Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Р. Даншен, Аксиально-симметричные несжимаемые потоки с ограниченным вихрем, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 73–94

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6761>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 14:16:48

УДК 517.958+531.3-1

Аксиально-симметричные несжимаемые потoki с ограниченным вихрем

Р. Даншен

Эта статья посвящена доказательству результатов о глобальном существовании и единственности решений для трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера со специальной геометрической структурой. Основное внимание уделяется так называемым аксиально-симметричным решениям *без закручивания* и геликоидальным решениям. Наша цель состоит в описании условий для вихря, максимально близких к условиям, сформулированным В. И. Юдовичем для двумерного случая.

Библиография: 20 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	73
1. Некоторые обозначения	78
2. Априорные оценки для вихря и скорости	80
3. Случай ограниченной области	83
3.1. Доказательство единственности	83
3.2. Доказательство существования	84
4. Случай всего пространства	85
4.1. Утверждение о единственности	85
4.2. Доказательство существования	87
5. Геликоидальные решения	90
5.1. Определения и свойства	90
5.2. Цилиндрический случай	91
5.3. Случай всего пространства	91
6. Дальнейшие результаты и открытые проблемы	92
Список литературы	93

Введение

Настоящая работа посвящена доказательству результатов о глобальном существовании и единственности для несжимаемых уравнений Эйлера

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} v = 0, \\ v|_{t=0} = v^0 \end{cases} \quad (\text{E})$$

© Р. Даншен, 2007

в гладкой открытой области Ω пространства $\mathbb{R}^3$. Система (Е) снабжена граничными условиями скольжения вида $v \cdot n = 0$ на $\partial\Omega$.

Математические исследования несжимаемых уравнений Эйлера имеют долгую историю. Локальное существование классических решений было впервые установлено Л. Лихтенштейном в серии статей, опубликованных в конце двадцатых годов (см., например, [1]). Существование двумерных глобальных классических решений было доказано В. Волибнером в 1933 г. (см. [2]). Коротко представим ключевые аргументы (в современной версии), которые приводят к глобальному существованию в случае $\Omega = \mathbb{R}^2$.

1. *Законы сохранения вихря.* В двумерном случае вихрь ω сводится к скалярной функции (а именно к функции $\omega := \partial_1 v^2 - \partial_2 v^1$) и удовлетворяет транспортному уравнению

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = 0. \quad (1)$$

В силу условия несжимаемости, поток ψ , построенный по v , сохраняет площадь. Следовательно, для любого $p \in [1, +\infty]$

$$\|\omega(t)\|_{L^p} = \|\omega^0\|_{L^p}. \quad (2)$$

2. *Гёльдерова регулярность.* Благодаря уравнению (1) гёльдеровы нормы вихря на любом интервале $[T_1, T_2]$ контролируются нормой функции ∇v в $L^1(T_1, T_2; L^\infty)$. Точнее, для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ имеется некоторая константа C , зависящая только от ε , такая, что

$$\sup_{t \in [T_1, T_2]} \|\omega(t)\|_{C^\varepsilon} \leq \min(\|\omega(T_1)\|_{C^\varepsilon}, \|\omega(T_2)\|_{C^\varepsilon}) \exp\left(C \int_{T_1}^{T_2} \|\nabla v(t)\|_{L^\infty} dt\right). \quad (3)$$

3. *Логарифмическая интерполяция.* Используя тождество $\Delta v = \nabla^\perp \omega$ и тот факт, что $\operatorname{div} v = 0$, имеем для любого $\varepsilon \in (0, 1)$ неравенство

$$\|\nabla v\|_{L^\infty} \leq C \|\omega\|_{L^1 \cap L^\infty} \log\left(e + \frac{\|\omega\|_{C^\varepsilon}}{\|\omega\|_{L^\infty}}\right). \quad (4)$$

4. *Глобальные априорные оценки.* Подставляя (3) в (4) и применяя лемму Гронолла, получаем (для всех $t \in \mathbb{R}$) оценку

$$\|\nabla v(t)\|_{L^\infty} \leq C_0 e^{C_0 |t|},$$

где C_0 можно выразить через нормы начальных данных.

Отметим, что подстановка этой последней оценки в (4) также дает глобальную (но очень плохую) оценку для $\|\omega(t)\|_{C^\varepsilon}$.

5. *Единственность.* Предполагая, что v_2 и v_1 оба удовлетворяют (Е), выведем с помощью основного энергетического метода следующее неравенство при всех $t \geq 0$:

$$\|(v_2 - v_1)(t)\|_{L^2} \leq \|(v_2 - v_1)(0)\|_{L^2} \exp\left(\int_0^t \|\nabla v_1(\tau)\|_{L^\infty} d\tau\right). \quad (5)$$

Следовательно, если оба решения v_2 и v_1 принадлежат L^2 и, кроме того, известно, что $\nabla v_1 \in L^1(0, T; L^\infty)$, то имеет место единственность решения на отрезке $[0, T]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. Отметим, что в отличие от существования единственность основывается на *локальных* аргументах. При этом размерность пространства не играет роли, а только предполагается, что система (E) имеет решение (v, p) с $\nabla v \in L^1(0, T; L^\infty)$. Более того, v не обязана принадлежать пространству L^2 (см., например, [3]).

В 1963 г. В. И. Юдович опубликовал в [4] новый результат о глобальной корректности несжимаемых уравнений Эйлера в гладкой ограниченной двумерной области. Предположения для начальных данных были более слабыми, чем в статье Волибнера: на самом деле, автор предполагал лишь, что начальный вихрь ω_0 принадлежит L^∞ . Теперь, с одной стороны, глобальное существование можно получить с помощью сглаживания начальных данных. Но с другой стороны, доказательство единственности делается более сложным, чем в гладком случае, поскольку из ограниченности ω *не следует* ограниченность ∇v . Значит, единственность теперь не выводится из неравенства (5).

Доказательство единственности у Юдовича опиралось на тот факт, что норма $\|\omega\|_{L^p}$ ограничена. Используемое им неравенство теперь стало классическим: существует константа C такая, что

$$\|\nabla v\|_{L^p} \leq \frac{Cp^2}{p-1} \quad \text{для любого } p \in (1, \infty).$$

Следовательно, выражение $\|\nabla v\|_{L^p}/p$ ограничено сверху константой, не зависящей от p , когда p стремится к бесконечности. Правильное использование неравенства Гёльдера, а также *обобщенной* леммы Гронуолла (которую иногда называют леммой Осгуда) приводит к единственности.

Попутно заметим, что аргументация Юдовича годится и для случая всей плоскости, если вихрь имеет некоторое свойство убывания на бесконечности (см., например, [3]). В нашей тереме 2 мы увидим, что даже для ω и v из L^∞ можно получить единственность. Кроме того, недавно было обнаружено, что условие ограниченности $\|\omega\|_{L^p}$ не является необходимым для единственности. На самом деле, $\|\omega\|_{L^p}$ может (очень медленно) стремиться к бесконечности, когда p стремится к бесконечности (см. [5] и [6]).

Для размерности $N = 3$ вопрос о глобальной разрешимости системы (E) остается нерешенным даже для малых начальных данных. Самое очевидное отличие от размерности два заключается в том, что вихрь ω является *вектором* и, следовательно, переносится потоком как векторное поле:

$$\partial_t \omega + v \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla v. \quad (6)$$

Скорость можно вывести из вихря по *закону Био–Савара*, который для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$ утверждает, что

$$v(x) = \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^3} \frac{(x-y) \times \omega(y)}{|x-y|^3} dy,$$

а в более общем случае, если Ω достаточно гладкая, то

$$\forall x \in \Omega \quad v(x) = - \int_{\Omega} \nabla_x K(x, y) \times \omega(y) dy, \quad (7)$$

где K – стандартная функция Грина, связанная с лапласианом задачи Дирихле в области Ω .

Для общих трехмерных потоков не ясно, почему $\|\omega\|_{L^\infty}$ должно сохраняться при эволюции¹, и двумерный подход к решению задачи (Е) не годится.

Однако при подходящих геометрических предположениях глобальное существование получается. Оно имеет место, когда

- данные являются трансляционно инвариантными (подобно двумерному случаю),
- данные геликоидальны (компоненты начального поля вихря постоянны на геликоидах, см. [8] и раздел 5),
- данные аксиально-симметричны *без закручивания*.

Для упрощения изложения остановимся на случае аксиально-симметричных данных без закручивания (понятие аксиально-симметричного векторного поля сейчас будет введено), а изучение геликоидальных решений отложим до раздела 5. Векторное поле v называется аксиально-симметричным, если в цилиндрических координатах (r, θ, z)

$$v(r, \theta, z) = v_r(r, z)e_r + v_z(r, z)e_z,$$

где e_r обозначает единичный (внешний) радиальный вектор и e_z – единичный вертикальный вектор.

Простое вычисление показывает, что для этого случая вихрь ω сводится к

$$\omega(r, \theta, z) = \omega_\theta(r, z)e_\theta, \quad \text{где} \quad \omega_\theta := \partial_z v_r - \partial_r v_z \quad \text{и} \quad e_\theta = e_z \times e_r.$$

Для аксиально-симметричных несжимаемых потоков величина $r^{-1}\omega_\theta$ играет ту же роль, что вихрь в двумерном случае. В самом деле, имеем

$$\partial_t(r^{-1}\omega_\theta) + v \cdot \nabla(r^{-1}\omega_\theta) = 0, \tag{8}$$

и, следовательно, $r^{-1}\omega_\theta$ имеет постоянную L^∞ -норму.

Этот факт использовался М.Р. Уховским и В.И. Юдовичем при доказательстве глобального существования аксиально-симметричных потоков в $\mathbb{R}^3$ с ограниченной энергией и начальным вихрем $\omega^0 \in L^2 \cap L^\infty$ таким, что $r^{-1}\omega^0$ принадлежит также $L^2 \cap L^\infty$ (см. [9]). Напомним основные аргументы из этой работы.

1. **Законы сохранения вихря.** В силу (8), L^p -нормы $r^{-1}\omega$ сохраняются. Кроме того,

$$\partial_t \omega_\theta + v \cdot \nabla \omega_\theta = r^{-1} \omega_\theta v_r,$$

и, следовательно, для любого $p \in [1, +\infty]$

$$\|\omega(t)\|_{L^p} \leq \|\omega^0\|_{L^p} + \|r^{-1}\omega^0\|_{L^p} \int_0^t \|v(\tau)\|_{L^\infty} d\tau. \tag{9}$$

2. **Ограниченность $\|v\|_{L^\infty}$.** Из закона Био–Савара получаем, что при любом $p > 3$ (в [9] авторы берут $p = 4$):

$$\|v\|_{L^\infty} \lesssim \|v\|_{L^2} + \|\omega\|_{L^p}, \tag{10}$$

значит, используя тот факт, что v имеет постоянную L^2 -норму (это выполнено в силу энергетического тождества), подставляя (10) в (9) и применяя неравенство Гронуолла, получаем контроль над $\|v\|_{L^\infty}$ и $\|\omega\|_{L^q}$ при каждом $q \in [1, +\infty]$.

¹В общем случае это не так: см. [7].

3. *Заключение.* В частности, получаются экспоненциальные оценки для $\|\omega(t)\|_{L^\infty}$ (см. в [10] доказательство *полиномиальных* оценок). Теперь существование и единственность можно доказать так же, как в двумерном случае.

Однако, если говорить в терминах регулярности пространств Соболева, условие из [9] оказывается более сильным, чем условие, необходимое для локальной корректности в трехмерном случае. В самом деле, с одной стороны, общеизвестно, что имеется локальное существование в $H^s(\mathbb{R}^3)$ при $s > 5/2$; с другой стороны, для того чтобы $r^{-1}\omega^0$ лежало в L^∞ для любого $v^0 \in H^s(\mathbb{R}^3)$, требуется $s > 7/2$. Эта брешь была заполнена Т. Широтой и Т. Янагисавой в [11], где глобальное существование было доказано для любых аксиально-симметричных начальных векторных полей v^0 из $H^s(\mathbb{R}^3)$ при $s > 5/2$.

Целью настоящей статьи является получение результата о глобальном существовании, который был бы максимально близок к двумерному случаю Юдовича: желательно иметь глобальный результат для начального аксиально-симметричного вихря в функциональном пространстве E , которое обладает той же *масштабной инвариантностью*, что и множество ограниченных функций, т.е. когда E – множество ограниченных функций f таких, что $r^{-1}f$ лежит в пространстве Лоренца $L^{3,1}(\mathbb{R}^3)$ (которое можно определить с помощью вещественной интерполяции по формуле $L^{3,1}(\mathbb{R}^3) = (L^\infty(\mathbb{R}^3), L^1(\mathbb{R}^3))_{\frac{1}{3},1}$). Эта мотивация предвещает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. Пусть Ω – или осесимметричная ограниченная область гладкости $C^{2,\alpha}$, или все пространство $\mathbb{R}^3$. Пусть начальный вихрь ω^0 является аксиально-симметричной функцией в $L^{3,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)$ такой, что $r^{-1}\omega^0 \in L^{3,1}(\Omega)$. Обозначим через v^0 аксиально-симметричное соленоидальное векторное поле с вихрем $\omega^0 e_\theta$, которое получается по закону Био-Савара (7). Тогда уравнения Эйлера (Е) имеют единственное глобальное решение $(v, \nabla p)$, причём $v \in \mathcal{C}_w(\mathbb{R}; C_\star^1(\Omega))$ и $\nabla p \in \mathcal{C}(\mathbb{R}; C^{1-\varepsilon}(\Omega))$ при любом $\varepsilon > 0$. Кроме того,

$$\omega \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}; L^{3,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega)) \quad \text{и} \quad \|r^{-1}\omega(t)\|_{L^{3,1}} = \|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}} \quad \text{при всех } t \in \mathbb{R}.$$

Выше через $C_\star^1(\Omega)$ обозначено пространство Зигмунда ограниченных непрерывных функций f с областью определения Ω таких, что

$$\|f\|_{C_\star^1} := \|f\|_{L^\infty} + \sup_{(x,y) \in \tilde{\Omega}^2} \frac{|f(x+y) + f(x-y) - 2f(x)|}{|y|^2} < \infty, \quad (11)$$

где $\tilde{\Omega}^2$ – множество таких пар (x, y) , что x , $x+y$ и $x-y$ принадлежат Ω .

ЗАМЕЧАНИЕ 2. Конечно, в ограниченном случае $L^{3,1}(\Omega) \cap L^\infty(\Omega) = L^\infty(\Omega)$.

Формально доказательство теоремы 1 опирается на следующие три факта:

- 1) из (8) получаем, что $\|r^{-1}\omega(t)\|_{L^{3,1}} = \|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}}$ при всех $t \in \mathbb{R}$;
- 2) в силу (7) найдется константа C , зависящая только от Ω , такая, что $\|r^{-1}v_r\|_{L^\infty} \leq C\|r^{-1}\omega\|_{L^{3,1}}$;
- 3) для осесимметричных потоков уравнение для ω_θ сводится к

$$\partial_t \omega_\theta + v \cdot \nabla \omega_\theta = r^{-1}v_r \omega_\theta.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты о единственности приведены в утверждении 3 (случай ограниченной области Ω) и в теореме 2 (случай $\Omega = \mathbb{R}^2$).

Наша статья имеет следующую структуру. В разделе 1 даются определения нескольких функциональных пространств и вводится разложение Литлвуда–Пэли. Раздел 2 посвящен доказательству априорных оценок для векторных полей вихря и скорости. Теорема 1 для случая ограниченной области доказана в разделе 3. В разделе 4 доказывается глобальное существование в случае $\Omega = \mathbb{R}^3$. Мы также получаем единственность, используя *только* L^∞ -норму вихря (или $C^1_\star$ -норму скорости), не требуя условия убывания на бесконечности скорости или вихря (см. теорему 2). Этот результат, по нашему мнению, имеет самостоятельный интерес. Раздел 5 посвящен изучению геликоидальных решений с ограниченным вихрем. Некоторые дополнительные новые результаты и открытые проблемы перечислены в заключительной части статьи.

Автор благодарит А. Дютрифуа за полезные замечания о геликоидальных решениях.

1. Некоторые обозначения

Всюду в этой статье $L^p(\Omega)$ ($1 \leq p \leq \infty$) обозначает обычное пространство Лебега в области Ω . Символ Ω будет опускаться, если смысл Ω ясен из контекста.

Дадим общее определение пространств Лоренца. В дальнейшем функция $f^*: \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}^+$ обозначает перестановку по убыванию функции f , которая задается формулой

$$f^*(\tau) = \inf \{ \lambda \in \mathbb{R}^+ : |\{x \in \Omega : |f(x)| > \lambda\}| \leq \tau \}.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $1 \leq p < \infty$ и $1 \leq q < \infty$. Обозначим через $L^{p,q}$ множество измеримых функций f , которые удовлетворяют условию

$$\|f\|_{L^{p,q}} := \frac{q}{p} \left(\int_0^\infty (\tau^{\frac{1}{p}} f^*(\tau))^q \frac{d\tau}{\tau} \right)^{\frac{1}{q}} < \infty,$$

а через $L^{p,\infty}$ – множество измеримых функций, для которых

$$\|f\|_{L^{p,\infty}} := \sup_{\tau > 0} \tau^{\frac{1}{p}} f^*(\tau) < \infty.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Для полноты обозначений положим $L^{\infty,q} := L^\infty$ при всех $q \in [1, \infty]$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5. Отметим, что $L^{p,p} = L^p$. Кроме того, при $p \in (1, \infty)$ пространство $L^{p,q}$ совпадает с вещественным интерполяционным пространством $(L^\infty, L^1)_{\frac{1}{p}, q}$. Этот факт будет использоваться в настоящей статье многократно.

Читатель может обратиться к работе [12], где имеется подробная информация о пространствах Лоренца.

Теперь мы коротко опишем так называемое разложение Литлвуда–Пэли, которое будет использоваться при доказательстве теоремы 1 для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$.

Пусть χ – некоторая гладкая *радиальная* функция χ с носителем, скажем, в шаре $B(0, \frac{4}{3})$, равная 1 в некоторой окрестности шара $B(0, \frac{3}{4})$ и такая, что

функция $r \mapsto \chi(re_r)$ не возрастает по r вдоль $\mathbb{R}^+$. Обозначим $\varphi(\xi) = \chi(\xi/2) - \chi(\xi)$. *Неоднородные бинарные блоки* $(\Delta_q)_{q \geq -1}$ определяются по формулам:

$$\Delta_q := \varphi(2^{-q}D) \quad \text{при всех } q \in \mathbb{N} \quad \text{и} \quad \Delta_{-1} = \chi(D).$$

Поскольку

$$\sum_{q \geq -1} \varphi(2^{-q}\xi) = 1 \quad \text{при всех } \xi \in \mathbb{R}^N, \quad (12)$$

имеем, что $\sum_{q \geq -1} \Delta_q = \text{Id}$ в $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Мы также введем следующую функцию, срезающую низкие частоты:

$$S_q := \chi(2^{-q}D) = \sum_{p=-1}^{q-1} \Delta_p \quad \text{при любом } q \in \mathbb{N}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6. Для любых распределений u и v из $\mathcal{S}'$ носители спектра последовательности $(S_{q-1}u \Delta_q v)_{q \geq -1}$ лежат в бинарных ячейках. В самом деле, поскольку $\text{Supp } \chi \subset B(0, \frac{4}{3})$, легко проверить, что

$$\text{Supp}(\mathcal{F}(S_{q-1}u \Delta_q v)) \subset \left\{ \xi \in \mathbb{R}^N : \frac{1}{12}2^q \leq |\xi| \leq \frac{10}{3}2^q \right\}.$$

Многие стандартные функциональные пространства можно характеризовать с помощью разложения Литлвуда–Пэли. В частности, это можно сделать для пространств Гельдера C^s при $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$:

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $s \in \mathbb{R}^+ \setminus \mathbb{N}$. Пусть u – распределение (обобщенная функция) умеренного роста. Тогда u принадлежит C^s , если и только если

$$\sup_{q \geq -1} 2^{qs} \|\Delta_q u\|_{L^\infty} < \infty. \quad (13)$$

Кроме того, выражение слева определяет норму в C^s , эквивалентную обычной норме.

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Отметим, что выражение (13) имеет смысл для любого вещественного s , даже для отрицательного. Однако в случае $s \in \mathbb{N}$ получаемое пространство шире, чем множество непрерывных ограниченных функций, имеющих непрерывные ограниченные производные всех порядков, не превосходящих s . Для избежания путаницы пространство, определенное в (13), обозначается $C_\star^s$ в случае $s \in \mathbb{N}$.

При $s = 1$ можно показать, что пространство распределений u , удовлетворяющих (13), совпадает с пространством Зигмунда $C_\star^1$, определенным в (11).

При доказательстве существования потребуется сглаживание данных. Следующая лемма дает простой инструмент сглаживания в случае $\Omega = \mathbb{R}^3$.

ЛЕММА 1. Выполнены следующие неравенства: при всех $n \in \mathbb{N}$

- 1) для любого $p \in [1, +\infty]$ имеем $\|S_n \omega\|_{L^p} \leq C \|\omega\|_{L^p}$;
- 2) для любого $p \in [1, +\infty]$ имеем $\|r^{-1} S_n \omega\|_{L^p} \leq C \|r^{-1} \omega\|_{L^p}$;
- 3) для любых $p \in (1, +\infty)$ и $q \in [1, +\infty]$ имеем $\|S_n \omega\|_{L^{p,q}} \leq C \|\omega\|_{L^{p,q}}$;
- 4) для любых $p \in (1, +\infty)$ и $q \in [1, +\infty]$ имеем $\|r^{-1} S_n \omega\|_{L^{p,q}} \leq C \|r^{-1} \omega\|_{L^{p,q}}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Первое неравенство является простым следствием определения S_n и стандартных неравенств для свертки. Второе неравенство доказано в [10; лемма A.1].

Третье (соответственно четвертое) неравенство вытекает из первого (соответственно второго) в комбинации с вещественной интерполяцией.

2. Априорные оценки для вихря и скорости

В этом разделе предполагается, что функция Грина K , связанная с задачей Дирихле для $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, имеет следующее свойство:

$$K \in \mathcal{C}^2(\Omega^2) \quad \text{и} \quad |D_X^k K(X, Y)| \leq C_k |X - Y|^{-1-k} \quad (\mathcal{H})$$

для всех $(X, Y) \in \Omega^2$ и $k = 0, 1, 2$.

Отметим, что предположение $(\mathcal{H})$ выполнено в случае $\Omega = \mathbb{R}^3$, а также для ограниченных областей Ω с границей класса $C^{2,\alpha}$.

Следующая лемма является ключевой при доказательстве глобального существования в аксиально-симметричном случае.

ЛЕММА 2. *При выполнении условия $(\mathcal{H})$ существует константа C , зависящая только от Ω , такая, что*

$$\left\| \frac{v_r}{r} \right\|_{L^\infty} \leq C \left\| \frac{\omega_\theta}{r} \right\|_{L^{3,1}}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Утверждение леммы вытекает из следующего неравенства, которое доказано в [11]:

$$\forall X \in \Omega \quad |v_r(X)| \leq C \int_{\Omega} \min\left(1, \frac{r}{|X' - X|}\right) \frac{|\omega_\theta(X')|}{|X - X'|^2} dX' \quad (14)$$

для некоторой константы C , зависящей только от Ω .

В самом деле, с одной стороны, если точка $X' \in \Omega$ такова, что $|X' - X| \leq r$, то $r' \leq 2r$. С другой стороны, если $|X' - X| > r$, то $r'|X - X'|^{-1} \leq 2$. Следовательно, из (14) получаем, что

$$\forall X \in \Omega \quad \frac{|v_r(X)|}{r} \leq 2C \int \frac{1}{|X - X'|^2} \frac{|\omega_\theta(X')|}{r'} dX'.$$

Поскольку пространство $L^{\frac{3}{2},\infty}$ является двойственным к $L^{3,1}$ (см. [12]) и отображение $Y \mapsto |Y|^{-2}$ принадлежит классу $L^{\frac{3}{2},\infty}(\mathbb{R}^3)$, находим, что

$$r^{-1}|v_r(X)| \leq C \|r^{-1}\omega_\theta\|_{L^{3,1}} \quad \text{при всех } X \in \Omega,$$

что дает нужный результат.

Для удобства читателя далее мы приводим доказательство неравенства (14).

Для $X = (x, y, z) \in \Omega$ обозначим $\check{X} := (-x, -y, z)$. Доказательство основано на наблюдении, что имея осевую симметрию области Ω , получаем для всех $(X, X') \in \Omega^2$ тождество

$$K(\check{X}, X') = K(X, \check{X}'). \quad (15)$$

Для любого $z' \in \mathbb{R}$ обозначим $I_{z'} = \{r' \in \mathbb{R}^+ : (r', 0, z') \in \Omega\}$. Пусть $X = (r \cos \theta, r \sin \theta, z) \in \Omega$. В силу инвариантности относительно поворота при вычислении $v_r(X)$ можно предполагать, что $\theta = 0$. Используя аксиальную симметрию и закон Био–Савара (7), находим

$$v_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_{z'}} \int_{-\pi}^{\pi} \partial_z K(X, X') \omega_\theta(X') \cos \theta' r' d\theta' dr' dz',$$

где $X' = (r' \cos \theta', r' \sin \theta', z')$.

Следовательно, из (15) получаем

$$v_r(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{I_{z'}} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\partial_z K(X, X') - \partial_z K(\check{X}, X')) \omega_\theta(X') \cos \theta' r' d\theta' dr' dz'.$$

Чтобы доказать (14), достаточно проверить неравенство

$$\begin{aligned} & \left| \underbrace{\int_{-\pi/2}^{\pi/2} (\partial_z K(X, X') - \partial_z K(\check{X}, X')) \omega_\theta(X') \cos \theta' d\theta'}_I \right| \\ & \leq C \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \min\left(1, \frac{r}{|X' - X|}\right) \frac{|\omega_\theta(X')|}{|X - X'|^2} d\theta'. \end{aligned}$$

Пусть θ^* обозначает единственное вещественное число θ' из $[0, \pi/2]$ такое, что $|X - X'| = r$ (считается, что $\theta^* = 0$, если $|X - X'| > r$ при всех $\theta' \in [-\pi/2, \pi/2]$). Разбиваем интеграл I на три слагаемых: $I = I_1 + I_2 + I_3$, где

$$I_1 := \int_{-\pi/2}^{-\theta^*} (\dots) d\theta', \quad I_2 := \int_{-\theta^*}^{\theta^*} (\dots) d\theta' \quad \text{и} \quad I_3 := \int_{\theta^*}^{\pi/2} (\dots) d\theta'.$$

В силу условия ($\mathcal{H}$), имеем

$$|\partial_z K(X, X')| \leq C|X - X'|^{-2} \quad \text{и} \quad |\partial_z K(\check{X}, X')| \leq C|\check{X} - X'|^{-2}.$$

Раз $|\check{X} - X'| \geq |X - X'|$ при $|\theta'| \leq \pi/2$ и интервал $[-\theta^*, \theta^*]$ соответствует тем θ' , для которых $|X - X'| \leq r$, мы заключаем, что I_2 удовлетворяет требуемому неравенству.

Теперь зафиксируем некоторый угол $\theta' \in [\theta^*, \pi/2]$ и обозначим $X_t := (r \cos t, r \sin t, z)$ при $t \in [-\pi, 0]$. По формуле среднего имеем

$$\partial_z K(X, X') - \partial_z K(\check{X}, X') = \pi r \int_{-\pi}^0 D_h \partial_z K(X_t, X') \cdot e_\theta dt, \quad \text{где} \quad D_h := (\partial_{x_1}, \partial_{x_2}).$$

Используя ($\mathcal{H}$) и тот факт, что $|X' - X_t| \geq |X' - X|$ при всех $t \in [-\pi, 0]$, находим, что

$$|\partial_z K(X, X') - \partial_z K(\check{X}, X')| \leq Cr|X - X'|^{-3}$$

и тем самым

$$|I_3| \leq r \int_{\theta^*}^{\pi/2} \frac{|\omega_\theta(X')|}{|X - X'|^3} d\theta'.$$

Слагаемое I_1 можно оценить совершенно аналогично. Неравенство (14), а вместе с ним и лемма 2 доказаны.

Следующая лемма, которая также доказывается с помощью закона Био–Савара с использованием двойственности между $L^{\frac{3}{2},\infty}$ и $L^{3,1}$, будет весьма полезной.

ЛЕММА 3. *Существует константа C такая, что*

$$\|v\|_{L^\infty} \leq C\|\omega\|_{L^{3,1}}.$$

Установим теперь ряд априорных оценок в пространствах Лоренца для транспортного уравнения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *Пусть v – бездивергентное векторное поле с коэффициентами из $L^1(0, T; C_\star^1)$ и такое, что $v \cdot n = 0$ на $\partial\Omega$. Пусть a удовлетворяет уравнению $\partial_t a + \operatorname{div}(va) = f$. Тогда при любых $(p, q) \in [1, +\infty]^2$ и $t \in [0, T]$ имеем*

$$\|a(t)\|_{L^{p,q}} \leq \|a(0)\|_{L^{p,q}} + \int_0^t \|f(\tau)\|_{L^{p,q}} d\tau. \quad (16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть сначала $f \equiv 0$. Поскольку соленоидальное векторное поле v принадлежит классу $L^1(0, T; C_\star^1)$, ему соответствует поток ψ , сохраняющий меру Лебега (см., например, [3]). На самом деле, функция ψ является (единственным) решением интегрального уравнения

$$\forall t \in [0, T], \quad \forall x \in \Omega \quad \psi(t, x) = x + \int_0^t v(\tau, \psi(\tau, x)) d\tau.$$

Теперь мы имеем $a(t, \psi(t, x)) = a(0, x)$ при всех $t \in [0, T]$ и $x \in \Omega$. Следовательно,

$$\{y \in \Omega: |a(t, y)| > \lambda\} = \psi_t(\{x \in \Omega: |a(0, x)| > \lambda\}). \quad (17)$$

Раз ψ сохраняет меру Лебега, оба множества в (17) имеют одинаковую меру, что, в силу определения 1, влечет (16), если $f \equiv 0$.

Наконец, неравенство для произвольной силы $f \in L^1(0, T; L^{p,q})$ вытекает из формулы Дюамеля. Доказательство утверждения 2 завершено.

СЛЕДСТВИЕ 1. *Пусть v взято из утверждения 2 и ω удовлетворяет уравнению вихря*

$$\partial_t \omega + \operatorname{div}(v\omega) = r^{-1}\omega v_r. \quad (V)$$

Тогда найдется константа C такая, что при любых $(p, q) \in [1, +\infty]^2$ и всех $t \in [0, T]$ справедливо неравенство

$$\|\omega(t)\|_{L^{p,q}} \leq \|\omega^0\|_{L^{p,q}} \exp(Ct\|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}}).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из утверждения 2 мы сразу получаем неравенство

$$\|\omega(t)\|_{L^{p,q}} \leq \|\omega^0\|_{L^{p,q}} + \int_0^t \|r^{-1}v_r\omega\|_{L^{p,q}} d\tau. \quad (18)$$

Теперь, используя определение пространств Лоренца, легко доказать, что

$$\|r^{-1}v_r\omega\|_{L^{p,q}} \leq \|r^{-1}v_r\|_{L^\infty} \|\omega\|_{L^{p,q}}.$$

Кроме того, в силу утверждения 2 и леммы 2, имеем

$$\begin{aligned} \|r^{-1}v_r(t)\|_{L^\infty} &\leq C\|r^{-1}\omega(t)\|_{L^{3,1}}, \\ &\leq C\|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}}. \end{aligned}$$

Прямое применение леммы Гронуолла завершает доказательство следствия 1.

3. Случай ограниченной области

Для упрощения обозначений мы сфокусируем наше внимание на случае эволюции при *положительных* временах. Чтобы получить аналогичные результаты для *отрицательного* времени, достаточно заменить $(v(t, x), p(t, x))$ на $(-v(-t, x), p(-t, x))$.

3.1. Доказательство единственности. Заметим, что в случае ограниченной области решение v из теоремы 1 принадлежит пространству $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; L^2)$. Поэтому единственность является простым следствием результата об устойчивости.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Пусть область Ω принадлежит классу $C^{2,\alpha}$ и является ограниченной в $\mathbb{R}^N$. Пусть (v^1, p^1) и (v^2, p^2) – два решения системы (E) на $[0, T] \times \Omega$ такие, что

$$v^1, v^2 \in L^\infty(0, T; L^\infty) \cap \text{Lip}([0, T]; L^2), \quad \text{причем} \quad \omega^1 \in L^\infty(0, T; L^\infty).$$

Тогда найдется константа C , зависящая только от Ω и от норм ω^1, v^1 и v^2 в $L^\infty(0, T \times \Omega)$, такая, что если

$$e^{-2} \|v^2(0) - v^1(0)\|_{L^2} \leq e^{-2 \exp(CT)},$$

то для всех $t \in [0, T]$

$$e^{-2} \|v^2(t) - v^1(t)\|_{L^2} \leq \{e^{-2} \|v^2(0) - v^1(0)\|_{L^2}\} \exp(-Ct).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы используем рассуждениям Юдовича из [4]. Обозначив $\delta v := v^2 - v^1$ и $\delta v_0 := v^2(0) - v^1(0)$, имеем

$$\begin{cases} \partial_t \delta v + v^2 \cdot \nabla \delta v = \nabla p^1 - \nabla p^2 - \delta v \cdot \nabla v^1, \\ \delta v|_{t=0} = \delta v_0. \end{cases}$$

Пусть $\varepsilon > 0$ и $\delta_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon^2 + \|\delta v(t)\|_{L^2}^2}$. Тогда очевидно, что

$$\|\delta v(t)\|_{L^2} \leq \delta_\varepsilon(t) \quad \text{и} \quad \delta_\varepsilon \partial_t \delta_\varepsilon = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} \delta_\varepsilon^2 = - \int_\Omega (\delta v \cdot \nabla v^1) \cdot \delta v \, dx.$$

Воспользовавшись неравенством Гёльдера и тем, что $\delta_\varepsilon > 0$, находим, что

$$\partial_t \delta_\varepsilon \leq \delta_\varepsilon^{1-\frac{1}{b}} \|\delta v\|_{L^\infty}^{\frac{1}{b}} \|\nabla v^1\|_{L^b} \quad \text{для любого} \quad b \in (1, \infty). \quad (19)$$

Напомним, что область Ω принадлежит классу $C^{2,\alpha}$ и является ограниченной. Тогда найдется некоторая константа C , зависящая только от Ω , такая, что

$$\|\nabla v\|_{L^b} \leq C \frac{b^2}{b-1} \|\omega\|_{L^b} \quad \text{для любого} \quad b \in (1, \infty). \quad (20)$$

Предположим, что b является измеримой функцией времени t (которая скоро будет задана), причем $b \geq 2$. Интегрируя по времени, получаем неравенство

$$\delta_\varepsilon(t) \leq \delta_\varepsilon(0) + C \int_0^t b(\tau) \|\omega^1(\tau)\|_{L^{b(\tau)}} (\delta_\varepsilon(\tau))^{1-\frac{1}{b(\tau)}} \|\delta v(\tau)\|_{L^\infty}^{\frac{1}{b(\tau)}} d\tau$$

для некоторой константы C , не зависящей от $t \in [0, T]$. Следовательно, в силу того, что δv и ω^1 принадлежат $L^\infty(0, T; L^\infty)$ и область Ω ограничена,

$$\delta_\varepsilon(t) \leq \delta_\varepsilon(0) + C \int_0^t b(\tau) (\delta_\varepsilon(\tau))^{1 - \frac{1}{b(\tau)}} d\tau.$$

Предполагая далее, что $\delta_\varepsilon \leq 1$ на $[0, T]$, выберем $b(t) = 2 - \log \delta_\varepsilon(t)$. Из предыдущего неравенства получаем (с точностью до смены константы C):

$$\delta_\varepsilon(t) \leq \delta_\varepsilon(0) + C \int_0^t \delta_\varepsilon(\tau) (2 - \log \delta_\varepsilon(\tau)) d\tau.$$

Теперь из леммы Осгуда вытекает после некоторых выкладок, что

$$e^{-2} \delta_\varepsilon(t) \leq (e^{-2} \delta_\varepsilon(0))^{\exp(-Ct)} \quad \text{всякий раз, когда} \quad \delta_\varepsilon(\tau) \leq 1 \quad \text{на} \quad [0, t].$$

Устремляя ε к нулю и используя соображения связности, можно завершить доказательство утверждения 3.

3.2. Доказательство существования.

Первый шаг: регуляризация и равномерные оценки. Продолжим ω_θ^0 нулем вне Ω и обозначим через $\omega_\theta^{0,n}$ ограничение $S_n \omega_\theta^0$ на область Ω . Определим теперь $v^{0,n}$ из $\omega_\theta^{0,n}$ по закону Био–Савара (7). Отметим, что в силу того, что срезающая спектральная функция в определении S_n была радиальной, функция $\omega_\theta^{0,n}$ является аксиально-симметричной и тем же свойством обладает функция $v^{0,n}$.

Поскольку $\omega^{0,n}$ является гладкой, функция $v^{0,n}$ принадлежит $C^r(\Omega)$ для некоторого $r \in (1, 2)$ (так как Ω принадлежит классу $C^{2,\alpha}$ и является ограниченной, это вытекает из теоремы 6.6 в [13]). Следовательно, уравнения Эйлера с начальными данными $v^{0,n}$ имеют локальное решение (v^n, p^n) , причем $v^n \in \mathcal{C}([0, T]; C^r)$ (см., например, [14]). Давление можно найти с помощью [14; с. 188]. Теперь, воспользовавшись симметрией и следствием 1, получим, что $\omega^n \in L^\infty(0, T; L^\infty)$. В силу критерия Била–Като–Майды в ограниченной области (см. [14]), заключаем, что решение (v^n, p^n) является глобальным и $v^n \in \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; C^r)$.

Второй шаг: сходимости в $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2)$. Зафиксируем положительное T . При $n \geq m$ обозначим $\delta v_m^n := v^n - v^m$. Последовательности $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ и $(\omega^p)_{p \in \mathbb{N}}$ равномерно ограничены в $L^\infty(0, T \times \Omega)$. В силу утверждения 3, найдется константа C , не зависящая от n и m , такая, что если

$$\|v^{0,n} - v^{0,m}\|_{L^2} \leq e^2 e^{-2 \exp(CT)}, \quad (21)$$

то

$$\forall t \in [0, T] \quad \|\delta v_m^n(t)\|_{L^2} \leq e^2 (e^{-2} \|v^{0,n} - v^{0,m}\|_{L^2})^{\exp(-Ct)}. \quad (22)$$

Заметим, что последовательность $(v^{0,p})_{p \in \mathbb{N}}$ сходится в L^2 . Следовательно, условие (21) выполнено при достаточно больших $n \geq m$, и (22) означает, что $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ является последовательностью Коши в $L^\infty(0, T; L^2)$. Поэтому заключаем, что $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторому соленоидальному векторному полю v в пространстве $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}^+; L^2)$.

Последний шаг: заключение. Интерполируя между полученным результатом о сходимости и равномерными оценками первого шага, заключаем, что $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ стремится к v в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \bigcap_{\varepsilon > 0} C^{1-\varepsilon})$. Этого достаточно для перехода к пределу в каждом члене уравнения. Использование утверждения 2 и следствия 1 завершает доказательство.

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Легко проверить, что построенное решение имеет постоянную энергетическую норму.

4. Случай всего пространства

В этом разделе доказывается теорема 1 для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$.

4.1. Утверждение о единственности. В этом пункте основное внимание уделяется свойству единственности решений из теоремы 1 для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$. Отметим, что из условий на начальные данные не понятно, почему поле вихря должно принадлежать пространству L^2 . Таким образом, единственность *не следует* из доказанного выше утверждения 3.

В этом пункте будет доказана единственность для любой размерности $N \geq 2$ при *единственном* предположении, что давление p является ограниченной функцией времени со значениями в множестве $L^\infty_{\mathbb{L}}$, которое принадлежит пространству локально ограниченных по x функций, имеющих не более чем логарифмический порядок роста на бесконечности, и что скорость v принадлежит $\mathcal{C}([0, T]; C^0_\star) \cap L^1(0, T; C^1_\star)$ (см. определение пространства $C^0_\star$ в замечании 7). Сравнивая это с утверждением Вишика о единственности из работы [6], отметим, что, с одной стороны, здесь не требуется убывания v или ω . А с другой стороны, вихрь в теореме Вишика не обязан принадлежать $L^1(0, T; C^0_\star)$.

Наше доказательство основывается на (элементарном) парадифференциальном исчислении, введенном Ж.-М. Бони в [15]. Основная идея этой техники заключается в том, что произведение любых двух распределений умеренного роста f и g можно формально разложить в следующую сумму:

$$fg = T_f g + T_g f + R(f, g),$$

где оператор парапроизведения T определен по формуле $T_f g := \sum_q S_{q-1} f \Delta_q g$, а остаточный оператор R равен $R(f, g) := \sum_q \Delta_q f (\Delta_{q-1} g + \Delta_q g + \Delta_{q+1} g)$.

Используя преобразования из книги [3] (см. главу 4), в предположении, что $p \in L^\infty(0, T; L^\infty_{\mathbb{L}})$, уравнения Эйлера можно переписать в виде системы, в которой имеется лишь одна неизвестная функция v :

$$\partial_t v + v \cdot \nabla v = \Pi(v, v), \quad (\tilde{\text{E}})$$

где билинейный оператор Π определяется по формуле

$$\Pi(v, w) := -\nabla(-\Delta)^{-1}(T_{\partial_i w^j} \partial_j v^i + T_{\partial_j v^i} \partial_i w^j) + \nabla T_{i,j} R(v^i, w^j). \quad (23)$$

Суммирование производится по повторяющимся индексам, а оператор T_{ij} был определен в [3] (см. теорему 2.5.1).

Наш результат о единственности формулируется следующим образом.

ТЕОРЕМА 2. Пусть v^1 и v^2 являются решениями модифицированных уравнений Эйлера (E) на отрезке $[0, T]$. Предполагается, что v^1 и v^2 принадлежат пересечению пространств

$$\mathcal{C}([0, T]; C_\star^0) \cap L^1(0, T; C_\star^1).$$

Если известно, что $v^1(0) = v^2(0)$, то $v^1 \equiv v^2$ на множестве $[0, T] \times \mathbb{R}^N$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Разность $\delta v := v^2 - v^1$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \delta v + v^2 \cdot \nabla \delta v = \Pi(\delta v, v^1) + \Pi(v^2, \delta v) - \delta v \cdot \nabla v^1. \quad (24)$$

Утверждается, что билинейный оператор Π удовлетворяет следующей оценке при любом $\varepsilon \in (0, 1)$:

$$\forall q \geq -1 \quad \|\Delta_q \Pi(v, w)\|_{L^\infty} \lesssim (q+2)2^{q\varepsilon} \min(\|v\|_{C^{-\varepsilon}} \|w\|_{C_\star^1}, \|w\|_{C^{-\varepsilon}} \|v\|_{C_\star^1}). \quad (25)$$

Это легко выводится из (23). В самом деле, имеем (см. замечание 6 выше), что

$$\Delta_q(T_{\partial_i w^j} \partial_j v^i) = \sum_{q'=q-4}^{q+4} \Delta_q(S_{q'-1} \partial_i w^j \Delta_{q'} \partial_j v^i).$$

По этой причине и в силу того, что однородный оператор $\nabla(-\Delta)^{-1}$ имеет порядок -1 , а носители последовательности $(S_{q'-1} \partial_i w^j \Delta_{q'} \partial_j v^i)_{q' \geq -1}$ принадлежат бинарным ячейкам, находим, что

$$\begin{aligned} \|\Delta_q \nabla(-\Delta)^{-1}(S_{q'-1} \partial_i w^j \Delta_{q'} \partial_j v^i)\|_{L^\infty} &\lesssim 2^{-q} \|S_{q'-1} \nabla w\|_{L^\infty} \|\Delta_{q'} \nabla v\|_{L^\infty}, \\ &\lesssim (q+2)2^{q\varepsilon} \|\nabla w\|_{C_\star^0} \|v\|_{C^{-\varepsilon}}. \end{aligned}$$

Используя стандартный результат о непрерывности парапроизведения (см., например, [3]), мы также имеем

$$\|\Delta_q \nabla(-\Delta)^{-1} T_{\partial_i w^j} \partial_j v^i\|_{L^\infty} \lesssim 2^{q\varepsilon} \|\nabla v\|_{C_\star^0} \|\nabla w\|_{C^{-\varepsilon-1}}.$$

Поэтому первое слагаемое в правой части (23) удовлетворяет (25). Аналогичные неравенства можно доказать и для второго слагаемого в (23).

Изучим теперь остаточный член в (23). При $\varepsilon < 1$ остаточный оператор R отображает пространства $C^{-\varepsilon} \times C_\star^1$ и $C_\star^1 \times C^{-\varepsilon}$ в $C^{1-\varepsilon}$. Поскольку ∇T_{ij} отображает $C^{1-\varepsilon}$ в $C^{-\varepsilon}$ (см. [3; теорема 2.5.1]), то выполнено неравенство (25).

Теперь заметим, что

$$\|\Delta_q(v \cdot \nabla w)\|_{L^\infty} \lesssim (q+2)2^{q\varepsilon} \|w\|_{C_\star^1} \|v\|_{C^{-\varepsilon}}. \quad (26)$$

Это легко устанавливается с помощью разложения Бони:

$$v \cdot \nabla w^i = T_{vj} \partial_j w^i + \partial_j(v^j, w^i) + T_{\partial_j w^i} v^j.$$

Продолжим доказательство единственности. Имея в своем распоряжении неравенства (25) и (26), уравнение (24) можно рассматривать как транспортное уравнение, связанное с векторным полем, с коэффициентами из $L^1(0, T; C_\star^1)$ и с правой частью δf такой, что для любого $\varepsilon \in (0, 1)$

$$\|\Delta_q \delta f\|_{L^\infty} \leq C(q+2)2^{q\varepsilon} (\|v^1\|_{C_\star^1} + \|v^2\|_{C_\star^1}) \|\delta v\|_{C^{-\varepsilon}}. \quad (27)$$

Оценки для такого транспортного уравнения были выписаны в [16] в лемме 2.5. Кратко объясним, как двигаться дальше. Во-первых, применяя оператор Δ_q к уравнению (24) и используя леммы о перестановках и (27), получаем для всех $q \geq -1$ при $t \in [0, T]$

$$\|\Delta_q \delta v(t)\|_{L^\infty} \leq \int_0^t C(q+2)2^{(q+2)\varepsilon_\tau} V'(\tau) \|\delta v\|_{C^{-\varepsilon_\tau}} d\tau, \quad (28)$$

где

$$V(\tau) := \int_0^\tau (\|v^1\|_{C_*^1} + \|v^2\|_{C_*^1}) d\tau'$$

для любой непрерывной функции $\tau \mapsto \varepsilon_\tau$ со значениями в $[0, \frac{1}{2}]$.

Положим $\varepsilon_t := C' \int_0^t V'(\tau) d\tau$ для некоторой константы C' , которая будет выбрана позже. Умножая обе части неравенства (28) на $2^{-(q+2)\varepsilon_t}$ и переходя к точной верхней грани по $q \geq -1$ и $\tau \in [0, t]$, приходим к неравенству

$$\begin{aligned} & \sup_{q \geq -1} \sup_{\tau \in [0, t]} 2^{-C'(q+2)V(\tau)} \|\Delta_q \delta v(\tau)\|_{L^\infty} \\ & \leq \int_0^t C(q+2)2^{C'(q+2)(V(\tau)-V(t))} V'(\tau) \|\delta v\|_{C^{-\varepsilon_\tau}} d\tau \end{aligned}$$

при условии, что t лежит на отрезке $[0, T_0]$, где

$$T_0 = \sup \left\{ t \in [0, T] : C' \int_0^t V(\tau) d\tau \leq \frac{1}{2} \right\}.$$

Следовательно,

$$\sup_{q \geq -1} \sup_{\tau \in [0, t]} 2^{-C'(q+2)V(\tau)} \|\Delta_q \delta v(\tau)\|_{L^\infty} \leq \frac{C}{C' \log 2} \sup_{\tau \in [0, t]} \|\delta v\|_{C^{-\varepsilon_\tau}},$$

и тем самым, если константа C' выбрана достаточно большой, то

$$\sup_{\tau \in [0, t]} \|\delta v(\tau)\|_{C^{-\varepsilon_\tau}} \leq \frac{1}{2} \sup_{\tau \in [0, t]} \|\delta v(\tau)\|_{C^{-\varepsilon_\tau}}.$$

Отсюда получается единственность на отрезке $[0, T_0]$. Теперь, поскольку V принадлежит $L^1(0, T)$, можно повторить рассуждения конечное число раз и получить единственность на всем отрезке $[0, T]$. Теорема 2 доказана.

4.2. Доказательство существования. Доказательство будет проведено в четыре шага. Для простоты рассматривается эволюция при *положительных* временах. Аналогичные рассуждения с очевидностью дадут существование и при *отрицательных* временах.

Шаг 1. Построение глобальных гладких приближенных решений. Мы хотим решить систему (E) модифицированных уравнений Эйлера с начальными условиями $v^{0,n} := S_n v^0$. Отметим, что поскольку поле v^0 является соленоидальным и имеет коэффициенты из C_*^1 , векторное поле $v^{0,n}$ также соленоидально и имеет коэффициенты, скажем, в пространстве $C^{\frac{3}{2}}$. Следовательно,

в силу теоремы 4.2.1 из [3], найдется положительный момент времени T^* (который мы выберем максимальным из возможных) такой, что $(\tilde{E})$ с начальным условием $v^{0,n}$ имеет единственное решение v^n в $\mathcal{C}([0, T^*]; C^{\frac{3}{2}})$. Кроме того,

$$T^* \int_0^{T^*} \|v^n(t)\|_{C_\star^1} dt = +\infty.$$

Утверждается, что из условий для начальных данных следует, что $T^* = +\infty$. В самом деле, с одной стороны, отмечаем, что из аксиальной симметрии v^0 и из радиальности срезающей функции χ следует, что векторное поле $v^{0,n}$ также аксиально-симметрично. С другой стороны, в силу леммы 1 начальный вихрь $\omega^{0,n}$ удовлетворяет условиям

$$\omega^{0,n} \in L^{3,1} \cap L^\infty \quad \text{и} \quad r^{-1}\omega^{0,n} \in L^{3,1}.$$

Следовательно, воспользовавшись следствием 1, находим, что функция $\|\omega^n(t)\|_{L^{3,1} \cap L^\infty}$ остается ограниченной на любом ограниченном подмножестве интервала $[0, T^*)$. Теперь, объединяя закон Био–Савара, лемму 3 и разложение $v^n = S_0 v^n + (\text{Id} - S_0)v^n$, получаем, что

$$\begin{aligned} \|v^n\|_{C_\star^1} &\lesssim \|v^n\|_{L^\infty} + \|\nabla(v^n - S_0 v^n)\|_{C_\star^0}, \\ &\lesssim \|\omega^n\|_{L^{3,1}} + \|\omega^n\|_{C_\star^0}, \\ &\lesssim \|\omega^n\|_{L^{3,1}} + \|\omega^n\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Значит, последовательность $\|v^n(t)\|_{C_\star^1}$ остается ограниченной на любом ограниченном подмножестве из $[0, T^*)$. Отсюда заключаем, что $T^* = +\infty$.

Шаг 2. Равномерные оценки. Объединяя оценки из следствия 1 и лемм 1, 3, получаем, что при всех $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} \|r^{-1}\omega^n(t)\|_{L^{3,1}} &\leq C \|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}}, \\ \|\omega^n(t)\|_{L^{3,1}} &\leq C e^{Ct\|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}}} \|\omega^0\|_{L^{3,1}}, \\ \|\omega^n(t)\|_{L^\infty} &\leq C e^{Ct\|r^{-1}\omega^0\|_{L^{3,1}}} \|\omega^0\|_{L^\infty}. \end{aligned}$$

Учитывая соотношения $\|r^{-1}v^n\|_{L^\infty} \lesssim \|r^{-1}\omega^n\|_{L^{3,1}}$, $\|v^n\|_{C_\star^1} \lesssim \|\omega^n\|_{L^{3,1}} + \|\omega^n\|_{L^\infty}$, заключаем, что

- (а) последовательность $(v^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена в $\mathcal{C}(\mathbb{R}^+; C_\star^1)$,
- (б) последовательность $(\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3,1} \cap L^\infty)$,
- (с) последовательность $(r^{-1}\omega^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3,1})$,
- (д) последовательность $(r^{-1}v_r^n)_{n \in \mathbb{N}}$ ограничена в $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^3)$.

Шаг 3. Сходимость. Зафиксируем положительное T . Докажем, что $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ является последовательностью Коши в $\mathcal{C}([0, T]; C_\star^0)$.

Пусть $(m, n) \in \mathbb{N}^2$, причем $n \geq m$. Обозначим $\delta v_m^n := v^n - v^m$. Тогда δv_m^n удовлетворяет уравнению

$$\partial_t \delta v_m^n + v^n \cdot \nabla \delta v_m^n = \underbrace{\Pi(v^n, \delta v_m^n) + \Pi(\delta v_m^n, v^m) - \delta v_m^n \cdot \nabla v^m}_{\delta f_m^n}.$$

В предыдущем шаге установлено существование такого положительного числа V_T , что

$$\forall p \in \mathbb{N} \quad \|v^p\|_{L^\infty(0,T;C_\star^1)} \leq V_T. \quad (29)$$

Кроме того, из неравенств (25) и (26) находим, что для любых $\alpha \in (0, 1)$ и $q \geq -1$

$$\|\Delta_q \delta f_m^n\|_{L^\infty} \lesssim (q+2)2^{q\alpha} (\|v^m\|_{C_\star^1} + \|v^n\|_{C_\star^1}) \|\delta v_m^n\|_{C^{-\alpha}}.$$

Рассуждая как при доказательстве теоремы 2, заключаем, что найдется некоторая константа c (не зависящая от T , n и m) такая, что

$$\|\delta v_m^n\|_{L^\infty(0,T_1;C^{-\frac{1}{2}})} \leq \varepsilon_m^n := 2\|(S_n - S_m)v_0\|_{C_\star^0}, \quad \text{где } T_1 := \min(T, cV_T^{-1}).$$

Применяя комплексную интерполяцию, находим, что

$$\|\delta v_m^n\|_{L^\infty(0,T_1;C_\star^0)} \leq \|\delta v_m^n\|_{L^\infty(0,T_1;C^{-\frac{1}{2}})}^{\frac{2}{3}} \|\delta v_m^n\|_{L^\infty(0,T_1;C_\star^1)}^{\frac{1}{3}} \leq (\varepsilon_m^n)^{\frac{2}{3}} (2V_T)^{\frac{1}{3}}. \quad (30)$$

Аналогичные вычисления можно произвести для отрезков $[T_1, 2T_1]$, $[2T_1, 3T_1]$ и т.д. Получаем по индукции, что

$$\|\delta v_m^n(t)\|_{C_\star^0} \leq 4V_T(\varepsilon_m^n)^{\exp\{k \log \frac{2}{3}\}},$$

когда $t \in [kT_1, \min(T, (k+1)T_1)]$. Следовательно, в силу определения T_1 , имеем

$$\|\delta v_m^n\|_{L^\infty(0,T_1;C_\star^0)} \leq 4V_T(\varepsilon_m^n)^{\exp\left\{\left(1 + \frac{TV_T}{c}\right) \log \frac{2}{3}\right\}}. \quad (31)$$

Значит,

$$\varepsilon_m^n \leq C2^{-n} \|v^0\|_{C_\star^1},$$

и тем самым последовательность $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ сходится к некоторому соленоидальному векторному полю $v_T \in \mathcal{C}([0, T]; C_\star^0)$.

Наконец, поскольку число T было произвольным и имеются равномерные оценки в $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+; C_\star^1)$, заключаем, что существует соленоидальное векторное поле v в $L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+; C_\star^1) \cap \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \bigcap_{\varepsilon>0} C^{1-\varepsilon})$ такое, что $(v^p)_{p \in \mathbb{N}}$ стремится к v в $L^\infty(\mathbb{R}^+; \bigcap_{\varepsilon>0} C^{1-\varepsilon})$. Кроме того, стандартное рассуждение из функционального анализа гарантирует, что $v \in \mathcal{C}_w(\mathbb{R}^+; C_\star^1)$. В самом деле, пространство $C_\star^1$ является сопряженным к некоторому банахову пространству (а именно к *пространству Бесова* $B_{1,1}^{-1}$), которое содержит всюду плотное множество $\mathcal{C}_c^\infty$.

Шаг 4. Окончание доказательства. Доказанная сходимость в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}^+; \bigcap_{\varepsilon>0} C^{1-\varepsilon})$ позволяет совершить предельный переход в уравнении (Ẽ). Далее, ∇p можно найти, используя теорему 2.5.1 и следствие 2.5.1 из [3]. В итоге получается решение $(v, \nabla p) \in \mathcal{C}_w(\mathbb{R}^+; C_\star^1) \times \mathcal{C}(\mathbb{R}^+; \bigcap_{\varepsilon>0} C^{1-\varepsilon})$ уравнений Эйлера (E).

Кроме того, равномерные оценки для вихря, которые были установлены на втором шаге доказательства, дают включения $\omega \in L_{\text{loc}}^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3,1} \cap L^\infty)$ и $r^{-1}\omega \in L^\infty(\mathbb{R}^+; L^{3,1})$. Точнее, утверждение 2 влечет тождество

$$\forall t \in \mathbb{R}^+ \quad \|r^{-1}\omega(t)\|_{L^{3,1}} = \|r^{-1}\omega_0\|_{L^{3,1}}.$$

Применяя теорему 2, получаем единственность. Это рассуждение завершает доказательство теоремы 1 для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$.

5. Геликоидальные решения

5.1. Определения и свойства. В работе [8] А. Дютрифуа ввел геликоидальные структуры, которые мы будем рассматривать в этом разделе. Для упрощения представления предполагается, что область Ω является или бесконечным круговым цилиндром радиуса R с осью (Oz) (т.е. $\Omega = D(0, R) \times \mathbb{R}$), или всем пространством $\mathbb{R}^3$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть k – положительное число. Говорят, что соленоидальное векторное поле v в Ω является геликоидальным, если

- 1) компоненты v_r , v_θ и v_z поля v постоянны на геликоидах $r = r_0$, $z = z_0 + k\theta$,
- 2) в каждой точке Ω векторное поле v ортогонально $h := re_\theta + ke_z$.

Отметим, что предельный случай $k = 0$ соответствует аксиально-симметричному векторному полю без закручивания. Заметим также, что второе условие можно опустить (см. [17]). Эти более общие геликоидальные структуры совпадают в предельном случае $k = 0$ с аксиально-симметричными структурами с закручиванием.

Поскольку мы собираемся доказать *глобальные* результаты, с этого момента предполагаются выполненными два условия из приведенного выше определения. В работе [8] установлено, что если горизонтальное сечение Ω ограничено и начальное векторное поле v^0 является геликоидальным и достаточно гладким, то система (Е) имеет единственное глобальное решение v , которое также является геликоидальным.

Доказательство Дютрифуа основано на том факте, что вихрь ω удовлетворяет уравнениям

$$k\omega = \omega_z h \quad \text{и} \quad (\partial_t + v \cdot \nabla)\omega_z = 0,$$

где ω_z обозначает *вертикальную* компоненту вектора ω .

Тогда, вводя поток ψ , отвечающий v , получаем (в очевидных обозначениях):

$$\frac{|\omega(t, \psi_t(x))|}{\sqrt{k^2 + r^2(\psi_t(x))}} = \frac{|\omega^0(x)|}{\sqrt{k^2 + r^2}}.$$

Поэтому в случае $\Omega = D(0, R) \times \mathbb{R}$ ясно, что ω остается ограниченным при всех временах, если ω^0 был ограничен. Но тогда, применяя критерий Била–Като–Майды, получаем глобальное существование для достаточно гладких начальных условий.

В настоящем разделе мы задаемся вопросом о глобальной разрешимости геликоидальных уравнений Эйлера при выполнении единственного предположения об ограниченности вихря. Сформулируем основной результат.

ТЕОРЕМА 3. Пусть $\Omega = D(0, R) \times \mathbb{R}$ или $\mathbb{R}^3$. Предположим, что v^0 является соленоидальным и геликоидальным векторным полем в Ω , имеющим ограниченный вихрь ω^0 (в случае $\Omega = \mathbb{R}^3$ дополнительно предполагается, что $\omega^0 \in L^{2,1}(\mathbb{R}^2 \times (-k\pi, k\pi))$). Тогда система (Е) имеет единственное глобальное геликоидальное решение с ограниченным вихрем.

Поскольку в случае всего пространства трудно контролировать низкие частоты, доказательства слегка различаются, в зависимости от того, является ли Ω цилиндром или $\mathbb{R}^3$.

5.2. Цилиндрический случай. При доказательстве существования применяем подход Дютрифуа из [8], поскольку начальные данные были сглажены. Первый шаг требует особого внимания, так как геликоидальная структура должна сохраняться при сглаживании. Начальный вихрь ω^0 имеет (в цилиндрических координатах) представление

$$\omega^0(r, \theta, z) = F(r, \theta - k^{-1}z)(re_\theta + ke_z)$$

для некоторой функции F , зависящей только от двух переменных. Поэтому достаточно рассмотреть семейство функций $(F_\varepsilon)_{\varepsilon>0}$ класса $C^{1/2}(D(0, R))$, равномерно ограниченное в $L^\infty(D(0, R))$ и стремящееся к F в L^∞ *-слабо, и определить

$$\omega_\varepsilon^0(r, \theta, z) := F_\varepsilon(r, \theta - k^{-1}z)(re_\theta + ke_z).$$

Векторное поле ω_ε^0 имеет свойства

$$\omega_\varepsilon^0 \in C^{1/2}(\mathbb{R}^3), \quad \operatorname{div} \omega_\varepsilon^0 = 0, \quad \omega_\varepsilon^0 \cdot n = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega$$

и является $2k\pi$ -периодическим по вертикальной переменной.

Тогда закон Био–Савара позволяет определить некоторое соленоидальное векторное поле v_ε^0 класса $C^{3/2}$, для которого $v_\varepsilon^0 \cdot n = 0$ на границе цилиндра. Заметим, что поле v_ε^0 является геликоидальным, но значение $v_\varepsilon^0 \cdot h$ может не быть нулем. Однако $v_\varepsilon^0 \cdot h$ является константой на Ω .

Теперь на основании теоремы Дютрифуа из [8] (которая легко распространяется на случай, когда $v_\varepsilon^0 \cdot h = \text{const}$) получаем глобальное геликоидальное решение v_ε системы (E) класса $C^{3/2}$ с начальными данными v_ε^0 . При этом используется рассуждение, аналогичное тому, что применялось при обосновании аксиально-симметричного случая, когда делался предельный переход в (E). В итоге получается геликоидальное решение v , отвечающее начальному условию v^0 .

По правде сказать, единственность не вытекает из утверждения 3, поскольку область Ω не является ограниченной. Однако, используя периодичность скорости по вертикали и применяя стандартный энергетический метод, можно легко доказать (с обозначениями из утверждения 3), что функция

$$\delta_\varepsilon(t) := \sqrt{\varepsilon^2 + \|\delta v(t)\|_{L^2(D(0, R) \times (-k\pi, k\pi))}^2}$$

удовлетворяет (19).

Начиная с этого места, единственность доказывается точно так же, как это делалось для утверждения 3.

5.3. Случай всего пространства. Единственность является простым следствием утверждения 3, поэтому более подробно рассмотрим часть теоремы 3 о существовании решения. Обозначим $\mathbb{R}_k^3 := \mathbb{R}^2 \times (-k\pi, k\pi)$. Выполним некоторые формальные преобразования. Во-первых, используя закон Био–Савара и вертикальную периодичность вихря, получаем

$$\forall X \in \mathbb{R}_k^3 \quad |v(X)| \leq \frac{1}{4\pi} \int_{-k\pi}^{k\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \frac{|\omega(X')|}{|X_h - X'_h|^2 + |z - z' - 2\ell k\pi|^2} dX'_h dz',$$

где обозначено $X_h := (x, y)$ и $X'_h = (x', y')$. Следовательно,

$$|v(X)| \leq C \int_{\mathbb{R}_k^3} \frac{|\omega(X')|}{|X_h - X'_h|} dX'.$$

Тем самым доказано неравенство

$$\|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \leq C \|\omega\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)}. \quad (32)$$

Во-вторых, для геликоидальной скорости уравнение вихря сводится к

$$k(\partial_t + v \cdot \nabla)\omega = \omega_z(v_r e_\theta - v_\theta e_r),$$

поэтому, учитывая периодичность по вертикали и рассуждая как при доказательстве утверждения 2, имеем для всех $t \in \mathbb{R}^+$

$$\begin{aligned} k\|\omega(t)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} &\leq k\|\omega^0\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} + \int_0^t \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\omega_z\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} d\tau, \\ k\|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_k^3)} &\leq k\|\omega^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_k^3)} + \int_0^t \|v\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \|\omega_z\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} d\tau, \end{aligned}$$

т.е. поскольку ω_z переносится потоком и выполнено (32), находим, что

$$\begin{aligned} k\|\omega(t)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} &\leq k\|\omega^0\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} + C\|\omega_z^0\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} \int_0^t \|\omega\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} d\tau, \\ k\|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}_k^3)} &\leq k\|\omega^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}_k^3)} + C\|\omega_z^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} \int_0^t \|\omega\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} d\tau. \end{aligned}$$

Применяя лемму Гронуолла, заключаем, что

$$\begin{aligned} \|\omega(t)\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} &\leq \|\omega^0\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} e^{\frac{C}{k} t \|\omega_z^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}}, \\ \|\omega(t)\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} &\leq \|\omega^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)} + C^{-1} \|\omega_z^0\|_{L^{2,1}(\mathbb{R}_k^3)} (e^{\frac{C}{k} t \|\omega_z^0\|_{L^\infty(\mathbb{R}^3)}} - 1). \end{aligned}$$

Чтобы завершить доказательство теоремы 3, осталось лишь правильно сгладить данные. Это делается почти как в цилиндрическом случае (надо взять функции F_ε с компактными носителями).

6. Дальнейшие результаты и открытые проблемы

1. Существование, доказанное в теореме 1, можно достаточно просто распространить на любую гладкую связную область с компактной границей. Что касается единственности, то она имеет место для решений с конечной энергией всякий раз, когда неравенство (20) выполнено в области Ω .

2. Для упрощения изложения результатов и методов мы рассмотрели в данной статье лишь невязкую жидкость. В случае $\Omega = \mathbb{R}^3$ или $\Omega = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1$ большинство результатов, однако, распространяются и на вязкую жидкость. В частности, теорему 1 можно обобщить для аксиально-симметричных несжимаемых уравнений Навье–Стокса вида

$$\begin{cases} \partial_t v + v \cdot \nabla v - \nu \Delta v + \nabla p = 0, \\ \operatorname{div} v = 0. \end{cases} \quad (\text{NS}_\nu)$$

Сделав в точности те же предположения, что и в теореме 1, можно доказать результат о существовании с оценками, *не зависящими* от коэффициента вязкости ν .

3. Имеется также возможность рассматривать неоднородные уравнения с внешней силой f , стоящей в правой части (E). На самом деле, утверждение теоремы 1 остается верным, если предположить, что f является аксиально-симметричной (без закручивания) и удовлетворяет условиям

$$\operatorname{curl} f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^\infty \cap L^{3,1}) \quad \text{и} \quad r^{-1} \operatorname{curl} f \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^{3,1}).$$

Доказательство оставляется читателю.

4. Теорема о глобальном существовании для аксиально-симметричных данных v^0 из H^s при $s > 5/2$, которая доказана в [11], теперь оказывается следствием теоремы 1. На самом деле, утверждается, что если $v^0 \in H^s$ – соленоидальное аксиально-симметричное векторное поле, то выполнены условия теоремы 1. Действительно, по теореме вложения Соболева находим, что $\omega^0 \in L^{3,1} \cap L^\infty$ и если $s \in (\frac{5}{2}, \frac{7}{2})$, то

$$H^{s-2} \hookrightarrow L^q \quad \text{при} \quad 2 \leq q \leq q_s := \frac{3}{\frac{7}{2} - s}.$$

Следовательно, $D\omega^0$ (и тем самым $r^{-1}\omega^0$) принадлежит $L^2 \cap L^{q_s}$. Так как $q_s > 3$, по интерполяции получаем, что $r^{-1}\omega^0 \in L^{3,1}$.

Объединяя наши глобальные оценки для $\|\omega\|_{L^\infty}$ с хорошо известным критерием Била–Като–Майды о продолжении (см. [18]), получаем глобальное существование в H^s .

5. Для аксиально-симметричных данных предположения теоремы 1 также выполнены, если известно, что $v^0 \in B^{\frac{5}{2},1}_2$, или (в более общем случае) если $v^0 \in B^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}$ для некоторого $p \in [1, 3)$. В самом деле, для достаточно малого ε имеем

$$B^{\frac{3}{p}-1+\varepsilon}_{p,1} \hookrightarrow L^{\frac{3}{1-\varepsilon}},$$

значит, совершая вещественную интерполяцию, получаем

$$B^{\frac{3}{p}-1}_{p,1} = (B^{\frac{3}{p}-1-\varepsilon}_{p,1}, B^{\frac{3}{p}-1+\varepsilon}_{p,1})_{(\frac{1}{2},1)} \hookrightarrow (L^{\frac{3}{1+\varepsilon}}, L^{\frac{3}{1-\varepsilon}})_{(\frac{1}{2},1)} = L^{3,1}.$$

Следовательно, наша теорема 1 дает глобальное решение с вихрем из $L^\infty_{\text{loc}}(\mathbb{R}; L^\infty)$. Остается открытым вопрос: будет ли начальное условие регулярности класса $B^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}$ сохраняться все последующее время? Это, конечно, верно для малого временного интервала (см., например, [19]). Однако не ясно, можно ли применять критерий Била–Като–Майды в пространствах Бесова. Таким образом, даже при сохранении ограниченности вихря для всех времен не известно, сохраняется ли глобально критическая регулярность $B^{\frac{3}{p}+1}_{p,1}$.

Отметим, что М. М. Вишик решил аналогичную проблему для двумерного случая. На самом деле, он смог обойти критерий Била–Като–Майды, остроумно использовав уравнения вихря. Его доказательство, однако, в решающей степени основано на том факте, что в случае двумерной несжимаемой жидкости в уравнении вихря отсутствует член растяжения (см. [20]).

Список литературы

- [1] L. Lichtenstein, “Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik”, *Math. Z.*, **32**:1 (1930), 608–640.
- [2] W. Wolibner, “Un théorème sur l’existence du mouvement plan d’un fluide parfait, homogène, incompressible, pendant un temps infiniment long”, *Math. Z.*, **37**:1 (1933), 698–726.
- [3] J.-Y. Chemin, “Fluides parfaits incompressibles”, *Astérisque*, **230**, 1995.
- [4] В. И. Юдович, “Нестационарные течения в идеальной несжимаемой жидкости”, *Журн. вычисл. матем. и матем. физ.*, **3** (1963), 1032–1066.
- [5] V. I. Yudovich, “Uniqueness theorem for the basic nonstationary problem in the dynamics of an ideal incompressible fluid”, *Math. Res. Lett.*, **2**:1 (1995), 27–38.
- [6] M. Vishik, “Incompressible flows of an ideal fluid with vorticity in borderline spaces of Besov type”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **32**:6 (1999), 769–812.
- [7] D. Serre, “La croissance de la vortacité dans les écoulements parfaits incompressibles”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **328**:6 (1999), 549–552.
- [8] A. Dutrifoy, “Existence globale en temps de solutions hélicoïdales des équations d’Euler”, *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.*, **329**:7 (1999), 653–656.
- [9] В. И. Юдович, М. Р. Уховский, “Осесимметричные течения идеальной и вязкой жидкости, заполняющей все пространство”, *ПММ*, **32**:1 (1968), 59–69; англ. пер.: М. R. Ukhovskii, V. I. Yudovich, “Axially symmetric flows of ideal and viscous fluids filling the whole space”, *J. Appl. Math. Mech.*, **32**:1 (1968), 52–61.
- [10] J. Ben Ameer, R. Danchin, “Limite non visqueuse pour les fluides incompressibles axisymétriques”, *Nonlinear partial differential equations and their applications. Collège de France seminar*, vol. XIV (Paris, France, 1997–1998), *Stud. Math. Appl.*, **31**, North-Holland, Amsterdam, 2002, 29–55.
- [11] T. Shirota, T. Yanagisawa, “Note on global existence for axially symmetric solutions of the Euler system”, *Proc. Japan Acad. Ser. A. Math. Sci.*, **70**:10 (1994), 299–304.
- [12] R. A. Hunt, “On $L(p, q)$ spaces”, *Enseignement Math. (2)*, **12** (1966), 249–276.
- [13] D. Gilbarg, N. S. Trudinger, *Elliptic partial differential equations of second order*, *Classics Math.*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.
- [14] A. Dutrifoy, “Precise regularity results for the Euler equations”, *J. Math. Anal. Appl.*, **282**:1 (2003), 177–200.
- [15] J.-M. Bony, “Calcul symbolique et propagation des singularités pour les équations aux dérivées partielles non linéaires”, *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, **14**:2 (1981), 209–246.
- [16] R. Danchin, “Évolution d’une singularité de type cusp dans une poche de tourbillon”, *Rev. Mat. Iberoamericana*, **16**:2 (2000), 281–329.
- [17] A. Mahalov, E. S. Titi, S. Leibovich, “Invariant helical subspaces for the Navier–Stokes equations”, *Arch. Rational Mech. Anal.*, **112**:3 (1990), 193–222.
- [18] J. T. Beale, T. Kato, A. Majda, “Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations”, *Comm. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 61–66.
- [19] Y. Zhou, “Local well-posedness for the incompressible Euler equations in the critical Besov spaces”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **54**:3 (2004), 773–786.
- [20] M. Vishik, “Hydrodynamics in Besov spaces”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **145**:3 (1998), 197–214.

Р. Даншен (R. Danchin)

Centre de Mathématiques, Université Paris 12, France

E-mail: danchin@univ-paris12.fr

Поступила в редакцию

06.02.2007