Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Гришин, Кратности и показатели представимости нематричных многообразий алгебр, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 143–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm678>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.127.20

26 апреля 2023 г., 16:50:49

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

КРАТНОСТИ И ПОКАЗАТЕЛИ ПРЕДСТАВИМОСТИ
НЕМАТРИЧНЫХ МНОГООБРАЗИЙ АЛГЕБР

А. В. Гришин

Ниже рассматриваются только ассоциативные алгебры.

Пусть k — поле нулевой характеристики, $F = k\langle x_1, \dots, x_i, \dots \rangle$ — свободная счетнопорожденная k -алгебра. Рассмотрим свободные k -произведения $L_n = \underbrace{(k \oplus \dots \oplus k)}_n * k\langle x_1, \dots, x_{n-1} \rangle$

(где $n = 2, 3, \dots$), конечномерные алгебры $R_n = L_n/(x_1, \dots, x_{n-1})^n$ и их фактор-алгебры $R_n(S) = R_n/(S)_n$, где $(S)_n$ — вербальный идеал алгебры R_n , порожденный некоторой системой некоммутативных многочленов S из алгебры F , причем S задает унитарно замкнутое нематричное многообразие $\mathfrak{M}$.

Как показано в [1], если S обеспечивает представимость свободной алгебры этого многообразия, т.е. вложимость ее в конечномерную алгебру над некоторым расширением основного поля, то имеет место равенство $\text{Var}(R_n(S)) = \mathfrak{M}$ для всех достаточно больших n . Алгебра $R_n(S)$ в этом случае называется *модельной алгеброй многообразия* $\mathfrak{M}$.

Наименьшее из таких n назовем *показателем представимости* $\rho(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$. Назовем *кратностью* $\mu(\mathfrak{M})$ многообразия $\mathfrak{M}$ индекс нильпотентности радикала его свободной счетнопорожденной алгебры.

ТЕОРЕМА. (1) Если $S = \{[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}]\}$, то $\mu(\mathfrak{M}) = \rho(\mathfrak{M}) = n$.

(2) Если $S = \{[x_1, [x_2, x_3]], st_{2n}\}$, где st_{2n} — стандартный многочлен степени $2n$ (здесь, как и выше, $n \geq 2$), то $\mu(\mathfrak{M}) = n$; $\rho(\mathfrak{M}) = 2n - 1$.

(3) Если S содержит st_{2n} и полилинейный многочлен вида $t_1 \cdots t_m$, где t_i — длинный коммутатор длины $l_i \geq 3$, то

$$\mu(\mathfrak{M}) \leq n((l_1 - 2) + \dots + (l_m - 2)),$$

при $m = 1$

$$\rho(\mathfrak{M}) \leq (2n + 1)(l_1 - 2) - 2.$$

Доказательство этой теоремы основывается на следующих леммах.

ЛЕММА 1. Для любого $m \geq n$ имеет место сравнение

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2m-1}, x_{2m}] \equiv 0 \pmod{st_{2n}, ([x_1, x_2], x_3)^T},$$

причем для всех $1 \leq m < n$ данное сравнение места не имеет.

Доказательство этой леммы использует некоторые коммутаторные соотношения по модулю $([x_1, x_2], x_3)^T$ (см., например, [2]).

ЛЕММА 2. *Всякий полилинейный многочлен из алгебры F , исчезающий при подстановке вместо всех переменных единицы, является по модулю T -идеала $(st_{2n}, [[x_1, x_2], x_3])^T$ линейной комбинацией выражений вида*

$$c_1 \cdots c_m x_{i_1} \cdots x_{i_l},$$

где c_i – коммутаторы от переменных, которые расположены в порядке возрастания индексов, $1 \leq m \leq n-1$, $x_{i_1} \cdots x_{i_l}$ – оставшиеся переменные, расположенные в порядке возрастания индексов. Указанные выражения образуют линейно независимую систему по модулю рассматриваемого T -идеала.

ЛЕММА 3. Пусть система S содержит длинный коммутатор и $e_1, \dots, e_n$ – единицы простых компонент алгебры $\underbrace{k \oplus \cdots \oplus k}_n$, входящей в алгебру $R_n(S)$. Тогда

- (1) $e_i \bar{x}_\alpha e_j = 0$ при $i \neq j$;
- (2) имеется разложение в прямую сумму

$$R_n(S) = (ke_1 + X_1) \oplus \cdots \oplus (ke_n + X_n),$$

где $X_i = (e_i \bar{x}_1 e_i, \dots, e_i \bar{x}_{n-1} e_i)$.

Следуя [3], через $T^{(s)}$ обозначим T -идеал алгебры F , порожденный правонормированным длинным коммутатором, имеющим длину s .

ЛЕММА 4 (лемма Латышева [3]). *Имеет место включение $T^{(s)}T^{(t)} \subset T^{(s+t-2)}$.*

ЛЕММА 5. Пусть I – T -идеал алгебры F , содержащий стандартный многочлен st_{2n} и T -идеал $T^{(s)}$. Тогда индекс нильпотентности радикала алгебры F/I не превосходит $n(s-2)$.

Кроме того, в доказательстве свойства (1) используются результаты работы [4].

ЗАМЕЧАНИЯ. 1. Вопрос об оценке кратности некоторых многообразий произвольной сложности (т.е. не обязательно нематричных) исследовался ранее автором в [5].

2. Свойства (1) и (2) устанавливают следующий, на первый взгляд удивительный факт. Показатель представимости большего многообразия, заданного тождеством

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}] = 0,$$

равен n , а показатель представимости меньшего многообразия, заданного тождествами

$$[[x_1, x_2], x_3] = 0, \quad st_{2n} = 0,$$

равен $2n-1$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [3] В. Н. Латышев // Сиб. матем. журн. 1965. Т. 6. № 6. С. 1432–1434. [5] А. В. Гришин // Матем. сб. 2002. Т. 193. № 3. С. 25–36. [1] А. В. Гришин // УМН. 2002. Т. 57. № 4. С. 169–170. [2] В. В. Шиголев // Матем. сб. 2000. Т. 191. № 3. С. 143–160. [4] J. Lewin // Trans. Amer. Math. Soc. 1974. V. 188. № 2. P. 293–317.

Московский педагогический
государственный университет

Принято редколлегией
23.09.2003