 и G_2 , зависит от того, какая из двух квантовых геодезических занимает первое место в произведении; оставшаяся часть графа остается неизменной для всех членов в формуле (3.30).) Заметим, однако, что если квантовые геодезические G_1 и G_2 отвечают графически простым геодезическим, то геодезическую $\tilde{G}_Z$ можно перевести обратно в графически простую геодезическую $\tilde{G}'_Z$ с помощью квантового флипа относительно ребра Z .

Если теперь сравнить два однозначно определенных выражения: квантовую функцию $\tilde{G}'_Z$, которая теперь просто упорядочена по Вейлю, и $\tilde{G}_Z$, получаемую из геодезической алгебры, то получим, что $\tilde{G}_Z = \tilde{G}'_Z$. Это наблюдение приводит к формулировке основного утверждения.

ЛЕММА 2. *Существует квантовое упорядочение $\times \dots \times$ (3.21), которое порождается алгеброй квантовых геодезических и совместно с квантовыми преобразованиями из группы классов отображений (2.10), т.е. алгебра квантовых геодезических инвариантна относительно действия квантовой группы классов отображений.*

Теперь можно отказаться от ограничений, накладываемых условиями графической простоты кривых: поскольку алгебра квантовых геодезических сохраняется при действии квантовой группы классов отображений, то, имея две *произвольные* несамопересекающиеся геодезические с единственным взаимным пересечением, можно преобразовать эти геодезические с помощью квантовых морфизмов к каноническому виду графически простых геодезических. Соотношение (3.30) остается справедливым в обоих случаях. Обратимся теперь к проблеме многократных пересечений. Для них имеется следующая лемма.

ЛЕММА 3. *Если две КГЛ пересекаются более чем в одной точке, то квантовые распутывающие соотношения (3.30) должны быть применены одновременно во всех точках пересечений.*

Из этой леммы следует справедливость движений Райдемайстера для кривых на графе, если положить пустую петлю равной $-e^{-i\pi\hbar} - e^{i\pi\hbar}$. То есть для произвольных трех пересекающихся геодезических, применяя (3.30) одновременно во всех точках пересечений, получим:

$$(3.31)$$

и

$$(3.32)$$

ПРИМЕР 4. *Квантовая алгебра $\mathcal{M}_{1,2}$.* Рассмотрим алгебру квантовых геодезических на торе с двумя дырками и с базисным графом на рис. 4.

Рис. 4

На графе на рис. 4 имеются шесть графически простых геодезических: $X_1 = \text{tr } R_y R_a L_x L_d$, $X_2 = \text{tr } L_y L_b R_x R_c$, $Y_1 = \text{tr } L_a R_b$, $Y_2 = \text{tr } R_d L_c$, $Z_1 = \text{tr } L_y R_a L_x R_c$ и $Z_2 = \text{tr } R_y L_b R_x L_d$. (Предполагается упорядочение Вейля.) Тогда с помощью прямых вычислений с использованием квантовых распутывающих соотношений (или же прямо из формул (2.4) и (2.5)) проверяется, что соответствующая алгебра имеет следующую структуру (ср. с [27]). Обозначим через $C(t_1, t_2, t_3)$ циклически симметричный набор коммутаторов алгебры $so_q(3)$ $[t_i, t_{i+1}]_q = \xi t_{i+2}$, $i = 1, 2, 3 \bmod 3$ (см. (3.27)). Тогда алгебра $\mathcal{M}_{1,2}$ задается следующими соотношениями:

$$\begin{aligned} & C(X_1, Z_2, Y_1); \quad C(X_2, Y_1, Z_1); \quad C(X_1, Y_2, Z_1); \quad C(X_2, Z_2, Y_2); \\ & [X_1, X_2] = [Y_1, Y_2] = 0, \quad [Z_1, Z_2] = \xi(Y_1 Y_2 - X_1 X_2). \end{aligned} \quad (3.33)$$

Эта алгебра исследовалась в работе [27] в связи с квантованием распутывающих соотношений для скобки Кауффмана; в работе [24] она возникала как квантовая деформация алгебры пуассоновых соотношений в классическом группоиде для группы $SL(4)$.

В алгебре (3.33) имеются два центральных элемента (связанные в нашей картине с геодезическими вокруг дырок):

$$Z_1 Z_2 - q Y_1 Y_2 - q^{-1} X_1 X_2 \quad (3.34)$$

и

$$\begin{aligned} X_1 X_2 Y_1 Y_2 - q^{3/2} X_2 Y_1 Z_1 - q^{-1/2} X_2 Z_2 Y_2 - q^{-3/2} X_1 Y_1 Z_2 - q^{1/2} X_1 Z_1 Y_2 \\ + Y_1^2 + Y_2^2 + q^2 Z_1^2 + q^{-2} Z_2^2 + q^{-2} X_1^2 + q^2 X_2^2, \end{aligned} \quad (3.35)$$

и эта алгебра допускает лексикографическое упорядочение, что следует из формул (3.33).

3.4. Квантование алгебр Нельсон и Редже. В работах [20], [21], [28], [29] алгебра (2.19) была проквантована с помощью техники деформационного квантования. Теперь у нас имеется возможность использовать условия квантования (3.1). Удобно представить генераторы $\mathcal{G}_{ij}^h$ данной алгебры в виде хорд, соединяющих вершины циклически упорядоченного набора индексов $i, j \in \{\dots, m, (1, 2, \dots, m), 1, \dots\}$. Тогда возможны три варианта: если две хорды не пересекаются, то соответствующие геодезические также не пересекаются, а квантовые геодезические коммутируют (рис. 5а); если две хорды имеют общую вершину, то соответствующие геодезические пересекаются в одной точке, и три квантовых геодезических $\mathcal{G}_{ij}^h$, $\mathcal{G}_{jk}^h$ и $\mathcal{G}_{ki}^h$ (изображенные на рис. 5b) образуют квантовую подалгебру $so_q(3)$; если две хорды пересекаются во внутренней точке (рис. 5с), то соответствующие геодезические пересекаются в двух точках, а квантовые геодезические $\mathcal{G}_{ij}^h$ и $\mathcal{G}_{kl}^h$, $i < k < j < l$, удовлетворяют коммутационному соотношению

$$[\mathcal{G}_{ij}^h, \mathcal{G}_{kl}^h] = \xi(\mathcal{G}_{ik}^h \mathcal{G}_{jl}^h - \mathcal{G}_{il}^h \mathcal{G}_{jk}^h) \quad (3.36)$$

с обычным, а не q -коммутирующим.

Рис. 5

3.5. Улучшенное квантовое упорядочение. Обобщим теперь приведенную выше конструкцию КГЛ и рассмотрим произведения матриц X_Z , L и R , не предполагая обязательное применение операции следа. Поставим при этом в соответствие замкнутым кривым (геодезическим) бесконечные периодические последовательности соответствующих матриц вдоль этой кривой (начиная с этого места *учитывая* ориентацию).

В трех случаях, изображенных на рис. 6 внизу, в квантовом случае справедливы следующие соотношения.

Применяя преобразование из группы классов отображений к кривой 1, получим:

$$\begin{aligned}
 X_{B'} L X_{-Z} L X_{A'} &= \begin{pmatrix} e^{-B'/2} e^{-Z/2} e^{A'/2} + e^{-B'/2} e^{Z/2} e^{A'/2} & -e^{B'/2} e^{Z/2} e^{-A'/2} \\ e^{B'/2} e^{-Z/2} e^{A'/2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{A/2-B/2} & -e^{-A/2-B/2-\frac{1}{4}[A,B]} \\ e^{A/2+B/2-\frac{1}{4}[A,B]} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= e^{-\frac{1}{8}[A,B]} \begin{pmatrix} e^{-B/2} e^{A/2} & -e^{-B/2} e^{-A/2} \\ e^{B/2} e^{A/2} & 0 \end{pmatrix} \\
 &= e^{-\frac{1}{8}[A,B]} X_B L X_A.
 \end{aligned} \tag{3.37}$$

Применяя преобразование из группы классов отображений к кривой 2, получим:

$$\begin{aligned}
 X_{C'} R X_{-Z} L X_{A'} &= \begin{pmatrix} e^{-C'/2} e^{Z/2} e^{A'/2} & -e^{-C'/2} e^{Z/2} e^{-A'/2} \\ e^{C'/2} e^{Z/2} e^{A'/2} + e^{C'/2} e^{-Z/2} e^{A'/2} & -e^{C'/2} e^{Z/2} e^{-A'/2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{A/2-C/2+Z/2+\frac{1}{4}[A,B]} & -e^{-A/2-C/2+Z/2} - e^{-A/2-C/2-Z/2} \\ e^{A/2+C/2+Z/2} & -e^{-A/2+C/2+Z/2-\frac{1}{4}[A,B]} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} e^{-C/2} e^{Z/2} e^{A/2} & -e^{-C/2} e^{Z/2} e^{-A/2} - e^{-C/2} e^{-Z/2} e^{-A/2} \\ e^{C/2} e^{Z/2} e^{A/2} & -e^{C/2} e^{Z/2} e^{-A/2} \end{pmatrix} \\
 &= X_C L X_Z R X_A.
 \end{aligned} \tag{3.38}$$

Применяя преобразование из группы классов отображений к кривой 3, получим:

$$\begin{aligned}
 X_{C'} R X_{-Z} R X_{D'} &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-C'/2} e^{Z/2} e^{-D'/2} \\ e^{C'/2} e^{-Z/2} e^{D'/2} & -e^{C'/2} e^{Z/2} e^{-D'/2} - e^{-C'/2} e^{-Z/2} e^{-D'/2} \end{pmatrix} \\
 &= \begin{pmatrix} 0 & -e^{-C/2-D/2+\frac{1}{4}[A,B]} \\ e^{C/2+D/2+\frac{1}{4}[A,B]} & -e^{C/2-D/2} \end{pmatrix} \\
 &= e^{\frac{1}{8}[A,B]} \begin{pmatrix} 0 & -e^{-C/2} e^{-D/2} \\ e^{C/2} e^{D/2} & -e^{C/2} e^{-D/2} \end{pmatrix} \\
 &= e^{\frac{1}{8}[A,B]} X_C R X_D.
 \end{aligned} \tag{3.39}$$

В этих формулах были использованы тождества:

$$\begin{aligned}
 e^{A'/2+C'/2+Z/2} + e^{A'/2+C'/2-Z/2} &= : e^{A/2+C/2} \frac{1}{1+e^{-Z}} (e^{Z/2} + e^{-Z/2}) : \\
 &= e^{A/2+C/2+Z/2}
 \end{aligned} \tag{3.40}$$

и

$$\begin{aligned}
 e^{-A'/2-C'/2+Z/2} &= : e^{-A/2-C/2} (1+e^{-Z}) e^{Z/2} : \\
 &= e^{-A/2-C/2+Z/2} + e^{-A/2-C/2-Z/2},
 \end{aligned} \tag{3.41}$$

где, как и раньше, вертикальные точки обозначают упорядочение по Вейлю (3.24), предполагающее полную симметризацию по всем переменным $\{A, B, C, D, Z\}$.

Достаточно неожиданным результатом оказывается то, что единственная величина, изменяющаяся при преобразованиях из группы классов отображений, есть общий множитель, возникающий при матричном произведении. И даже этот множитель можно легко учесть, если умножить все матрицы левых поворотов L на $e^{-\frac{1}{8}[A, B]}$, а все матрицы правых поворотов R на $e^{\frac{1}{8}[A, B]}$.

Единственная тонкость возникает в случае, когда ребра графа пересекаются более одного раза, что отвечает случаю, когда некоторые из ребер A, B, C, D совпадают. Если предположить, что совпадают ребра A и C , то значение коммутатора $[A, Z]$ удваивается. Тогда можно условно *расщепить* ребро A на два полуребра, с каждым из которых можно ассоциировать матрицу $X_{A/2}$. Тогда применим формулу

$$X_A = X_{A/2} \mathcal{Y} X_{A/2}, \quad \mathcal{Y} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{Y}^T = -\mathcal{Y},$$

в которой матрица $\mathcal{Y}$ антисимметрична относительно транспонирования и сохраняет свой вид при любом изменении ориентации графа. Величины $A/2$ имеют те же коммутационные соотношения и законы преобразований, что и величины A и C в случае однократного пересечения, так что все формулы (3.37), (3.38) и (3.39) сохраняют справедливость, если во всех них заменить $A'/2$ на $A'/4$ и $A/2$ на $A/4$.

Тем самым, получен квантовый аналог леммы 1.

ЛЕММА 4. *Рассматривая бесконечную (периодическую) последовательность матриц с квантовыми переменными в выражениях для X_{Z_i} и совершая замену*

$$\tilde{L} = q^{1/4} L, \quad \tilde{R} = q^{-1/4} R, \quad (3.42)$$

где $q = e^{-i\pi\hbar}$, получим, что произведение матриц

$$\cdots (X_{Z_n} \tilde{L} X_{Z_{n-1}} \tilde{R} \cdots X_{Z_3} \tilde{L} X_{Z_2} \tilde{R} X_{Z_1} \tilde{R}) (\cdots) \cdots \equiv \cdots (\tilde{P}_\gamma) (\tilde{P}_\gamma) \cdots \quad (3.43)$$

вдоль бесконечного (периодического) пути инвариантно относительно действия квантового преобразования из группы классов отображений, графически представленного на рис. 6.

Поскольку мы только что улучшили (или в определенной мере испортили) понятие квантового упорядочения, то теперь возникает необходимость адаптировать к этому определению понятие собственной длины геодезической как в квантовом, так и в классическом случае.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. Будем называть *периодическим пределом* оператора длины геодезической (или просто геодезической длиной в классическом подходе) следующую конструкцию.

Если дан оператор (классическое выражение) $\tilde{P}_\gamma (P_{Z_1 \dots Z_n})$, отвечающий замкнутой (ориентированной) кривой γ и имеющий вид (3.43) для квантового и (2.6) для классического упорядоченного произведения матриц, то определим периодический предел оператора длины с помощью формулы:

$$\text{p.l.}(\gamma) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \log \text{tr}(\tilde{P}_\gamma)^n, \quad (3.44)$$

Рис. 6

где необходимо взять главную ветвь логарифмической функции.

Периодический предел КГЛ (или ГЛ), обозначаемый как $\text{p.l.}(\text{QGL})$ (или $\text{p.l.}(\text{GL})$), равен сумме периодических пределов операторов длин всех геодезических, входящих в ламинацию (эти операторы должны быть при этом положительно определенными), или сумме неотрицательных длин геодезических, вычисленных в метрике Пуанкаре в классическом случае.

Очевидно, что периодический предел классической длины геодезической есть (неотрицательная) длина кривой γ . В квантовом случае определение 4 оказывается нечувствительным к унитарным преобразованиям матричного оператора $\tilde{P}_\gamma \rightarrow U^\dagger \tilde{P}_\gamma U$, что означает, что такой оператор представляет собой нечто похожее на “оператор на границе спектра” [30] и должен быть нечувствителен к выбору отмеченной точки, от которой следует отсчитывать матричное произведение (3.43).

4. Квантование теории Тёрстона

4.1. Канонические измеримые автострады.

4.1.1. Автострады: топологический взгляд. Опишем теперь конструкцию железных дорог (train tracks), или автострад (freeways), предложенную Тёрстоном [13] (подробное введение в предмет содержится в монографии [31]). Идея введения в рассмотрение такой конструкции была связана с описанием пространств Тейхмюллера поверхностей с проколами. Было, в частности, доказано, что такая конструкция дает асимптотическое описание границы пространства Тейхмюллера. Мы принимаем несколько другую точку зрения и рассматриваем параметры теории Тёрстона как *дополнительный* набор данных на римановой поверхности.

Начнем с описания проективизованных отщепленных измеримых ламинаций, введенных в работах А. Пападопулоса и Р. Ч. Пеннера [32].

Пусть *автострада* представляет собой граф с конечным набором ребер конечной длины, нарисованный на римановой поверхности таким образом, что его ребра не пе-

ресекаются нигде, кроме своих конечных точек, и не имеют самопересечений. При этом все вершины трехвалентны и, более того, внутренние касательные векторы трех ребер, входящих в одну вершину (также называемую *стыком*) или совпадают, или противоположны (два вектора всегда совпадают, а оставшийся всегда противоположен двум предыдущим; при этом возникает структура, напоминающая стыки железнодорожных путей или вилки на автострадах). Но, в отличие от автострад, здесь необходимо также ввести набор *соотношений эквивалентности* между различными автострадами. Во-первых, они рассматриваются как топологические объекты в том смысле, что две автострады, переводимые друг в друга гладкими преобразованиями, эквивалентны. Не разрешаются тупиковые вершины; каждое ребро начинается и кончается в трехвалентной вершине (возможно, той же самой); кроме того, запрещены пустые (стягиваемые) петли, состоящие из одного или двух ребер графа; тем не менее, пустые петли треугольной формы

(4.1)

допускаются. Затем, допускаются операции расщепления и слияния автострад, т.е. вводятся соотношения эквивалентности

(4.2)

С помощью этих соотношений эквивалентности любая пустая петля в графе приводится к набору треугольных петель, описанных в (4.1).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. Будем называть автостраду *несущей ламинацией*, если существует ламинация, которая может быть гладким образом (без изломов кривых ламинации) преобразована в кривую (набор кривых), нарисованную на автостраде таким образом, чтобы любое из ребер автострады несло на себе отрезок хотя бы одной из кривых из этого набора.

Автострады, удовлетворяющие этому свойству, называются *рекуррентными*. В противном случае автострада называется *нерекуррентной*.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 6. Будем называть автостраду *обладающей поперечными мерами*, если каждому ребру автострады можно поставить в соответствие положительное вещественное число w_i таким образом, что эти числа удовлетворяют условиям слияния во всех стыках графа: если ребро 1 разделяется (расщепляется) на ребра 2 и 3, то

$$w_1 = w_2 + w_3. \quad (4.3)$$

Все автострады, обладающие поперечными мерами, рекуррентны, и наоборот; соответствие легко установить: пусть поперечная мера есть натуральное число, показывающее сколько раз кривые из ламинации проходят по данному ребру. Тогда соотношение (4.3) представляет собой просто условие гладкости соответствующих кривых в данном стыке.

В дальнейшем рассматриваются только автострады, имеющие поперечные меры, так как только такие автострады важны при описании пространств наблюдаемых 3D гравитации. Заметим, что это условие накладывает ограничения на возможные соотношения эквивалентности. Например, если фиксированы поперечные меры на четырех ребрах, сливающихся с центральным ребром в левой части условия (4.2) (заметим, что и эти поперечные меры при этом уже не произвольны: они должны удовлетворять требованию, что сумма поперечных мер на двух ребрах, сливающихся на левом стыке, должна быть равна сумме поперечных мер двух ребер, расщепляющихся на правом стыке), то имеет место лишь один из трех указанных в правой части вариантов расщепления, в зависимости от того, каким (не)равенствам удовлетворяют поперечные меры входящих и исходящих ребер.

4.1.2. Канонические автострады. Если заданы ленточный граф, задающий разбиение римановой поверхности на несвязные грани, каждая из которых содержит ровно одну дырку, и автострада, то можно гладким образом преобразовать автостраду в автостраду, лежащую на ленточном графе. Если эта автострада обладает поперечными мерами, то можно использовать соотношения эквивалентности (4.2), чтобы привести ее к каноническому виду.

Сначала приведем все пустые петли к треугольному виду (4.1). Будем называть ребра автострады, составляющие эти петли, *короткими* ребрами, а все остальные ребра – *длинными*. Также введем раздутие вершин ленточного графа, чтобы можно было рассматривать гладкие стыки и расщепления ребер автострады в этих вершинах.

В каждом классе эквивалентности автострад, имеющих поперечные меры, существует единственный представитель, у которого есть одно или нет ни одного длинного ребра на каждом ребре ленточного графа (отсутствие ребра эквивалентно нулевой поперечной мере), а в каждой раздутой трехвалентной вершине ленточного графа имеет место либо одна треугольная пустая петля (4.1), состоящая из трех коротких ребер, либо один стык, либо двухточечная вершина (ребра, входящие в нее, испытывают поворот), или ничего. Будем называть такую автостраду *канонической* по отношению к выбранному ленточному графу. (Она также иногда называется *каноническим измеримым слоением* (foliation).) Будем интерпретировать набор поперечных мер $\{r_i\}$, $r_i \geq 0$, где индекс i пробегает множество всех (неориентированных) ребер ленточного

графа, как *новый* набор данных на ленточном графе, который дополнителен к набору координат пространства Тейхмюллера $\{Z_i\}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 7. Пусть дан набор неотрицательных вещественных чисел $\{r_i\}$ на ребрах ленточного графа такой, что эти числа удовлетворяют набору неравенств треугольника в каждой (трехвалентной) вершине ленточного графа. Тогда ассоциируем с этим набором чисел единственную измеримую *каноническую автостраду*, отвечающую данному ленточному графу.

Пока еще видно существенное различие между наборами переменных $\{Z_i\}$ и $\{r_i\}$, так как в первом случае координат пространства Тейхмюллера не наблюдается никаких ограничений типа ограничений, происходящих из неравенств треугольника или из условий неотрицательности меры. Поэтому представляется естественным найти такое описание измеримых канонических автострад, которое было бы по возможности наиболее близко описанию координат пространства Тейхмюллера.

Перед тем как описать эти переменные, введем вспомогательное понятие *границной компоненты* автострады. Рассмотрим часть автострады, гомеоморфную границе грани ленточного графа. Эта часть представляет собой в общем случае циклическую последовательность чередующихся длинных и коротких ребер автострады. Тогда, используя соотношение эквивалентности, можно отделить граничную компоненту, которая представляет собой максимальную отделимую часть автострады, гомеоморфную границе грани ленточного графа. Очевидно, что ее поперечная мера равна минимуму поперечных мер коротких ребер, входящих в набор граничных ребер.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 8. Будем называть *отщепленными измеримыми автострадами* классы эквивалентности канонических измеримых автострад, представители которых отличаются только своими граничными компонентами. В каждом таком классе содержится единственная *минимальная отщепленная измеримая автострада* с пустой граничной компонентой.

Две измеримые автострады с соответствующими поперечными мерами $\{r_i^{(1)}\}$ и $\{r_i^{(2)}\}$ называются *проективно эквивалентными*, если $\{r_i^{(1)}\} = \xi \{r_i^{(2)}\} \quad \forall i$ с некоторым положительным параметром ξ .

Теперь мы, наконец, в состоянии ввести переменные, которые представляют собой аналог координат пространств Тейхмюллера.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 9. Пусть *проективизованная отщепленная измеримая автострада* задается набором вещественных чисел $\{h_i\}$, заданных на ребрах ленточного графа (эти числа обычно называются *h-длинами*) и таких, что $\sum_{i \in I_\alpha} h_i = 0$ вдоль границы любой грани, и вводится соотношение (проективной) эквивалентности $h_i \sim \xi h_i$, $\xi \in \mathbb{R}_+$. Тогда существует взаимно однозначное соответствие между набором $\{h_i\}$ и набором проективизованных отщепленных измеримых автострад с поперечными (проективизованными) мерами r_i на ребрах. Точное соответствие дается формулой

$$h_Z = \frac{1}{2}(r_A - r_B + r_C - r_D), \quad (4.4)$$

см. рис. 7.

В соответствии с этой конструкцией и в силу предложения 3, можно заключить, что во всякой значимой конструкции можно пренебрегать граничными компонентами автострад.

4.1.3. Преобразования группы классов отображений для h -длин. Найдем теперь, как h -длины преобразуются под действием элементов из группы классов отображений, т.е. найдем аналог формулы (2.10) для канонических измеримых автострад.

ЛЕММА 5. *Под действием преобразования из группы классов отображений, представленного на рис. 2, соответствующие h -длины ребер A , B , C , D и Z , расположенные так, как показано на рисунке, преобразуются по формуле (2.10) $(M_Z\{h_A, h_B, h_C, h_D, h_Z\} \rightarrow \{h_A + \phi_H(h_Z), h_B - \phi_H(-h_Z), h_C + \phi_H(h_Z), h_D - \phi_H(-h_Z), -h_Z\})$ с*

$$\phi_H(h_Z) = (h_Z + |h_Z|)/2, \quad (4.5)$$

т.е. функция $\phi_H(x) = x$ при $x > 0$ и равна нулю в противном случае. При этом h -длины других ребер графа остаются неизменными.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Сравнивая выражения для классических функций $\phi(x)$ (2.11) и (4.5), легко найти, что последняя представляет собой просто *проективный предел* первой:

$$\phi_H(x) = \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \phi(\lambda x), \quad (4.6)$$

откуда следует, что эти преобразования совпадают в области больших абсолютных значений координат пространства Тейхмюллера $\{Z_\alpha\}$, т.е. они совпадают *асимптотически*. Это свойство активно используется в разделе 4.3.2 при доказательстве основной теоремы.

(случай $h_Z > 0$)

Рис. 7

4.2. Аппроксимирующие ламинации и основная теорема. Введем теперь понятие, играющее главную роль в дальнейшей конструкции.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10. Последовательность $\{n_i\}^\beta \equiv \vec{n}^\beta$ целых чисел называется *аппроксимирующей последовательностью* для проективизованной отщепленной измеримой автострады $\vec{h}$, если $\lim_{\beta \rightarrow \infty} n_i^\beta / n_j^\beta = h_i / h_j$ для всех i, j . Равномерность предела следует просто из того, что векторы $\vec{n}^\beta$ и $\vec{h}$ имеют конечную размерность. Будем называть эти числа *n-длинами*.

Подобно автострадам, граничные компоненты ГЛ суть кривые, входящие в ламинацию и параллельные границам (дыркам или проколам) на поверхности. Можно определить классы эквивалентности ГЛ по отношению к добавлению или стиранию таких граничных компонент независимо для каждой грани. В каждом таком классе имеется единственная *минимальная* ГЛ с пустыми граничными компонентами.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11. *Аппроксимирующая геодезическая ламинация* $GL_{\vec{m}^\beta}$ – это единственная ГЛ с пустыми граничными компонентами, которая однозначно строится по вектору $\{n_i\}^\beta$. Пусть m_i^β – неотрицательное целое число, показывающее, сколько раз компоненты этой ГЛ проходят по i -му ребру. Тогда очевидно, что, например, для ребра Z на рис. 7 $n_Z^\beta = \frac{1}{2}(m_A^\beta - m_B^\beta + m_C^\beta - m_D^\beta)$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 12. *Графическая длина* $GL_{\vec{m}}$ (обозначаемая как $g.l.(GL_{\vec{m}})$) – это линейная функция $f(\vec{m}) = \sum_i a_i m_i$, где a_i – строго положительные вещественные числа. В частном случае, когда все эти числа равны единице, эта функция есть просто полное число ребер (с кратностями), проходимых компонентными кривыми $GL_{\vec{m}}$.

Функция графической длины обладает очевидными свойствами аддитивности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 13. Будем называть *проективизованной ГЛ* класс эквивалентности аппроксимирующих ГЛ (с нулевыми граничными компонентами), нарисованных на ленточном графе и определяемых наборами целых чисел $\{n_i\}$ (*n-длинами*) на ребрах графа, такими, что $\sum_{i \in I_\alpha} n_i = 0$ на каждой граничной компоненте, а соотношение (проективной) эквивалентности имеет вид $n_i \sim kn_i$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Единственным эффектом от умножения $\vec{n}$ на k будет то, что каждая компонента исходной ГЛ будет входить в полученную ГЛ k раз.

Перейдем теперь к детальному описанию случая тора с дыркой (проколом) (см. пример 2). Каждая минимальная проективизованная ГЛ для тора параметризуется тремя неотрицательными целыми числами (m_X, m_Y, m_Z) , удовлетворяющими одному из трех *равенств* треугольника $m_i = m_j + m_k$, где индексы i, j, k различны и принимают значения X, Y, Z , а проективизация сводится к тому, что можно положить $\text{НОД}(m_j, m_k) = 1$, используя эту степень свободы.⁴ Для тора с одной дыркой пространство проективизованных ГЛ тем самым топологически представляет собой окружность; на рис. 8 символически представлено движение по этому кругу; соотношения $\sim$ обозначают соотношения эквивалентности между различными граничными случаями (соответствующие величины должны быть при этом близки друг к другу в проективном пределе), в то время как стрелки обозначают непрерывные преобразования, переводящие один граничный случай в другой; параметр m предполагается большим положительным целым числом.

⁴Соответствующая ГЛ тогда будет просто однокомпонентной; в проективном пределе это представляется тем не менее ситуацией общего положения даже и в гораздо более сложном и общем случае псевдоаносовских отображений.

На рис. 8 те же обозначения G_X и т. д., что и раньше (см. (2.17)), используются в несколько ином смысле. Эти величины теперь представляют собой (2×2) -матрицы, а не просто геодезические функции, т. е. в соответствующих формулах их следы не вычисляются. Тогда, очевидно, имеет место неоднозначность в выборе места в графе, с которого следует начинать отсчет матричного произведения. Это место отмечено поперечным сечением, с которого и следует начинать отсчет (пунктирная линия). Изменение сечения начала отсчета при движении по окружности топологически соответствует переходам с одной карты на другую в атласе карт, накрывающих окружность.

Чтобы переход был непрерывен в граничных точках, например, в верхнем отмеченном случае на рис. 8, надо обеспечить, чтобы соответствующие функции для величин $G_X^m G_Z^{(1)}$ и $G_X^m \tilde{G}_Z^{(1)}$ совпадали в пределе $m \rightarrow \infty$ друг с другом и с соответствующей величиной, вычисленной для простой “короткой” геодезической функции G_X . Это оправдывает выбор именно *длины* геодезической (см. определение 4) в качестве такой подходящей величины. В самом деле, если имеются две (2×2) -матрицы G_X и G_Z , отвечающие геодезическим кривым, то их можно привести к диагональному виду с помощью унитарных преобразований с соответствующими унитарными матрицами U_X и U_Z . На диагоналях при этом стоят вещественные собственные значения $e^{\pm l_X/2}$ и $e^{\pm l_Z/2}$, так как оба элемента – гиперболические. Тогда получим:

$$\text{tr } G_X^m G_Z = \text{tr} \begin{pmatrix} e^{ml_X/2} & 0 \\ 0 & e^{-ml_X/2} \end{pmatrix} V \begin{pmatrix} e^{l_Z/2} & 0 \\ 0 & e^{-l_Z/2} \end{pmatrix} V^{-1}, \quad V = U_X^{-1} U_Z, \quad (4.7)$$

и периодический предел (3.44) дает $ml_Z/2 + O(1)$.⁵ Теперь, чтобы получить проективный предел, нам необходимо “устранить” множитель m каким-либо согласованным способом; это достигается простым делением результата на графическую длину кривой. Согласно определению 12, $\text{g. l.}(G_X^m G_Z) = m \cdot \text{g. l.}(G_X) + \text{g. l.}(G_Z)$, так что эта величина растет пропорционально m . Это рассуждение оправдывает выбор функции длины l_γ (или $p.l.(\gamma)$ в квантовом случае, см. (3.44)) как подходящего объекта исследования потому, что именно эта функция обладает свойствами линейности для всех, а не только длинных, кривых.⁶

Сформулируем теперь *основное утверждение* работы [12].

ТЕОРЕМА 5. *Если на ленточном графе задан набор $\vec{h}$ h -длин, то для любой последовательности $\vec{h}^\beta$ n -длин, аппроксимирующей $\vec{h}$, и для соответствующей*

⁵Если только матрица $U_X^{-1} G_Z U_X$ с единичным детерминантом не имеет вид $\begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} \\ r & \phi \end{pmatrix}$; однако для того, чтобы эта матрица задавала гиперболический элемент (имеющий два вещественных собственных значения), необходимо, чтобы величина ϕ была вещественным числом, бóльшим двух; умножая эту матрицу на вышеприведенную диагональную матрицу, получим матрицу того же вида $\begin{pmatrix} 0 & -r^{-1} e^{ml_X/2} \\ r e^{-ml_X/2} & \phi e^{-ml_X/2} \end{pmatrix}$, но с заменой $\phi \rightarrow \phi e^{-ml_X/2}$, что означает, что начиная с некоторого m эта матрица перестанет соответствовать гиперболическому элементу. Тем самым, приходим к противоречию, поскольку *все* элементы фуксовой группы – гиперболические, а элемент $G_X^m G_Z$ обязан быть элементом фуксовой группы при любом m .

⁶Например, функция $\log \text{tr } G_X$ также обладает свойством линейности, но только для длинных кривых; с ее помощью не удастся построить непрерывный переход в случаях, вынесенных в рамку на рис. 8.

аппроксимирующей ГЛ $GL_{\vec{m}}$ (с пустыми граничными компонентами) предел

$$\lim_{\beta \rightarrow \infty} \frac{\text{p.l.}(GL_{\vec{m}^\beta})}{\text{g.l.}(GL_{\vec{m}^\beta})} \quad (4.8)$$

существует как в классическом, так и в квантовом смысле (в последнем случае – в слабом операторном смысле). Так как при этом и числитель, и знаменатель аддитивны, этот предел проективно инвариантен, а потому задает непрерывную функцию (в классическом случае) или слабо непрерывное семейство операторов (в квантовом случае) на самом множестве метризованных автострад.

Этот предел интерпретируется как *квантование* теории автострад, или теории Тёрстона.

Элементы доказательства этой теоремы будут предъявлены лишь для случая тора с одним проколом. Тем не менее, доказательство классического утверждения этой теоремы может быть согласованным образом обобщено на случай произвольной (открытой) римановой поверхности [14], [15] и есть основания ожидать, что то же будет выполнено и в квантовом случае. Доказательство основано на применении преобразований из группы классов отображений к цепочкам операторов, образующих аппроксимирующие КГЛ. При этом активно используется структура цепных дробей (ц.д.), специфическая для случая тора. Стоит отметить, что существует *альтернативный*, комбинаторный способ доказательства утверждения теоремы. Однако он имеет место только в классическом случае, так как в рамках этой процедуры не удастся контролировать квантово-упорядоченные величины.

4.3. Элементы доказательства.

4.3.1. Разложение в цепную дробь. В каждой области “непрерывности” на рис. 8 аппроксимирующая ламинация задается двумя неотрицательными целыми числами, m_1 и m_2 , и будем предполагать, что $m_1 > m_2$, $\text{НОД}(m_1, m_2) = 1$; при этом удобно представить отношение m_2/m_1 в виде (конечной) ц.д.:

$$m_2/m_1 = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots + \frac{1}{a_{n-1} + \frac{1}{a_n}}}}. \quad (4.9)$$

Рассмотрим теперь случай $m_X = m_2$, $m_Y = m_1$ и $m_Z = m_X + m_Y$ и опишем рекуррентную процедуру построения выражения для соответствующей аппроксимирующей ГЛ (или просто геодезической, так как любая аппроксимирующая ГЛ для тора с одной дыркой всегда представляет собой несколько раз повторенную одну и ту же геодезическую кривую).

Чтобы представить эту процедуру в наглядном виде, нарисуем линию

$$\begin{array}{ccccccccccc} \bullet & \bullet & \dots & \bullet & \bullet & \circ & \dots & \circ & \dots & \circ & \circ \\ 1 & 2 & & m_1 - 1 & m_1 & m_1 + 1 & & m_1 + m_2 - 1 & m_1 + m_2 & & \end{array}, \quad (4.10)$$

Рис. 8

которая представляет собой (правую сторону) сечения по ребру Z (гомотопически эквивалентного сечению h_Z на рис. 7). Тогда геодезическая функция строится следующим образом. Рассматривая ламинацию на ребре Z , начнем с наинизшей линии из тех, что идут от ребра Z к ребру X (эта линия отмечена числом один в кружке на рис. 7) и движутся направо (это отвечает взятию самого левого $\circ$ в (4.10)). При этом такому проходу последовательно по ребрам Z и X ставится в соответствие матрица G_Y , а путь возвращается к линии (4.10) и должен быть периодически продолжен в том смысле, что мы всякий раз попадаем в точку, отстоящую вправо от предыдущей на рассто-

ание m_2 точек (в случае первого шага – это самая левая точка $\bullet$ в формуле (4.10)). Всякий раз при проходе через жирную точку в произведении ставится оператор G_X , а при проходе через кружок – оператор G_Y .

Таким образом совершается движение по периодически продолженной цепочке из жирных точек и кружков, при этом на каждом шаге происходит скачок на m_2 точек вправо и записывается соответствующий оператор G_X или G_Y . Напомним, что по соглашению, операторы в соответствующих произведениях упорядочены справа налево. То есть первый оператор – самый правый и т. д. Теперь опишем рекуррентную процедуру, как, имея разложение ц. д. (4.9), можно построить соответствующую ему последовательность операторов. Будем производить построение поэтапно. Рассмотрим окрестность стартовой линии (т.е. точки $m_1 + 1$ в формуле (4.10)). Тогда каждый этап заканчивается в тот самый момент, когда мы оказываемся *ближе* к начальной линии 1 по сравнению с расстоянием до этой линии в начале этапа, приближаясь к ней со стороны, *противоположной* той стороне, с которой мы находились в начале этапа (см. рис. 9). Пусть L_i обозначает последовательность операторов для первых i этапов.

Завершим самый первый этап в тот момент, когда линия окажется на расстоянии ближе чем m_2 слева от начальной линии; отсюда следует, что $L_1 = G_X(G_Y)^{a_1}$. Введем также обозначение $\tilde{L}_0 = G_X$. Еще одно важное обозначение – это $\tilde{L}_i, i \geq 1$, которое обозначает оператор L_i (составленный из элементарных операторов G_X и G_Y), в котором *первые два* символа операторов должны быть переставлены: первым символом в L_i является G_Y , вторым – G_X , тогда первым символом последовательности $\tilde{L}_i$ будет G_X , а вторым – G_Y , в то время как все остальные символы операторов остаются на своих местах. Эта процедура изображена графически на рис. 9.⁷

Тогда имеем:

$$L_2 = (L_1)^{a_2-1} \tilde{L}_0 L_1. \quad (4.11)$$

Последующие выражения имеют вид:

$$\begin{aligned} L_3 &= (\tilde{L}_2)^{a_3-1} L_1 L_2, \\ L_4 &= (L_3)^{a_4-1} \tilde{L}_2 L_3, \\ L_5 &= (\tilde{L}_4)^{a_5-1} L_3 L_4, \\ &\dots\dots\dots \end{aligned}$$

из которого уже ясна структура рекуррентных соотношений.

⁷Важно отметить, что мы останавливаемся всякий раз, когда становимся ближе к начальной линии; всякий раз это происходит с противоположной стороны (а через два этапа происходит возвращение на ту же сторону), что следует просто из свойств разложения в цепные дроби. Это сразу приводит к нижеприведенной рекуррентной формуле. Также отсюда становится ясным происхождение величин с волнистой линией наверху. Всякий раз, когда в рекуррентном процессе мы начинаем движение с линии, “параллельной” некоторой L_k , с правой стороны от начальной линии (т.е. в области кружков), получается *в точности та же* последовательность операторов, так как, по определению, в последовательности L_k не встречаются линии, кроме самой первой, которые оказались бы на расстоянии, меньшем, чем $|L_k|$, от начальной линии. С другой стороны, если начинать движение слева от начальной линии, то надо переставить в точности *первые два* оператора полученной последовательности.

Рис. 9

ЛЕММА 6. Последовательность операторов L_n , отвечающих последовательности аппроксимирующих ламинаций, которая приближает разложение в виде бесконечной ц.д., задаваемой полубесконечным набором положительных целых чисел $\{a_1, a_2, \dots, a_{n-1}, a_n, a_{n+1}, \dots\}$, где каждый оператор L_n определяется из разложения ц.д. вида (4.9), подчиняется следующему рекуррентному соотношению:

$$\begin{aligned} L_{2i} &= (L_{2i-1})^{a_{2i}-1} \tilde{L}_{2i-2} L_{2i-1}, \quad \text{для } i \geq 1, \quad \tilde{L}_0 = G_X, \quad L_1 = (G_X)^{a_1} G_Y. \\ L_{2i+1} &= (\tilde{L}_{2i})^{a_{2i+1}-1} L_{2i-1} L_{2i} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Здесь периодический предел (3.44) оператора, соответствующего i -й аппроксимирующей ламинации, имеет вид $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \operatorname{tr} L_i^n$.

Операторы L_i и $\tilde{L}_i$ обладают интересными коммутационными свойствами. Отметим, во-первых, что при всяком номере i существует ламинация, отвечающая оператору L_i (поскольку в этом случае соответствующую геодезическую линию можно замкнуть без самопересечений). Поэтому имеется возможность рассмотреть соответствующие геодезические линии и геодезические функции. Первое наблюдение относится к L_i и $\tilde{L}_i$. Одна из этих последовательностей может быть получена из другой параллельным сдвигом на линии h_Z , а потому они не пересекаются и, следовательно, соответствующие геодезические линии гомеоморфны на торе. Поэтому

$$\operatorname{tr} L_i = \operatorname{tr} \tilde{L}_i, \quad i \geq 1. \quad (4.13)$$

Далее, кривые L_i и L_{i+1} всегда имеют ровно одно пересечение (с точностью до движений Райдемайстера (3.32)). Это легко увидеть, если рассмотреть, как соответствующие геодезические линии проходят через сечение h_Z . Одна из этих кривых с необходимостью несет нечетный индекс $2k+1$. Совершим малый сдвиг всех линий этой кривой направо по отношению к линиям второй кривой L_{2k} (или L_{2k+2} , в зависимости от ситуации). При этом обнаружим, что никаких пересечений кривых не происходит вне области, заключенной между конечными точками последовательностей L_{2k+1} и L_{2k} (или L_{2k+2}), а при замыкании кривых в этой области обнаруживается единственная

точка пересечения. Тогда, например, в случае, когда $i = 2k$, имеют место соотношения (в обозначениях формулы (3.27))

$$[L_{2k}, L_{2k+1}]_q = \xi \times_{\times} \text{tr } L_{2k+1} L_{2k} \times_{\times} \quad \text{и} \quad [L_{2k+1}, L_{2k}]_q = \xi \times_{\times} \text{tr} (\tilde{L}_{2k})^{a_{2k+1}-1} L_{2k-1} \times_{\times}, \quad (4.14)$$

где в правых частях формул предполагается квантовое упорядочение.

4.3.2. Преобразования группы классов отображений и процедура расстегивания. Отталкиваясь теперь от разложения п.д. вида (4.9), можно построить процедуру расстегивания для автостреды и соответствующую серию преобразований группы классов отображений (модулярных преобразований), которая приводит произвольную аппроксимирующую ламинацию к некоторой ламинации из конечного набора базисных ламинаций (графически простых геодезических). А именно, используется то хорошо известное обстоятельство, что, имея всего лишь одну замкнутую геодезическую кривую без самопересечений, нарисованную на графе, отвечающем тору с дыркой, и не гомеоморфную границе дырки, можно построить из нее любую другую такую кривую после конечного числа модулярных преобразований, представленных на рис. 6.

Будем интерпретировать каждое модулярное преобразование как деновское вращение (твист) вокруг замкнутой кривой. С помощью представления (4.12) для оператора геодезической кривой, заданного разложением п.д. (4.9), применяя два (унитарных) оператора D_X и D_Y модулярных преобразований вида (3.15), которые отвечают соответствующим деновским вращениям вдоль (замкнутых) кривых γ_X и γ_Y (с соответствующими геодезическими функциями G_X и G_Y), можно построить последовательность застегивающих или расстегивающих преобразований.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 14. Аппроксимирующая ламинация на торе с дыркой задается двумя неотрицательными целыми числами m_1 и m_2 . Обозначим ее, как на рис. 8, тройкой чисел $(m_1, m_2, m_1 + m_2)$. Тогда в предположении, что $m_1 > m_2$, действие деновского вращения D_Y^{-1} вокруг кривой γ_Y^{-1} (это *расстегивающее* преобразование – деновское вращение в противоположном направлении) имеет своим результатом $D_Y^{-1}(m_1, m_2, m_1 + m_2) \rightarrow (m_1 - m_2, m_2, m_1)$. Если $m_1 < m_2$, то следует применить расстегивающее отображение вокруг кривой γ_X^{-1} , что даст $D_X^{-1}(m_1, m_2, m_1 + m_2) \rightarrow (m_1, m_2 - m_1, m_2)$. Теперь, имея разложение п.д. вида (4.9), можно построить последовательность расстегивающих отображений

$$D_{(X \text{ или } Y)}^{-a_n} D_{(Y \text{ или } X)}^{-a_{n-1}} \cdots D_Y^{-a_3} D_X^{-a_2} D_Y^{-a_1}, \quad (4.15)$$

которая, будучи применена к аппроксимирующей ламинации $(m_1, m_2, m_1 + m_2)$, приводит ее либо к виду $(1, 0, 1) \equiv \gamma_Y$ при четных n , либо к виду $(0, 1, 1) \equiv \gamma_X$ при нечетных n .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 15. Эквивалентно, можно рассмотреть процедуру *застегивания*, т.е. результат применения последовательности чередующихся деновских вращений $D_Y^{a_1} D_X^{a_2} D_Y^{a_3} \cdots D_Y^{a_{n-1}} D_X^{a_n}$ к кривой γ_Y дает кривую $(m_1, m_2, m_1 + m_2)$, описанную в определении 14.

Рассмотрев последовательность (4.15) квантовых операторов деновских вращений (3.14) и принимая во внимание квантовую инвариантность результата, сформулиро-

ванную в лемме 4, придем к *основному наблюдению*, что, имея сложное выражение в терминах элементарных операторов $\{X, Y, Z\}$ для величин в периодическом пределе (3.44) для оператора КГЛ, построенного по правилам, описанным в леммах 4 и 6, можно применить последовательность (4.15) расстегивающих квантовых модулярных преобразований, которая приводит этот оператор к стандартному виду квантового оператора G_Y или G_X , выраженного через новые операторы $\{X^{(n)}, Y^{(n)}, Z^{(n)}\}$, связанные с исходными операторами соответствующей последовательностью квантовых модулярных преобразований.

Кажется естественным, что поскольку геодезическая длина бесконечно растет при стремлении m_1 и m_2 к бесконечности, то рано или поздно мы должны перейти в асимптотический режим, в котором величины $X^{(n)}, Y^{(n)}$ велики (в прямом или операторном смысле) для всех достаточно больших n . Тем не менее, монотонность такого стремления к асимптотическому режиму неочевидна и будет обсуждаться в следующем разделе.

4.3.3. Асимптотический режим. Напомним выражения для модулярных преобразований операторов X, Y и Z :

$$D_X^{-1}\{X, Y, Z\} \mapsto \{X + 2\phi^{\hbar}(Z), -Z, Y - 2\phi^{\hbar}(-Z)\} \quad (4.16)$$

и

$$D_Y^{-1}\{X, Y, Z\} \mapsto \{-Z, Y - 2\phi^{\hbar}(-Z), X + 2\phi^{\hbar}(Z)\}. \quad (4.17)$$

В терминах величин $U \equiv e^{X/2}$ и $V \equiv e^{-Y/2}$ и в случае, когда $X + Y + Z = 0$, получим:

$$D_X^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{X/2} + e^{-X/2-Y} \\ e^{-Y/2+X/2} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} U + VU^{-1}V \\ q^{1/2}U^{-1}V \end{pmatrix}, \quad q = e^{-i\pi\hbar}, \quad (4.18)$$

$$D_Y^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} e^{X/2+Y/2} \\ e^{-Y/2} + e^{Y/2+X} \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} q^{1/2}UV^{-1} \\ V + UV^{-1}U \end{pmatrix}, \quad q = e^{-i\pi\hbar}. \quad (4.19)$$

Заметим, что так как все операторы $\{Z_\alpha\}$ эрмитовы, экспоненты от них есть положительно определенные операторы, так что всегда можно записать, что, например, $U + VU^{-1}V > U$ в смысле спектрального разложения: $\langle f|U + VU^{-1}V|f \rangle > \langle f|U|f \rangle$ для любой функции $f \in L^2(\mathbb{R})$.

Теперь, имея последовательность чередующихся преобразований (4.18), (4.19), можно показать, что асимптотический режим больших положительных X (большие U) и больших по модулю отрицательных Y (большие V) достигается, если начинать процесс с любой пары величин X и Y , лежащих в компактной области в плоскости (X, Y) в классическом случае или действующих на компакте финитных функций с ограниченными производными в функциональном пространстве в квантовом (операторном) случае.

Опустим полное доказательство, поскольку для того, чтобы продемонстрировать технику доказательства, достаточно рассмотреть всего лишь один пример выделенной последовательности модулярных преобразований, отвечающих последовательности чисел Фибоначчи (золотому сечению), а именно последовательности, в которой чередуются операторы D_X^{-1} и D_Y^{-1} . Доказательство в общем случае аналогично, хотя

сама структура операторов оказывается более сложной (см. [12]). Имея последовательность преобразований $D_X^{-1}D_Y^{-1} \cdots D_X^{-1}D_Y^{-1} = (D_X^{-1}D_Y^{-1})^n$, получим:

$$\begin{aligned} & D_X^{-1}D_Y^{-1} \begin{pmatrix} U \\ V \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} UV^{-1}U+V \\ V^{1/2}(V^{-1}Uq^{-1/2}+U^{-1}Vq^{1/2})U(V^{-1}Uq^{-1/2}+U^{-1}Vq^{1/2})V^{1/2}+V^{1/2}U^{-1}V^{1/2} \end{pmatrix}, \end{aligned} \quad (4.20)$$

что завершает доказательство в классическом случае, так как в первом члене получим $UV^{-1}U + V = U(V^{-1}U + U^{-1}V) > 2U$, поскольку выражение в скобках имеет вид $e^S + e^{-S}$ и всегда превосходит двойку для вещественных S . То же верно и для второго члена в (4.20), из которого также можно выделить (классическую) часть $V(U + U^{-1})$ с тем же свойством.

Доказательство в квантовом случае сложнее и требует тщательного операторного анализа. Оценки тем не менее оказываются близки оценкам в классическом случае. Не вдаваясь в излишние детали, заметим, что монотонность предела *уже* следует из (4.20); надо лишь доказать, что нижняя грань спектра оператора на компакте в функциональном пространстве неограниченно возрастает с ростом n . Это довольно рутинная процедура, в процессе которой, однако, необходимо использовать то обстоятельство, что действие операторов X и Y в базисе, например, нормированных функций Эрмита h_n имеет вид:

$$\begin{aligned} X|h_n\rangle &= \sqrt{4\pi\hbar}(\sqrt{n+1}|h_{n+1}\rangle + \sqrt{n}|h_{n-1}\rangle), \\ Y|h_n\rangle &= \sqrt{4\pi\hbar} \frac{i}{2}(\sqrt{n+1}|h_{n+1}\rangle - \sqrt{n}|h_{n-1}\rangle), \end{aligned}$$

и эти операторы “почти” коммутируют в области больших индексов n , что оправдывает применение квазиклассического анализа при вычислении композиций таких операторов.

Напомним теперь конструкцию квантовых деновских вращений и построение соответствующих собственных функций из работы [25]. Генератор деновского вращения D_X имеет вид:

$$D_X = e^{q_1^2/(2\pi i\hbar)} F^{\hbar}(q_1 + p_1), \quad q_1 = X/2, \quad p_1 = 2\pi i\hbar \partial_X, \quad (4.21)$$

и поскольку он коммутирует с оператором длины геодезической G_X , они имеют один и тот же набор собственных функций:

$$|\alpha_S\rangle = e^{-X^2/(16\pi i\hbar)} F^{\hbar}(S + X) F^{\hbar}(-S + X) \quad (4.22)$$

с собственными значениями

$$G_X|\alpha_S\rangle = 2 \cosh(S/2); \quad D_X|\alpha_S\rangle = e^{S^2/(2\pi i\hbar)}. \quad (4.23)$$

Функции $|\alpha_S\rangle$ образуют полный функциональный набор в том смысле, что

$$\langle \alpha_T | \alpha_S \rangle = \delta(S - T) \nu^{-1}(S), \quad \nu(S) = 4 \sinh(\pi S) \sinh(\pi \hbar S)$$

и

$$\int_0^\infty \nu(S) dS |\alpha_S\rangle \langle \alpha_S| = \text{Id}.$$

В асимптотическом режиме действие деновских вращений D_X^{-1} и D_Y^{-1} сводится к следующим линейным преобразованиям:

$$\begin{aligned} D_X^{-1}\{X, Y\} &\rightarrow \{-X - 2Y, X + Y\} \quad \text{для } \{Y < 0, X < |Y|\} \text{ (область I)}, \\ D_Y^{-1}\{X, Y\} &\rightarrow \{X + Y, -2X - Y\} \quad \text{для } \{X > 0, Y > -|X|\} \text{ (область II)}, \end{aligned} \quad (4.24)$$

где указанные области очевидно включают в себя асимптотические области для последовательности чисел Фибоначчи. Заметим, что на каждом шаге происходит переход из одной области, указанной в формуле (4.24), в другую.

Обратимся теперь к настоящей длине геодезической (или периодической длине – в данном случае эти понятия эквивалентны). Если последовательность расстигивающих преобразований завершена (не может быть продолжена), то это означает, что осталась графически простая геодезическая, которая будет либо G_X , если последнее преобразование было D_Y^{-1} , либо G_Y , если последнее преобразование было D_X^{-1} . Рассматривая соответствующие геодезические длины (периодические длины), получим, что с точностью до экспоненциально малых поправок ведущие вклады в эти длины для величин, находящихся в областях, указанных в формуле (4.24), имеют вид:

$$\text{p. l.}(\gamma_Y) = X + Y/2 \quad \text{в области II}, \quad (4.25)$$

$$\text{p. l.}(\gamma_X) = -Y - X/2 \quad \text{в области I} \quad (4.26)$$

(см. выражения (2.17)).

Исследуем теперь асимптотические формулы (4.24) и (4.25), (4.26). Опять рассмотрим сначала классический случай. Начнем с переменных $\{X^{(0)}, Y^{(0)}\}$ и с соответствующей начальной длины геодезической $\text{p. l.}(\gamma_Y^{(0)})$, задаваемой формулой (4.25). Тогда, применяя преобразование D_Y^{-1} , получим новые переменные $\{X^{(1)}, Y^{(1)}\}$ и новую геодезическую длину $\text{p. l.}(\gamma_X^{(1)})$ (4.26), выраженную через эти новые переменные. Тогда можно снова применить преобразование (4.25) и получить переменные $\{X^{(2)}, Y^{(2)}\}$ и геодезическую длину $\text{p. l.}(\gamma_Y^{(2)})$, опять-таки задаваемую выражением (4.25). Теперь нетрудно проверить, что $\text{p. l.}(\gamma_Y^{(2)}) = \text{p. l.}(\gamma_X^{(1)}) + \text{p. l.}(\gamma_Y^{(0)})$. На самом деле эта ситуация вполне общая: если только переменные лежат в соответствующих областях I и II, в зависимости от того, какое деновское вращение должно производиться в данный момент, и имеется серия деновских вращений $\cdots D_X^{-a_i} D_Y^{-a_{i-1}} \cdots$, то в асимптотическом режиме соответствующие длины связаны в точности теми же рекуррентными соотношениями, что и соотношения для графических длин (последние следуют непосредственно из соотношения (4.12)):

$$\text{p. l.}(\gamma_Y^{(2)}) = a_i \text{p. l.}(\gamma_X^{(1)}) + \text{p. l.}(\gamma_Y^{(0)}), \quad (4.27)$$

$$\text{g. l.}(\gamma_Y^{(2)}) = a_i \text{g. l.}(\gamma_X^{(1)}) + \text{g. l.}(\gamma_Y^{(0)}), \quad (4.28)$$

откуда легко заключить, что отношение этих двух величин имеет определенный предел при $i \rightarrow \infty$ для *любой* последовательности чисел a_i , а не только, скажем, для чисел Фибоначчи.⁸

⁸Это следует из стандартной оценки: пусть даны две числовые последовательности (4.27) и

4.3.4. Квантовое разложение в цепную дробь. Обратимся снова к последовательности (4.15) расстегивающих преобразований. Для того чтобы получить соответствующие операторные выражения, рассмотрим операторы D_X , D_Y как унитарные преобразования и выпишем явно переменные, в которых выражены эти операторы, т.е. будем писать $D_{X^{(j)}} \equiv D_X(X^{(j)}, Y^{(j)})$ для преобразования деновского вращения, происходящего на $(j+1)$ -м шаге. Тогда получим:

$$\begin{aligned} \{X^{(n)}, Y^{(n)}\} &= D_{X^{(n-1)}}^{-a_n} D_{Y^{(n-2)}}^{-a_{n-1}} \cdots D_{X^{(1)}}^{-a_2} D_{Y^{(0)}}^{-a_1} \{X^{(0)}, Y^{(0)}\} \\ &\quad \times D_{Y^{(0)}}^{a_1} D_{X^{(1)}}^{a_2} \cdots D_{Y^{(n-2)}}^{a_{n-1}} D_{X^{(n-1)}}^{a_n}, \end{aligned} \quad (4.29)$$

и с тем чтобы представить эту длинную цепочку операторов в терминах одних лишь исходных операторов $\{X^{(0)}, Y^{(0)}\}$, обратим зависимость, т.е. учтем то, что, например,

$$D_{X^{(1)}}^{-a_2} = D_{Y^{(0)}}^{-a_1} D_{X^{(0)}}^{-a_2} D_{Y^{(0)}}^{a_1}$$

и т. д., что в итоге приводит к выражению

$$\begin{aligned} \{X^{(n)}, Y^{(n)}\} &= D_{Y^{(0)}}^{-a_1} D_{X^{(0)}}^{-a_2} \cdots D_{Y^{(0)}}^{-a_{n-1}} D_{X^{(0)}}^{-a_n} \{X^{(0)}, Y^{(0)}\} \\ &\quad \times D_{X^{(0)}}^{a_n} D_{Y^{(0)}}^{a_{n-1}} \cdots D_{X^{(0)}}^{a_2} D_{Y^{(0)}}^{a_1}. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Будем использовать базисы функций, наиболее удобные при описании асимптотического режима. Пусть

$$|f_{\mu,s}\rangle \equiv e^{i\mu(x-s)^2/2}, \quad \mu, s \in \mathbb{R}. \quad (4.31)$$

Такие функции образуют базис при каждом μ :

$$\langle f_{\mu,t} | f_{\mu,s} \rangle = \frac{2\pi}{\mu} \delta(s-t), \quad \int_{-\infty}^{\infty} ds |f_{\mu,s}\rangle \langle f_{\mu,s}| = \frac{2\pi}{\mu} \text{Id}. \quad (4.32)$$

Для произвольных двух вещественных параметров w и γ имеем:

$$e^{iwx^2/2} |f_{\mu,s}\rangle = e^{i\mu ws^2/2} |f_{\mu+w, \frac{s}{1+w/\mu}}\rangle, \quad (4.33)$$

$$e^{i\gamma\partial_x^2/2} |f_{\mu,s}\rangle = \frac{1}{\sqrt{1+\gamma\mu}} |f_{\frac{1}{\gamma+1/\mu}, s}\rangle \quad (4.34)$$

и

$$\langle f_{\mu,s} | x | f_{\mu,t} \rangle = \frac{2\pi}{i\mu^2} \delta'(s-t) + \frac{2\pi}{\mu} s \delta(s-t), \quad (4.35)$$

$$\langle f_{\mu,s} | \frac{1}{i} \partial_x | f_{\mu,t} \rangle = \frac{2\pi}{i\mu} \delta'(s-t). \quad (4.36)$$

(4.28), и пусть относительная ошибка их отношения на i -м шаге равна ε_i , т.е. само это отношение равно $S(1+\varepsilon_i)$, где S — постоянная величина. Тогда легко найти, что если $a_{i+1} > 1$ на $(i+1)$ -м шаге, то $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i/(a_{i+1} - 1/2)$, в случае же, когда имеются подряд два единичных коэффициента $a_{i+1} = a_i = 1$, получим, что $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_{i-1}/1.5$. Вообще говоря, для достаточно малых ε_i всегда имеет место соотношение $\varepsilon_{i+1} < \varepsilon_i$. Все это в совокупности приводит к утверждению, что относительная ошибка убывает экспоненциально с ростом индекса i .

Введем теперь безразмерную величину x и положим

$$X|f_{\mu,s}\rangle = \sqrt{4\pi\hbar}x \cdot |f_{\mu,s}\rangle, \quad Y|f_{\mu,s}\rangle = \sqrt{4\pi\hbar} \frac{1}{i} \frac{\partial}{\partial x} \cdot |f_{\mu,s}\rangle. \quad (4.37)$$

Операторы D_X и D_Y , действующие на функции $|f_{\mu,s}\rangle$ в асимптотическом режиме, имеют следующий явный вид:

$$D_X|f_{\mu,s}\rangle = e^{-i\partial_x^2} e^{ix^2/2} |f_{\mu,s}\rangle, \quad (4.38)$$

$$D_Y|f_{\mu,s}\rangle = e^{-ix^2} e^{i\partial_x^2/2} |f_{\mu,s}\rangle, \quad (4.39)$$

и для того чтобы установить соотношения рекуррентии, необходимо сравнить матричные элементы трех последовательных операторов длин геодезических в операторных разложениях, отвечающих ряду Фибоначчи:

$$\begin{aligned} A_{st}^{(0)} &= \langle f_{\mu,s} | X + \frac{Y}{2} | f_{\mu,t} \rangle, \\ A_{st}^{(1)} &= \langle f_{\mu,s} | D_Y^{-1} | -Y - \frac{X}{2} | D_Y f_{\mu,t} \rangle, \\ A_{st}^{(2)} &= \langle f_{\mu,s} | D_Y^{-1} D_X^{-1} | X + \frac{Y}{2} | D_X D_Y f_{\mu,t} \rangle. \end{aligned}$$

Теперь, используя формулы (4.33)–(4.39), можно непосредственно показать, что

$$A_{st}^{(2)} = A_{st}^{(0)} + A_{st}^{(1)} \quad \forall s, t, \quad (4.40)$$

т.е. в асимптотическом режиме опять имеет место рекуррентное соотношение (4.27), но теперь оно выполнено для матричных элементов операторов периодических пределов длин квантовых геодезических. Оценки показывают, что поправки, возникающие, с одной стороны, из-за (операторных) отклонений от асимптотического режима, а с другой стороны, ввиду ненулевого параметра ошибки ε_i , убывают экспоненциально с ростом индекса i , а потому предел (4.8) существует в слабом операторном смысле. С помощью тех же самых соображений, что и при обсуждении формул (4.27), (4.28), можно прийти к заключению, что отношения (4.8) задают слабо непрерывное семейство операторов, параметризованное поперечными мерами ($\hbar$ -длинами) на канонической отщепленной автостраде, соответствующей тору с одним проколом. Это завершает доказательство основной теоремы.

5. Заключение

В данной статье было дано краткое описание действия группы классов отображений на классическом и квантовом пространствах Тейхмюллера в координатах, отвечающих процедуре координатизации Пеннера и Фока. Были рассмотрены алгебры классических и квантовых геодезических функций, индуцированные пуассоновыми скобками Вейля–Петерсона и соответствующими квантовыми коммутационными соотношениями для этих координат. Элементы квантовой группы классов отображений при

этом удовлетворяют пятичленному соотношению и сохраняют структуры как классических, так и квантовых геодезических функций; эти элементы устанавливают автоморфизмы между квантовыми алгебрами геодезических, отвечающих различным графам, представляющим риманову поверхность.

В некоторых выделенных случаях полученные квантовые алгебры геодезических функций оказываются квантовыми алгебрами $so_q(n)$. В старших размерностях ($g > 2$ при $n = 1$) возникают дополнительные ограничения на возможные симплектические листы представлений этих алгебр, которые отвечают представлениям настоящих пространств Тейхмюллера (это напоминает ограничения, возникающие в проблеме Шоттки описания возможных матриц периодов римановых поверхностей).

Конструкция автострад обеспечивает подходящее замыкание проективизованного пространства наблюдаемых 3D гравитации. В силу последних результатов Р. Ч. Пеннера это пространство представляет собой сферу для римановой поверхности произвольного рода с любым количеством дырок. Процедура квантования теории Тёрстона сводится к тому, что каждой точке этой сферы ставится в соответствие квантовый оператор (нормированная квантовая длина геодезической); получившееся при этом семейство операторов должно обладать свойством слабой непрерывности при движении по этой сфере. Есть серьезные основания считать, что эта конструкция имеет в своей основе гамильтонову структуру. На сегодняшний момент, однако, соответствующие операторы не вычислялись; основная теорема лишь утверждает их существование. Рекуррентные соотношения (4.27) и (4.40) также не дают никакой детальной информации о настоящем виде предела (4.8) для данной ц.д. Поэтому мы рассматриваем настоящую работу как введение в новую теорию квантовых автострад, которая безусловно заслуживает дальнейших исследований.

Авторы благодарны Л. Д. Фаддееву и Ф. Бонахону за полезное обсуждение. Работа была частично поддержана грантом РФФИ № 01-01-00549 и Программой “Математические методы в нелинейной динамике”.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] H. Verlinde, E. Verlinde. Conformal field theory and geometric quantization // *Superstrings' 1989* (Trieste, 1989). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1990. P. 422–449.
- [2] V. V. Fock, A. A. Rosly. Poisson structures on moduli of flat connections on Riemann surfaces and the r -matrix // *Preprint ITEP 72-92* (1992); // *Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2*. 1999. V. 191. P. 67–86.
- [3] В. В. Фок, А. А. Рослый. Плоские связности и полюбли // *ТМФ*. 1993. Т. 95. № 2. С. 228–238.
- [4] В. В. Фок, Л. О. Чехов. Квантовые пространства Тейхмюллера // *ТМФ*. 1999. Т. 120. № 3. С. 511–528.
- [5] В. В. Фок, Л. О. Чехов. Квантовые модулярные преобразования, соотношение пятиугольника и геодезические // *Труды МИАН*. 1999. Т. 226. С. 163–179.
- [6] R. M. Kashaev. Quantization of Teichmüller spaces and the quantum dilogarithm // *Lett. Math. Phys.* 1998. V. 43. № 2. P. 105–115; q-alg/9705021.
- [7] J. Teschner. From Liouville theory to the quantum geometry of Riemann surfaces // hep-th/0308031; // *Proceedings of the XIV International Congress on Mathematical Physics* (Lisbon, 2003). Singapore: World Sci. Publ. (to appear).
- [8] R. C. Penner. The decorated Teichmüller space of Riemann surfaces // *Comm. Math. Phys.* 1987. V. 113. № 2. P. 299–339.
- [9] M. Kontsevich. Intersection theory on the moduli space of curves and the matrix Airy function // *Comm. Math. Phys.* 1992. V. 147. № 1. P. 1–23.

- [10] L. D. Faddeev. Discrete Heisenberg–Weyl group and modular group // *Lett. Math. Phys.* 1995. V. 34. № 3. P. 249–254.
- [11] Р. М. Кашаев. Центральный заряд Лиувилля в квантовой теории Тейхмюллера // *Труды МИАН*. 1999. Т. 226. С. 72–81.
- [12] L. Chekhov, R. C. Penner. On quantizing Teichmüller and Thurston theory (to appear).
- [13] W. P. Thurston. On the geometry and dynamics of diffeomorphisms of surfaces // *Bull. Amer. Math. Soc.* 1988. V. 19. № 2. P. 417–431.
- [14] F. Bonahon. Geodesic laminations on surfaces // *Laminations and Foliations in Dynamics, Geometry and Topology* / ed. M. Lyubich, J. W. Milnor, Y. N. Minsky. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. P. 1–37. (Contemp. Math. V. 269.)
- [15] F. Bonahon. Closed Curves on Surfaces (to appear).
- [16] O. Ya. Viro. Lectures on combinatorial presentations of manifolds // *Differential Geometry and Topology* (Alghero, 1992). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 1993. P. 244–264.
- [17] K. Strebel. Quadratic Differentials. Berlin: Springer-Verlag, 1984. (Ergeb. Math. Grenzgeb. (3). V. 5.)
- [18] V. V. Fock. Combinatorial description of the moduli space of projective structures // *hep-th/9312193*.
- [19] W. M. Goldman. Invariant functions on Lie groups and Hamiltonian flows of surface group representations // *Invent. Math.* 1986. V. 85. № 2. P. 263–302.
- [20] J. E. Nelson, T. Regge. Homotopy groups and $(2 + 1)$ -dimensional quantum gravity // *Nuclear Phys. B*. 1989. V. 328. № 1. P. 190–199.
- [21] J. E. Nelson, T. Regge, F. Zertuche. Homotopy groups and $(2 + 1)$ -dimensional quantum de Sitter gravity // *Nuclear Phys. B*. 1990. V. 339. № 2. P. 516–532.
- [22] M. Havlíček, A. V. Klimyk, S. Pošta. Representations of the cyclically symmetric q -deformed algebra $so_q(3)$ // *J. Math. Phys.* 1999. V. 40. № 4. P. 2135–2161; *math.qa/9805048*.
- [23] M. Ugaglia. On a Poisson structure on the space of Stokes matrices // *Internat. Math. Res. Notices*. 1999. V. 1999. № 9. P. 473–493; *math.ag/9902045*.
- [24] A. Bondal. A symplectic groupoid of triangular bilinear forms and the braid groups // Preprint IHES/M/00/02. Bures-sur-Ivette: Institut des Hautes Études Scientifiques, 2000.
- [25] R. M. Kashaev. On the spectrum of Dehn twists in quantum Teichmüller theory // *Physics and Combinatorics* (Nagoya, 2000). River Edge, NJ: World Sci. Publ., 2001. P. 63–81; *math.QA/0008148*.
- [26] V. G. Turaev. Skein quantization of Poisson algebras of loops on surfaces // *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*. 1991. V. 24. № 6. P. 635–704.
- [27] D. Bullock, J. H. Przytycki. Multiplicative structure of Kauffman bracket skein module quantizations // *Proc. Amer. Math. Soc.* 2000. V. 128. № 3. P. 923–931; *math.QA/9902117*.
- [28] J. E. Nelson, T. Regge. $2 + 1$ quantum gravity // *Phys. Lett. B*. 1991. V. 272. № 3–4. P. 213–216.
- [29] J. E. Nelson, T. Regge. Invariants of $2 + 1$ gravity // *Comm. Math. Phys.* 1993. V. 155. № 3. P. 561–568.
- [30] A. Okounkov, R. Pandharipande. Gromov–Witten theory, Hurwitz numbers, and Matrix models, I // *math.AG/0101147*.
- [31] R. C. Penner, J. L. Harer. Combinatorics of Train Tracks. Princeton: Princeton Univ. Press, 1992. (Ann. of Math. Stud. V. 125.)
- [32] A. Papadopoulos, R. C. Penner. The Weil–Petersson Kähler form and affine foliations on surfaces // *math.AG/0306370*.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
 University of Southern California, Los Angeles, USA
E-mail: chekhov@mi.ras.ru, rpenner@math.usc.edu

Поступила в редакцию
 25.09.2003