Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. А. Богатый, Геометрия отображений в евклидово пространство, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 27–56

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm68>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 03:10:49

УДК 515.127.15

ГЕОМЕТРИЯ ОТОБРАЖЕНИЙ В ЕВКЛИДОВО ПРОСТРАНСТВО

С. А. БОГАТЫЙ

СОДЕРЖАНИЕ

§0. Введение	27
§1. Множества, находящиеся в сильно общем положении	32
§2. Регулярно ветвящиеся отображения	37
§3. Обращение теоремы Гуревича для полиэдров	37
§4. Проблемы Гуревича и Нёбелинга	42
§5. Обращение теоремы существования для полиэдров	44
§6. Когомологическая размерность	47
§7. Исторические замечания к формуле Урысона	50
Список литературы	54

§0. Введение

В разных областях математики имя П. С. Урысона ассоциируется с разными понятиями и результатами [1]. В нелинейном анализе это, несомненно, в первую очередь, интегральный оператор Урысона [2, гл. 1, § 3], в выпуклой геометрии это неравенство Урысона [3, с. 65], в теории аппроксимаций это поперечник Урысона [4, с. 18], а в топологии это, конечно, теория бикompактных пространств и теория размерности (пространство Фреше–Урысона, теорема Брауэра–Урысона–Титце о продолжении, формула Урысона).

Напомним мнение П. С. Александрова [5, с. 10], [1, т. 1, с. 33] о том, что только теорема Урысона о совпадении индуктивной размерности и лебеговой размерности компакта позволила связать интуитивно понятное определение размерности с определением, которое явилось основой всего дальнейшего развития теории размерности. Здесь уместно подчеркнуть, что хотя определение размерности с помощью кратности мелких покрытий и восходит к работам Лебега [6], [7] и Брауэра [8], но именно в доказательстве своего тождества $\dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X$ П. С. Урысон выделил $\dim X$ в качестве особого топологического инварианта компакта X , а не остался в пределах

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 97-01-00357) и INTAS (грант № 96-0712).

работ Лебега и Брауэра о кратности покрытий n -мерного куба. Беглый взгляд на содержание монографий по теории размерности, на программы конференций по общей, геометрической и алгебраической топологии показывает, что именно инвариант $\dim$ (“краеугольный камень теории размерности” по мнению Р. Энгелькинга и Р. Поля) явился основой всего последующего развития теории размерности. “Одна из самых больших заслуг Урысона в теории размерности состоит в том, что он впервые выделил (1921 г.) размерность $\dim X$ в качестве самостоятельного топологического инварианта и доказал (для компактов X) тождество $\dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X$ ” [9, с. 164, сноска *]). Именно важность размерности $\dim$ заставляет Р. Энгелькинга и Р. Поля отмечать в специальной сноске (в работе, посвященной В. Гуревичу [10]), что размерность $\dim$ для нормальных пространств была введена Э. Чехом (см. § 7).

“Эта эквивалентность двух совершенно разнородных определений позволяет, естественно, взглянуть на урысоновскую размерность с совершенно новой комбинаторно-алгебраической точки зрения. Таким образом, открывается широкая возможность приложения алгебраических методов к изучению размерности и связанных с нею топологических свойств” [1, т. 1, с. 37].

Именно комбинаторно-топологическая теорема П. С. Александрова, характеризующая размерность $\dim$ с помощью ε -отображений в полиэдры, позволяет легко получить оценку сверху размерности произведения. Для любых компактных метрических пространств X и Y справедливо неравенство

$$(\log) \quad \dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y.$$

Попытки получения в логарифмическом неравенстве $(\log)$ равенства явились источником развития многих областей алгебраической топологии. Л. С. Понтрягин [11] построил примеры двумерных компактов, произведение которых трехмерно. В. Г. Болтянский [12] построил пример двумерного компакта, квадрат которого трехмерен. М. Ф. Бокштейн [13] полностью решил задачу вычисления размерности произведения двух компактов. Когда содержание данной работы рассказывалось в июне 1997 года на семинаре Х. Ципанга в Ruhr-Universität Bochum, то некоторые участники семинара, интересы которых находятся, в основном, в области алгебры и маломерной топологии, недоумевали по поводу “неправильности” размерности (или класса рассматриваемых пространств), которая при взятии произведения не складывается. Более чем 70-летняя история развития общей топологии после публикации мемуаров П. С. Александрова и П. С. Урысона по теории бикомпактных пространств и теории размерности показывает как естественность в общей топологии класса метрических бикомпактных (компактных) пространств, так и “единственность” (а значит, “правильность”) размерности. Конечно, в алгебраической топологии более естественным является класс CW -комплексов, а в гладкой топологии – класс многообразий.

Можно сказать, что эта “единственная неправильность” поведения размерности оказала самое сильное влияние на развитие и даже возникновение других областей математики. Так, по мнению Е. Г. Склиаренко, именно в работах М. Ф. Бокштейна по вычислению размерности произведения возникли основы теории когомологических операций и гомологической алгебры, что, к сожалению, не нашло должного отражения в соответствующей исторической литературе.

Хотя основным вкладом П. С. Урысона в математику, видимо, считается построение теории размерности, но, скорее всего, наибольшую известность П. С. Урысон имеет в связи с понятием “поперечник Урысона”. Приведем выдержку из монографии К. И. Бабенко [14]. “Замечательно, что поперечники впервые появились в работе П. С. Урысона, написанной в 1925, 1926 гг. [15] и посвященной теории размерности. Важные в численном анализе поперечники Александрова введены в 1933 г. в работе [16], но опять не в связи с теорией приближений.”

В настоящее время вычисление различных поперечников (например, Александрова, Бернштейна, Гельфанда, Колмогорова, Урысона [4, с. 14–18]) различных (функциональных) пространств является одной из основных задач теории аппроксимаций. Поперечник Урысона является развитием понятия размерности $\dim$.

Пр процитируем еще раз П. С. Александрова [1, т. 1, с. 41]. “Урысону принадлежит общий почин рассмотрения конечных замкнутых покрытий, сделавшихся впоследствии одним из основных инструментов топологии, в частности, явившихся средством построения гомологической теории компактов и значительно более общих пространств. С другой стороны, привлечение тех же покрытий послужило основой для введения Л. А. Люстерником и Л. Г. Шнирельманом понятия категории, позволившего им, как известно, далеко развить топологические методы в вариационном исчислении и решить при их помощи ряд классических задач.”

В недавней работе автора [17] рассматривается некоторый аналог теоремы Люстерника–Шнирельмана для действия произвольной конечной группы. Данная статья посвящена аналогу поперечника Александрова, в котором, правда, рассматриваются не две склеивающиеся точки, а k точек, имеющих общий образ, но отображения берутся не в произвольный полиэдр, а в евклидово пространство (многоточечный аналог поперечника $\gamma_m(X)$ [4, с. 16]). Так как в работе исследуется только факт существования соответствующих склеивающихся k точек, а не их метрический инвариант, т.е. исследуется только вопрос зануления или не зануления соответствующего аналога поперечника Александрова, то фактически все понятия теории поперечников остаются за кадром. Сам автор пришел к рассматриваемым в статье задачам, изучая теоремы типа Борсука–Улама, Люстерника–Шнирельмана о склеивании некоторой орбиты действия группы $\mathbb{Z}_p$ или, наоборот, отсутствия такого склеивания, полученного В. В. Макеевым при опровержении гипотезы Кнастера с помощью рассмотрения конфигураций и отображений общего положения [18]–[21]. Только впоследствии автор узнал, что метод общего положения много ранее успешно применялся Гуревичем [22]–[23] для построения отображений малой кратности (т.е. для “расщепления” всех k -точечных конфигураций). Так как на k -й степени любого пространства действие группы $\mathbb{Z}_k$ задается совершенно естественным образом, то это действие, опять-таки, очень часто остается за кадром. Но так как индекс свободного действия группы $\mathbb{Z}_p$ на пространстве $X^p \setminus \Delta$ оценивается сверху размерностью пространства X^p , то мы видим важность вычисления в таких задачах размерности если и не общего произведения компактов, то, по крайней мере, степеней компактов.

Классическая теорема Нёбелинга–Понтрягина–Лефшеца (доказанная в одномерном случае также Менгером) о вложении утверждает, что всякий компакт X размерности $\dim X = n$ вкладывается в $(2n + 1)$ -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^{2n+1}$. Обычно в монографиях по теории размерности теорема вложения дается в более сильной формулировке В. Гуревича [9], [24]. *Множество всех вложений n -мерного*

компактного пространства X в m -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ при $m \geq 2n + 1$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ всех непрерывных отображений компакта X в $\mathbb{R}^m$.

В действительности В. Гуревич доказал значительно более сильное утверждение [22]. Мы будем следовать терминологии работы [25]. Для отображения $f: X \rightarrow Y$ и всякого $k \geq 0$ рассмотрим подмножество $B_k(f) \subseteq Y$:

$$B_k(f) = \{y \in Y : \text{card } f^{-1}(y) \geq k\}.$$

Отображение f называется *регулярно ветвящимся*, если для всякого $k \geq 1$ имеет место неравенство

$$(H_k) \quad \dim B_k(f) \leq k \dim X - (k - 1) \dim Y = \dim Y - k(\dim Y - \dim X).$$

Очевидно, что при $2 \dim X + 1 \leq \dim Y$ всякое регулярно ветвящееся отображение является вложением. Кроме того, если $\dim X + 1 \leq \dim Y$, то всякое регулярно ветвящееся отображение имеет кратность $\leq \dim X + 1$. Для регулярно ветвящегося отображения f справедливо также неравенство $\dim f(X) \leq \dim X$.

ТЕОРЕМА ГУРЕВИЧА. *Если $m \geq \dim X + 1$, то множество всех регулярно ветвящихся отображений $\mathcal{H}(X, \mathbb{R}^m)$ компакта X в $\mathbb{R}^m$ содержит всюду плотное в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ множество типа G_δ .*

Мы показываем, что при $m \geq \dim X + 3$ из теоремы Дранишников [26] вытекает возможность замены в теореме Гуревича в условии (H_2) числа $2 \dim X$ на не большее число $\dim X^2$. При $m = \dim X + 1$ такая замена невозможна.

Для любых целых чисел $r \geq -1$ и $k \geq 1$ рассмотрим в $\mathcal{C}(X, Y)$ подмножество $\mathcal{N}_{r,k}(X, Y)$ всех таких отображений, для которых имеет место неравенство $\dim B_k(f) \leq r$.

Понятно, что при $k \dim X - (k - 1) \dim Y \leq r$ имеет место включение

$$\mathcal{H}(X, Y) = \bigcap_k \mathcal{N}_{k \dim X - (k-1) \dim Y, k}(X, Y) \subseteq \mathcal{N}_{r,k}(X, Y).$$

Теорему Гуревича можно ослабить до следующего утверждения.

Если числа $n = \dim X$, m , k и r удовлетворяют неравенству

$$kn \leq (k - 1)m + r,$$

то множество $\mathcal{N}_{r,k}(X, \mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$.

СЛЕДСТВИЕ ГУРЕВИЧА. *Если числа n , m и k удовлетворяют неравенству*

$$(n, m, k) \quad n + 1 \leq (m - n)k,$$

то для любого n -мерного компакта X множество всех его не более чем k -кратных отображений в m -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ содержит всюду плотное в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ подмножество типа G_δ .

В. Гуревичем была сформулирована следующая гипотеза обращения [22, с. 400].

“Мне кажется очень вероятным, что n -мерные компакты характеризуются тем, что множество их вложений в $\mathbb{R}^{2n+1}$ плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{2n+1})$.”

Нёбелинг сформулировал более общую гипотезу [27].

“Вероятно для компакта X неравенство $\dim X \leq n$ равносильно (при заданном числе r , $-1 \leq r \leq n-1$) плотности в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{2n-r})$ подмножества всех конечнократных отображений из $\mathcal{N}_{r,2}(X, \mathbb{R}^{2n-r})$.”

Теорема Бокштейна–Кузьмина [28] показывает, что положительный ответ на проблему Гуревича содержится в теореме Дранишников–Веста [29]. Здесь уместно отметить, что, тесно связанная с указанной проблемой Гуревича, проблема описания n -мерных компактов X , множество вложений которых в $\mathbb{R}^{2n}$ всюду плотно, полностью решена [30].

Положительное же решение проблемы Нёбелинга вытекает из теоремы Бокштейна–Кузьмина и теоремы Дранишников–Реповша–Щепина [31].

В случае полиэдра X мы доказываем обращение ослабленного варианта теоремы Гуревича при произвольных числах r и k . Обращение ослабленного варианта теоремы Гуревича для полиэдральных пространств получается в работе с помощью понятия подмножества $\mathbb{R}^m$, находящегося в сильно общем положении. Рассмотрение подмножеств $\mathbb{R}^m$, находящихся в сильно общем положении, позволило дать простое доказательство теоремы о размерности пересечения образов общих отображений и получить некоторое усиление теоремы Тверберг [32].

В пятом параграфе работы получены некоторые результаты об обращении теоремы существования “экономичного” отображения (при отсутствии требования плотности множества “экономичных” отображений). В случае, когда число $k+1$ является двойкой, простым нечетным числом, степенью простого числа, обращение следствия Гуревича о существовании не более чем k -кратного отображения дается теоремами ван Кампена и Флореса [33], [34], Саркариа [35], Воловикова [36]. С помощью теоремы Коэна–Ласка [37] о частичной склейке орбиты мы получаем некоторое слабое обращение следствия Гуревича о существовании не более чем k -кратного отображения в случае произвольного числа $k+1$, которое, однако, при $m = n+1$ позволяет получить полное обращение указанного следствия Гуревича. Именно, *при $N = 2n^2 + 5n$ для всякого непрерывного отображения $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, где Δ_n^N обозначает n -мерный остов N -мерного симплекса, существуют такие попарно дизъюнктные замкнутые симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1} \subset \Delta_n^N$, что пересечение их образов непусто*. Автору неизвестно, можно ли в сформулированном утверждении взять $N = n^2 + 3n$. Компакт Δ_n^N является полиэдром с “достаточным” количеством n -мерных симплексов, которые сильно сцеплены. Но оказалось, что при $m = n+1$ есть еще один класс пространств, у которых любое отображение сильно отличается от вложения.

Именно, мы доказываем следующее усиление теоремы Александрова о размерной полноценности n -мерного компакта в $\mathbb{R}^{n+1}$. *У всякого нульмерного отображения f n -мерного размерно неполноценного компакта в $\mathbb{R}^{n+1}$ множество точек неоднократности (в $\mathbb{R}^{n+1}$) имеет размерность не менее $n-1$, т.е. $\dim B_2(f) \geq n-1$* . Сформулированное усиление теоремы Александрова получено в качестве следствия некоторого когомологического варианта теоремы Фрейденшталя–Вайнштейна, которая соответствует когомологическому варианту Кузьмина теоремы Гуревича о повышающих размерность конечнократных отображениях.

Мы также показываем, что для конечномерных компактов алгебраический и

геометрический дефекты равны, что является усилением характеристики Болтянского размерно полноценных компактов [38]. Наше доказательство опирается на вычисления в алгебре Бокштейна, проведенные для других целей А. Н. Дранишниковым, Д. Реповшем и Е. В. Шепиным [39].

В седьмом параграфе обсуждается историческая проблема о возникновении общепотребительного ныне термина “формула Урысона–Менгера”, ответ на которую, видимо, никогда уже не будет получен.

§ 1. Множества, находящиеся в сильно общем положении

Для множества $M \subseteq \mathbb{R}^m$ пусть $\Pi(M)$ означает наименьшую плоскость в $\mathbb{R}^m$, содержащую это множество M . Плоскость $\Pi(M)$ существует и единственна и

$$\Pi(M) = \bigcap \{ \Pi : \Pi \supseteq M \text{ и } \Pi \text{ это плоскость в } \mathbb{R}^m \}.$$

Для упрощения обозначений (и по аналогии с подпространствами в векторном пространстве) наименьшую плоскость, содержащую заданные плоскости Π_1 и Π_2 , т.е. плоскость $\Pi(\Pi_1 \cup \Pi_2)$, будем обозначать через $\Pi_1 + \Pi_2$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. *Если плоскости Π_1 и Π_2 пересекаются, то справедливо равенство*

$$\dim \Pi_1 \cap \Pi_2 = \dim \Pi_1 + \dim \Pi_2 - \dim(\Pi_1 + \Pi_2).$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. *Если плоскости $\Pi_1, \dots, \Pi_k$ пересекаются, то справедливо неравенство*

$$\dim \Pi_1 \cap \dots \cap \Pi_k \geq \dim \Pi_1 + \dots + \dim \Pi_k - m(k-1).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Множество точек M пространства $\mathbb{R}^m$ *находится в общем положении*, если для всякого подмножества $M_1 \subseteq M$, содержащего не более чем $(m+1)$ точку, справедливо равенство $\dim \Pi(M_1) = |M_1| - 1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Множество точек M пространства $\mathbb{R}^m$ *находится в сильно общем положении*, если любые попарно непересекающиеся подмножества $M_1, \dots, M_k \subseteq M$ удовлетворяют условию

$$\begin{aligned} (\emptyset) \quad & \text{пересечение плоскостей } \Pi(M_1), \dots, \Pi(M_k) \text{ пусто, или} \\ (\text{SGP}) \quad (=) \quad & \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_k) \\ & = \dim \Pi(M_1) + \dots + \dim \Pi(M_k) - m(k-1). \end{aligned}$$

Так как условия $\Pi = \mathbb{R}^m$ и $\dim \Pi = m$ равносильны, то в определении 2 все подмножества M_i , для которых $\dim \Pi(M_i) = m$, можно не учитывать. Такие подмножества не меняют ни правую, ни левую часть равенства $(=)$ в (SGP), следовательно без ограничения общности всегда можно считать, что $\dim \Pi(M_i) \leq m-1$. Далее, так как для оставшихся подмножеств справедливо неравенство $\dim \Pi(M_i) \leq m-1$, то для правой части равенства $(=)$ справедлива оценка

$$\dim \Pi(M_1) + \dots + \dim \Pi(M_k) - m(k-1) \leq (m-1)k - m(k-1) = m-k.$$

Следовательно, при $m+1 \leq k$ в условиях определения 2 пересечение плоскостей всегда пусто, поэтому всегда можно считать, что $k \leq m+1$. Далее, так как в условии определения фигурирует только плоскость $\Pi(M_i)$, а не само первоначальное множество и взятие подмножеств в M_i не уничтожает попарную дизъюнктность, то без ограничения общности всегда можно считать, что $\dim \Pi(M_i) = |M_i| - 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 1. В условии (=) из (SGP) вместо равенства можно поставить знак неравенства " $\leq$ ". Действительно, согласно неравенству предложения 2 неравенство " $\leq$ " эквивалентно равенству (=) из (SGP).

ЛЕММА 1. Для подмножества точек $M \subset \mathbb{R}^m$ следующие условия эквивалентны.

- (1) Множество M находится в общем положении.
- (2) Для любых двух дизъюнктивных непустых подмножеств $M_1, M_2 \subset M$ таких, что $|M_1| + |M_2| \leq m + 1$, имеет место равенство $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) = \emptyset$.
- (3) Для любых двух дизъюнктивных непустых подмножеств $M_1, M_2 \subset M$ таких, что $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) \neq \emptyset$, справедливо равенство $\dim \Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) = \dim \Pi(M_1) + \dim \Pi(M_2) - m$.
- (4) Для любых двух непустых подмножеств $M_1, M_2 \subseteq M$ справедливо по крайней мере одно из следующих равенств:
 - (a) $\Pi(M_1) + \Pi(M_2) = \mathbb{R}^m$;
 - (b) $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) = \Pi(M_1 \cap M_2)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Последовательно докажем справедливость следующих импликаций $(4) \Rightarrow (3) \Rightarrow (2) \Rightarrow (1) \Rightarrow (4)$.

$(4) \Rightarrow (3)$. Если $M_1, M_2 \subset M$ это непустые дизъюнктивные подмножества, то или имеет место равенство $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) = \Pi(M_1 \cap M_2) = \Pi(\emptyset) = \emptyset$, или $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) \neq \emptyset$, а тогда согласно предложению 1 и равенству (b) условия (4) справедливо равенство условия (3).

$(3) \Rightarrow (2)$. Возьмем такие непустые дизъюнктивные подмножества $M_1, M_2 \subseteq M$, что $|M_1| + |M_2| \leq m + 1$. Если $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) \neq \emptyset$, то согласно предложению 1 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} \dim \Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) &= \dim \Pi(M_1) + \dim \Pi(M_2) - m \\ &\leq (|M_1| - 1) + (|M_2| - 1) - m \\ &= |M_1| + |M_2| - 2 - m \leq m + 1 - 2 - m = -1, \end{aligned}$$

что противоречит центрированности рассматриваемых плоскостей.

$(2) \Rightarrow (1)$. Возьмем некоторое подмножество $M_0 \subseteq M$, состоящее из не более чем $(m + 1)$ точки. Если $\dim \Pi(M_0) \leq |M_0| - 2$, то существует такая точка $A \in M_0$, что $A \in \Pi(M_0 \setminus \{A\})$. Тогда, положив $M_1 = M_0 \setminus \{A\}$ и $M_2 = \{A\}$, мы получаем, что $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) = A \neq \emptyset$.

$(1) \Rightarrow (4)$. Пусть $M_1, M_2 \subseteq M$ и $\Pi(M_1) + \Pi(M_2) \neq \mathbb{R}^m$. Тогда согласно равенству $\Pi(M_1) \cup \Pi(M_2) = \Pi(M_1) + \Pi(M_2)$ получается, что из условия общего положения вытекает неравенство $\dim \Pi(M_1 \cup M_2) = |M_1 \cup M_2| - 1 \leq m - 1$. Теперь или плоскости $\Pi(M_1)$ и $\Pi(M_2)$ дизъюнктивны, и тогда имеет место равенство (a) условия (4), или $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) \neq \emptyset$ и тогда согласно предложению 1 справедливо равенство

$$\begin{aligned} \dim \Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) &= \dim \Pi(M_1) + \dim \Pi(M_2) - \dim \Pi(M_1 \cup M_2) \\ &= |M_1| - 1 + |M_2| - 1 - (|M_1 \cup M_2| - 1) \\ &= \dim \Pi(M_1 \cap M_2) - 1 = \dim \Pi(M_1 \cap M_2). \end{aligned}$$

Доказанное равенство совместно с очевидным включением $\Pi(M_1) \cap \Pi(M_2) \supseteq \Pi(M_1 \cap M_2)$ завершает доказательство справедливости требуемого равенства (b) условия (4).

СЛЕДСТВИЕ 1. *Если подмножество точек $M \subset \mathbb{R}^m$ находится в сильно общем положении, то оно находится в общем положении.*

ЛЕММА 2. *Если подмножество точек $M \subset \mathbb{R}^m$ находится в общем положении и состоит не более чем из $[(m-1)/2] + m + 3$ точек, то оно находится в сильно общем положении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как множество M находится в общем положении, то согласно лемме 1 при $k = 2$ условие (SGP) выполнено.

Если $k \geq 3$ и пересечение соответствующих плоскостей пусто, то условие (SGP) выполнено. Рассмотрим теперь случай, когда пересечение всех плоскостей непусто. Тогда по условию (2) леммы 1 из центрированности плоскостей $\Pi(M_i)$ и $\Pi(M_j)$ вытекает неравенство $|M_i| + |M_j| \geq m + 2$. Сложение 3 соответствующих неравенств дает неравенство $2|M| \geq 2(|M_1| + |M_2| + |M_3|) \geq 3m + 6$, что противоречит условию.

ЗАМЕЧАНИЕ 2. В пространстве $\mathbb{R}^m$ легко построить $[(m-1)/2] + m + 4$ -точечное подмножество, которое находится в общем положении, но не находится в сильно общем положении.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3. *Если $\Pi_1 \cap \Pi_2 = \emptyset$ и $B \notin \Pi_1 + \Pi_2$, то плоскости Π_1 и $\Pi_2 + B$ также не пересекаются.*

ЛЕММА 3. *Для всякого конечного или счетного подмножества точек $M \subset \mathbb{R}^m$, находящегося в сильно общем положении, для всякой точки $A \in \mathbb{R}^m$ и всякого положительного числа $\varepsilon > 0$ существует такая точка $B \in \mathbb{R}^m$, что $\rho(A, B) < \varepsilon$ и множество $M' = M \cup B$ находится в сильно общем положении.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для любого конечного набора попарно дизъюнктивных подмножеств $M_1, \dots, M_{k-1}, M_k \subseteq M$ такого, что пересечение плоскостей $\Pi(M_1), \dots, \Pi(M_{k-1})$ непусто и плоскость $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \Pi(M_k)$ не совпадает со всем пространством $\mathbb{R}^m$, положим

$$(+) \quad \Pi(M_1, \dots, M_{k-1}, M_k) = \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \Pi(M_k).$$

При этом мы не исключаем наборы с пустым множеством M_k и в этом случае полагаем $\Pi(M_1, \dots, M_{k-1}, \emptyset) = \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1})$.

Тогда счетное множество точек $M \subset \mathbb{R}^m$ определяет счетное число плоскостей вида $\Pi(M_1, \dots, M_k)$, каждая из которых имеет размерность $\leq m - 1$. По счетной теореме суммы для замкнутых множеств [9] объединение всех отмеченных плоскостей (+) имеет размерность $\leq m - 1$. Следовательно, указанное объединение не содержит никакого открытого в $\mathbb{R}^m$ подмножества [23]. В ε -окрестности точки A выберем точку B , лежащую в дополнении к указанному объединению плоскостей.

Покажем, что если множество точек M находилось в сильно общем положении, то и множество $M' = M \cup B$ находится в сильно общем положении.

Пусть $M_1, \dots, M_k$ – попарно дизъюнктивные подмножества множества M' . Если $M_1 \cup \dots \cup M_k \subseteq M$, то указанные множества удовлетворяют условию (SGP), так как

множество точек M находится в сильно общем положении. Если $B \in M_1 \cup \dots \cup M_k$, то без ограничения общности можно считать, что $B \in M_k$.

Если $M_k = \{B\}$, то $B \notin \Pi(M_1)$, поэтому выполнено условие $(\emptyset)$ из (SGP). Если же $M_k = \widetilde{M}_k \cup \{B\}$, то справедливо по крайней мере одно из следующих условий:

- (1) $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \Pi(\widetilde{M}_k) \neq \mathbb{R}^m$;
- (2) $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \Pi(M_k) = \mathbb{R}^m$.

Если $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) = \emptyset$, то пересечение большего числа плоскостей тем более пусто, и, тем самым, выполнено условие $(\emptyset)$ из (SGP). Поэтому всюду в последующем мы будем считать, что $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) \neq \emptyset$.

Покажем, что при выполнении условия (1) плоскости $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1})$ и $\Pi(M_k)$ имеют пустое пересечение, а значит, удовлетворяют условию $(=)$ из (SGP). Если пустое пересечение имеют плоскости $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1})$ и $\Pi(\widetilde{M}_k)$, то искомые плоскости дизъюнкты согласно предложению 3. Если же плоскости $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1})$ и $\Pi(\widetilde{M}_k)$ имеют непустое пересечение, то согласно предложению 1 имеет место неравенство

$$\begin{aligned} & \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) \cap \Pi(\widetilde{M}_k) \\ &= \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \dim \Pi(\widetilde{M}_k) \\ & \quad - \dim(\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \Pi(\widetilde{M}_k)) \\ & \geq \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \dim \Pi(\widetilde{M}_k) - (m-1). \end{aligned}$$

Согласно же равенству $(=)$ из (SGP) имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) \cap \Pi(\widetilde{M}_k) \\ &= \dim \Pi(M_1) + \dots + \dim \Pi(\widetilde{M}_k) - m(k-1) \\ &= \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \dim \Pi(\widetilde{M}_k) - m. \end{aligned}$$

Полученное противоречие завершает доказательство искомой дизъюнктности.

Покажем, что из условия (2) вытекает справедливость условия (SGP).

Если $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) \cap \Pi(M_k) = \emptyset$, то выполнено условие $(\emptyset)$ из (SGP).

Если же $\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) \cap \Pi(M_k) \neq \emptyset$, то согласно предложению 1 имеет место равенство

$$\begin{aligned} & \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) \cap \Pi(M_k) \\ &= \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \dim \Pi(M_k) \\ & \quad - \dim(\Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \Pi(M_k)) \\ &= \dim \Pi(M_1) \cap \dots \cap \Pi(M_{k-1}) + \dim \Pi(M_k) - m \\ &= \dim \Pi(M_1) + \dots + \dim \Pi(M_{k-1}) - m(k-2) + \dim \Pi(M_k) - m. \end{aligned}$$

Полученное равенство завершает доказательство.

ТЕОРЕМА 1. *Для любого счетного семейства непрерывных отображений $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots$, вполне регулярных пространств X_i и любого счетного семейства $\{\omega_i\}_{i=1}^\infty$ открытых покрытий пространства $\mathbb{R}^m$ существует такое семейство непрерывных отображений $g_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2, \dots$, что отображения f_i и g_i являются ω_i -близкими и для любого конечного подмножества K натуральных чисел справедливо неравенство*

$$\dim \bigcap_{i \in K} g_i(X_i) \leq \sum_{i \in K} \dim X_i - m(|K| - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Без ограничения общности будем считать, что $\dim X_i \leq m$ для всех индексов i . Для всякого покрытия ω_i построим звездно вписанное покрытие λ_i , т.е. в покрытие ω_i вписаны звезды всех элементов покрытия λ_i .

Шаг первый. Пусть все пространства X_i являются счетными полиэдрами в слабой топологии. Без ограничения общности можно считать, что все элементы всех покрытий ω_i выпуклы. Для каждого индекса i возьмем такое барицентрическое подразделение $\tilde{X}_i$ полиэдра X_i , что образ всякого симплекса лежит в некотором элементе покрытия λ_i . По лемме 3 можно взять такую λ_i -аппроксимацию образов вершин полиэдров $\tilde{X}_i$, $i = 1, 2, \dots$, что объединение аппроксимаций образов всех вершин всех полиэдров находится в сильно общем положении. Далее продолжим λ_i -аппроксимацию образов вершин полиэдра, т.е. отображение $g_i^0: \tilde{X}_i^0 \rightarrow \mathbb{R}^m$ по линейности на весь полиэдр $\tilde{X}_i$. Построенное отображение g_i и первоначальное отображение f_i являются ω_i -близкими.

Возьмем теперь конечный набор симплексов $\sigma_i^{n_i}$ — по одному в разных полиэдрах $\tilde{X}_i$. Так как множество $M = \bigcup_i g_i^0(\sigma_i^{n_i,0})$ находится в сильно общем положении, то $\bigcap \Pi(g_i^0(\sigma_i^{n_i,0})) = \emptyset$, или $\dim \bigcap \Pi(g_i^0(\sigma_i^{n_i,0})) = \sum_{i \in K} n_i - m(|K| - 1)$. Но так как $g_i(\sigma_i^{n_i}) \subset \Pi(g_i^0(\sigma_i^{n_i,0}))$, то

$$\dim \bigcap g_i(\sigma_i^{n_i}) \leq \sum_{i \in K} n_i - m(|K| - 1) \leq \sum_{i \in K} \dim X_i - m(|K| - 1).$$

Так как симплексы можно брать произвольным образом, то теорема о размерности счетного объединения замкнутых множеств доказывает искомое неравенство.

Шаг второй. Без ограничения общности можно считать, что покрытие λ_i является счетным локально конечным покрытием. Тогда $f_i^{-1}\lambda_i$ является счетным локально конечным функционально открытым покрытием пространства X_i . Следовательно, в покрытие $f_i^{-1}\lambda_i$ можно вписать счетное локально конечное функционально открытое покрытие μ_i кратности $\leq \dim X_i + 1$. Существует [9, гл. 4, § 2] такое отображение $q_i: N_{\mu_i} \rightarrow \mathbb{R}^m$, что отображения f_i и $q_i \circ p_i$ являются λ_i -близкими, где N_{μ_i} — это нерв покрытия μ_i , а $p_i: X_i \rightarrow N_{\mu_i}$ — каноническое отображение. Далее отображения q_i заменим на λ_i -аппроксимации g_i , которые построены на первом шаге.

Отметим, что на втором шаге можно предполагать пространство X_i метризуемым и сепарабельным, а общий случай сводится к этому с помощью факторизационной теоремы Пасынкова [40], [9, гл. 6, § 4].

§ 2. Регулярно ветвящиеся отображения

Для усиления теоремы Гуревича нам понадобится следующий глубокий результат из теории “разделения” отображений [26].

ТЕОРЕМА ДРАНИШНИКОВА. Пусть X и Y это компактные метрические пространства и $\dim X \leq m - 3$, $\dim Y \leq m - 3$. Тогда для любых непрерывных отображений $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие ε -аппроксимации $f': X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g': Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображений f и g , что

$$\dim f'(X) \cap g'(Y) \leq \dim X \times Y - m.$$

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть X и Y это компактные метрические пространства, $\Pi \subseteq \mathbb{R}^m$ это плоскость и $\dim X \leq m - 3$, $\dim Y \leq m - 3$, $\dim X \times Y + \dim \Pi \leq 2m - 1$. Тогда для любых непрерывных отображений $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ и любого $\varepsilon > 0$ существуют такие ε -аппроксимации $f'': X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g'': Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ отображений f и g , что $f''(X) \cap g''(Y) \cap \Pi = \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Теорема Дранишникова нам потребуется в несколько более сильной формулировке. Именно, существуют такие $\varepsilon/2$ -аппроксимации, что пересечение $f'(X) \cap g'(Y)$ является сильным $Z_{2m - \dim X \times Y - 2}$ -множеством [41]. Действительно, согласно доказательству Дранишникова компакт $f'(X)$ является ручным, т.е. является Z_1 -множеством. Если $m \leq 5$, то $\dim X + \dim Y \leq 2m - 6 \leq m - 1$, поэтому согласно теореме 1 можно считать, что компакты $f'(X)$ и $g'(Y)$ дизъюнкты. Пусть $m \geq 6$. Согласно замечанию из работы Дранишникова [26] компакт $f'(X) \cap g'(Y)$ также является Z_1 -множеством. При этом $\dim f'(X) \cap g'(Y) \leq \dim X \times Y - m$, поэтому согласно теореме Саммерхилла [41, предложение 2.1, условие (iv)] компакт $f'(X) \cap g'(Y)$ является сильным $Z_{m - (\dim X \times Y - m) - 2}$ -множеством. Тогда [41, теорема 1.1 и предложение 2.1, условие (i)] существует такой гомеоморфизм $h: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $\varrho(\text{Id}, h) < \varepsilon/2$ и $\dim h(f'(X) \cap g'(Y)) \cap \Pi \leq \dim X \times Y - m + \dim \Pi - m \leq -1$.

Отображения $f'' = h \circ f'$ и $g'' = h \circ g'$ являются искомыми ε -аппроксимациями.

Доказательство следующей теоремы повторяет доказательство теоремы Гуревича, предложенное в [25], с заменой ссылки на теорему 1 ссылкой на следствие 2.

ТЕОРЕМА 2. Пусть X это компактное метрическое пространство и $\dim X \leq m - 3$. Тогда множество $\mathcal{N}_{\dim X^2 - m, 2}(X, \mathbb{R}^m)$ содержит всюду плотное G_δ -подмножество.

ЗАМЕЧАНИЕ 3. Результаты Е. В. Шешина [30] о кратных пересечениях позволяют и в общем случае усилить неравенство (H_k) .

§ 3. Обращение теоремы Гуревича для полиэдров

Через B^n мы будем обозначать шар единичного радиуса в n -мерном евклидовом пространстве. В обращении теоремы Гуревича для полиэдров ключевую роль играет следующее обращение теоремы о “разделении” отображений.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4. Пусть $f_1: B^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $f_2: B^{n_2} \rightarrow \mathbb{R}^m$ это такие невырожденные аффинные отображения, переводящие нулевую точку в нулевую, что

$$\Pi(f(B^{n_1})) + \Pi(f(B^{n_2})) = \mathbb{R}^m.$$

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что как только $\varrho(f_i, g_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$, так справедливо неравенство

$$\dim g_1(B^{n_1}) \cap g_2(B^{n_2}) \geq n_1 + n_2 - m.$$

ЛЕММА 4. Пусть $f_1: B^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^m, \dots, f_{k+1}: B^{n_{k+1}} \rightarrow \mathbb{R}^m$ это такие невырожденные аффинные отображения, переводящие нулевую точку в нулевую, что справедливо неравенство

$$\dim \Pi(f_1(B^{n_1})) \cap \dots \cap \Pi(f_{k+1}(B^{n_{k+1}})) \leq n_1 + \dots + n_{k+1} - mk.$$

Тогда существует такое $\varepsilon > 0$, что как только $\varrho(f_i, g_i) < \varepsilon$, $i = 1, \dots, k+1$, так для любого подмножества $K \subseteq \{1, \dots, k+1\}$ справедливо неравенство

$$\dim \bigcap_{i \in K} g_i(B^{n_i}) \geq \sum_{i \in K} n_i - m(|K| - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Доказательство разобьем на два шага.

Шаг первый. Пусть подмножество K является множеством всех индексов. Так как плоскости, о которых говорится в лемме, пересекаются, то согласно предложению 3 можно считать, что в условии леммы вместо неравенства дано равенство. Данные отображения формулой

$$F(\bar{x}) = (f_1 \times \dots \times f_{k+1})(x_1, \dots, x_{k+1}) = (f_1(x_1), \dots, f_{k+1}(x_{k+1}))$$

задают невырожденное аффинное отображение $F: B^{n_1+\dots+n_{k+1}} \subset B^{n_1} \times \dots \times B^{n_{k+1}} \rightarrow \mathbb{R}^{m(k+1)}$. Рассмотрим также “диагональный” m -мерный куб

$$\Delta(B^m) = \{(y_1, \dots, y_{k+1}) \in (\mathbb{R}^m)^{k+1} : y_1 = \dots = y_{k+1} \in B^m \subset \mathbb{R}^m\}.$$

Плоскости $\Pi_1 = \Pi(F(B^{n_1+\dots+n_{k+1}}))$ и $\Pi_2 = \Delta$ имеют размерности $n_1 + \dots + n_{k+1}$ и m соответственно. Из условия леммы несложно увидеть, что пересечение рассматриваемых плоскостей имеет размерность $n_1 + \dots + n_{k+1} - mk$. Тогда согласно предложению 2 их сумма имеет размерность $m(k+1)$, т.е. их сумма совпадает со всем пространством $(\mathbb{R}^m)^{k+1}$. К кубам, порождающим плоскости Π_1 и Π_2 , применимо предложение 4. Поэтому существует такое $\varepsilon > 0$, что никакое ε -шевеление отображения F не уменьшает размерность пересечения образа с диагональю Δ . Так как ε -шевеление отображений f_i порождает $\sqrt{k+1}\varepsilon$ -шевеление отображения F , то достаточно малое шевеление отображений f_i не уменьшает размерность пересечения образа $G(B^{n_1+\dots+n_{k+1}})$ куба $B^{n_1+\dots+n_{k+1}}$ с диагональю Δ . Указанное же пересечение гомеоморфно пересечению образов $g_i(B^{n_i})$ соответствующих кубов B^{n_i} .

Второй шаг. Покажем, что для любого подмножества $K \subseteq \{1, \dots, k+1\}$ выполнены условия леммы. Доказательство проведем индукцией по числу $r = k+1 - |K|$. При $r = 0$ мы имеем в точности условие леммы, поэтому база индукции имеет место.

Проведем теперь индуктивный переход. Возьмем какой-нибудь индекс j из дополнения к множеству K . Множество $\tilde{K} = K \cup \{j\}$ имеет большую мощность, поэтому справедливо неравенство

$$\dim \bigcap_{i \in \tilde{K}} \Pi(f_i(B^{n_i})) \leq \sum_{i \in K} n_i + n_j - m|K|.$$

С другой стороны, согласно предложению 2 справедливо неравенство

$$\begin{aligned} & \dim \bigcap_{i \in K} \Pi(f_i(B^{n_i})) \\ &= \dim \bigcap_{i \in \tilde{K}} \Pi(f_i(B^{n_i})) + \dim \left(\bigcap_{i \in K} \Pi(f_i(B^{n_i})) + \Pi(f_j(B^{n_j})) \right) - \dim \Pi(f_j(B^{n_j})) \\ &\leq \sum_{i \in K} n_i + n_j - m|K| + m - n_j = \sum_{i \in K} n_i - m(|K| - 1). \end{aligned}$$

Итак, мы показали, что для любого семейства индексов справедливо условие леммы, тогда по уже сделанному первому шагу справедливо и заключение леммы. Отметим только, что в качестве “общего” числа ε нужно выбрать наименьшее из чисел по всем подмножествам индексов.

СЛЕДСТВИЕ 3. Если неотрицательные числа $n_1, \dots, n_{k+1}$, не превосходящие m , удовлетворяют неравенству

$$n_1 + \dots + n_{k+1} \geq mk,$$

то существуют такие аффинные вложения $f_1: B^{n_1} \rightarrow \mathbb{R}^m, \dots, f_{k+1}: B^{n_{k+1}} \rightarrow \mathbb{R}^m$, переводящие нулевую точку в нулевую, что для некоторого $\varepsilon > 0$ как только $\varrho(f_i, g_i) < \varepsilon$, $i = 1, \dots, k+1$, так для любого подмножества $K \subseteq \{1, \dots, k+1\}$ справедливо неравенство

$$\dim \bigcap_{i \in K} g_i(B^{n_i}) \geq \sum_{i \in K} n_i - m(|K| - 1).$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в пространстве $(\mathbb{R}^m)^{k+1}$ базис

$$e_1, \dots, e_m, e_1, \dots, e_m, \dots, e_1, \dots, e_m,$$

т.е. $k+1$ раз повторенный базис пространства $\mathbb{R}^m$. Полученные $m(k+1)$ векторы последовательно занумеруем. Теперь в качестве искомым вложений возьмем “тождественные” вложения куба B^{n_1} – в подпространство, натянутое на первые n_1 векторов, куба B^{n_2} в подпространство, натянутое на следующие n_2 векторов, и т. д.

Так как $0 \leq n_i \leq m$, то справедливы неравенства

$$m \geq n_1 \geq n_1 + n_2 - m \geq \dots \geq n_1 + \dots + n_{k+1} - mk \geq 0.$$

Отсюда вытекает, что общей частью образов всех шаров является в точности шар, лежащий в евклидовом пространстве, натянутом на первые $n_1 + \dots + n_{k+1} - mk$ векторов. Следовательно, для взятых вложений шаров выполнены условия леммы 4, что и доказывает справедливость утверждения следствия.

СЛЕДСТВИЕ 4. Если числа n , m и k удовлетворяют неравенству $n \geq (m-n)k$, то существуют такие непрерывное отображение $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ и положительное число $\varepsilon > 0$, что как только $g: B^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ это такое непрерывное отображение, что $\varrho(f, g) < \varepsilon$, так $\dim B_{k+1}(g) \geq n - (m-n)k$, в частности, существует точка $y \in \mathbb{R}^m$, полный прообраз которой состоит не менее чем из $k+1$ различной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в шаре B^n $k+1$ попарно дизъюнктивных шаров радиуса $\delta: B_1^n, \dots, B_{k+1}^n$. Из неравенства $n \geq (m-n)k$ легко вывести, что размерности шаров удовлетворяют условию следствия 3. Следовательно, существуют такие вложения $f_1: B_1^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \dots, f_{k+1}: B_{k+1}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что для достаточно близких отображений $g_1: B_1^n \rightarrow \mathbb{R}^m, \dots, g_{k+1}: B_{k+1}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ имеет место неравенство

$$\dim \bigcap_{i=1}^{k+1} g_i(B_i^n) \geq n(k+1) - mk = n - (m-n)k \geq 0.$$

Последнее неравенство означает, в частности, что если отображения g_i достаточно близки к отображениям f_i при $i = 1, \dots, k+1$, то множество $\bigcap_{i=1}^{k+1} g_i(B_i^n)$ не пусто.

Объединение шаров B_i^n замкнуто в шаре B^n , поэтому из экстензорных свойств пространства $\mathbb{R}^m$ следует, что построенные отображения можно продолжить непрерывно на весь шар B^n до такого отображения $f: B^n \rightarrow \mathbb{R}^m$, что $f|_{B_i^n} = f_i$. Отображение f является искомым.

СЛЕДСТВИЕ 5. Для компактного полиэдра P с $\dim P \leq m$ и целых чисел $r \geq -1$ и $k \geq 0$ следующие условия эквивалентны.

- (1) Имеет место неравенство $\dim P - r \leq (m - \dim P)k$.
- (2) Множество $\mathcal{N}_{r, k+1}(P, \mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(P, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) содержится в теореме Гуревича.

Так как всякий полиэдр P содержит замкнутый диск $B^{\dim P}$ и всякое отображение с диска может быть продолжено на весь полиэдр P , то импликация (2) $\Rightarrow$ (1) вытекает из следствия 4.

СЛЕДСТВИЕ 6. Для компактного полиэдра P следующие условия эквивалентны.

- (1) Имеет место неравенство $\dim P + 1 \leq (m - \dim P)k$.
- (2) Множество всех не более чем k -кратных отображений полиэдра P в m -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^m$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(P, \mathbb{R}^m)$.

Пусть Δ_n^N это n -мерный остов N -мерного симплекса.

ТЕОРЕМА 3. При $N = (m+1)(q-1)$ для всякого линейного отображения $f: \Delta_m^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, у которого образы вершин находятся в сильно общем положении, существует такое $\varepsilon > 0$, что для всякого непрерывного отображения $g: \Delta_m^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ такого, что $\varrho(f, g) < \varepsilon$, существуют такие попарно дизъюнктивные замкнутые симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_m^N$, что $g(\sigma_1) \cap \dots \cap g(\sigma_q) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Продолжим отображение f по линейности на весь симплекс $F: \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^m$. Согласно теореме Тверберг [32] *существуют такие попарно дизъюнктные замкнутые симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta^N$, что $F(\sigma_1) \cap \dots \cap F(\sigma_q) \neq \emptyset$.*

Прежде всего, покажем, что в условиях теоремы все симплексы $\sigma_i, i = 1, \dots, q$, не более чем m -мерны. Если $\dim \sigma_q \geq m + 1$, то в симплексе σ_q не менее $m + 2$ вершин. Из попарной дизъюнктности симплексов вытекает, что в оставшихся симплексах не больше $N + 1 - (m + 2) = (m + 1)(q - 2)$ вершин. Следовательно,

$$\dim \sigma_1 + \dots + \dim \sigma_{q-1} \leq (m + 1)(q - 2) - (q - 1) = m(q - 2) - 1.$$

Так как $F(\sigma_1) \cap \dots \cap F(\sigma_q) \neq \emptyset$, то $\Pi(F(\sigma_1)) \cap \dots \cap \Pi(F(\sigma_q)) \neq \emptyset$, поэтому из условия сильно общего положения вытекает неравенство

$$\dim \Pi(F(\sigma_1)) \cap \dots \cap \Pi(F(\sigma_q)) \leq m(q - 2) - 1 + m - m(q - 1) = -1.$$

Полученное неравенство противоречит центрированности рассматриваемых плоскостей. Итак, мы доказали, что $\dim \sigma_i \leq m$ при $i = 1, \dots, q$.

Кроме того, вышеприведенное рассуждение показывает, что симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ должны содержать все вершины симплекса Δ^N , т.е. $\dim \sigma_1 + \dots + \dim \sigma_q = m(q - 1)$. Отсюда, в частности, вытекает, что, если хоть один из симплексов $\sigma_i, i = 1, \dots, q$, заменить на собственную грань, то образы получившегося набора симплексов не имеют общей точки. Это означает, что во внутренности каждого симплекса $\sigma_i, i = 1, \dots, q$, имеется такая точка x_i , что $f(x_1) = \dots = f(x_q)$. В каждом из симплексов σ_i возьмем $\dim \sigma_i$ -мерный шар B_i с центром в точке x_i (и некоторым положительным радиусом при $\dim \sigma_i \geq 1$). Шары B_i и их аффинные вложения $f_i = f|_{B_i}$ удовлетворяют условию леммы 4, которая и гарантирует существование искомого числа $\varepsilon > 0$.

Доказанная теорема позволяет дать следующий вариант теоремы Тверберг, который, впрочем, легко получается из теоремы Тверберг и с помощью теоремы Каратеодори.

СЛЕДСТВИЕ 7. *При $N = (m + 1)(q - 1)$ для всякого линейного отображения $f: \Delta_m^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ существуют такие попарно дизъюнктные замкнутые симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_m^N$, что $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображения $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которых существует q штук попарно дизъюнктных замкнутых симплексов с центрированными образами, образуют замкнутое множество. Согласно же лемме 3 любое линейное отображение $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ лежит в замыкании линейных отображений, у которых образы вершин находятся в сильно общем положении.

ЗАМЕЧАНИЕ 4. Доказательство теоремы 3 показывает, что любые $(m + 1)(q - 1)$ точек в $\mathbb{R}^m$, находящихся в сильно общем положении, задают линейное отображение $f: \Delta^{(m+1)(q-1)-1} \rightarrow \mathbb{R}^m$, для которого утверждение теоремы Тверберг неверно. Х. Тверберг показывает невозможность уменьшения числа N с помощью более сильного понятия общего положения – все координаты всех точек алгебраически независимы. При $q = 2$ теорема Тверберг превращается в классическую теорему Радона [42].

ЗАМЕЧАНИЕ 5. При $q = 2$, q – простое и q – степень простого, как показали Бажмози и Барани [43], Барани, Шлосман и Сюч [44] и Воловиков [45] соответственно, теорема Тверберг справедлива для любого непрерывного отображения $g: \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, где $N = (m + 1)(q - 1)$. *Случай произвольного q остается открытым.* Так как в любой окрестности тривиального (линейного) отображения $f: \Delta_n^N \rightarrow \bar{0} \in \mathbb{R}^m$ содержится отображение, гомотетичное любому заранее заданному непрерывному отображению, то справедливость теоремы 3 для произвольных линейных отображений равносильна справедливости теоремы Тверберг для произвольных непрерывных отображений. Однако здесь необходимо отметить, что в топологических вариантах теоремы Тверберг, т.е. в случае непрерывного отображения $f: \Delta^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, на размерность симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta^N$ не удастся наложить никакого ограничения, кроме очевидной оценки для числа вершин семейства попарно дизъюнктивных симплексов: $\dim \sigma_1 + \dots + \dim \sigma_q \leq N + 1 - q$. В работах ван Кампена и Флореса, Саркариа и Воловикова (для $q = 2$, q – простое число и q – степень простого числа) получены глубокие результаты о существовании в Δ_n^N попарно дизъюнктивных симплексов с центрированными образами, но уже для $N = (m + 2)(q - 1)$ или $N = (n + 2)q - 2$ (при справедливости отрицания неравенства $(n, m, q - 1)$). Приложению подобных результатов к обращению теоремы Гуревича посвящен наш пятый параграф.

§ 4. Проблемы Гуревича и Нёбелинга

В работе [22] В. Гуревич выдвинул следующую гипотезу. “Кажется очень вероятным, что компакт X имеет размерность $\leq n$ тогда и только тогда, когда множество $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ всех вложений X в $\mathbb{R}^{2n+1}$ (т.е. множество $\mathcal{N}_{-1,2}(X, \mathbb{R}^{2n+1})$) всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{2n+1})$.”

ТЕОРЕМА ДРАНИШНИКОВА–ВЕСТА. *Если для компактов X и Y имеет место неравенство $\dim X \times Y \geq m$, то существуют такие непрерывные отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ и положительное число $\varepsilon > 0$, что для любых ε -аппроксимаций f_ε и g_ε $f_\varepsilon(X) \cap g_\varepsilon(Y) \neq \emptyset$.*

Следующее утверждение хорошо известно, но так как во всех опубликованных формулировках имеется дополнительное условие $m = 2 \dim X$, то мы приводим его доказательство.

СЛЕДСТВИЕ ДРАНИШНИКОВА–ВЕСТА. *Если для компакта X множество $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^m)$ всех вложений X в $\mathbb{R}^m$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$, то имеет место неравенство $\dim X^2 \leq m - 1$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\dim X^2 \geq m$. Тогда в пространстве X существуют такие дизъюнктивные подкомпакты X_1 и X_2 , что $\dim X_1 \times X_2 \geq m$ [25, с. 251]. Возьмем отображения $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, о которых говорится в теореме Дранишникова–Веста. Тогда для любых достаточно близких отображений образы компактов X_1 и X_2 пересекаются. Продолжим отображение $f_1 \cup f_2$ с компакта $X_1 \cup X_2$ на все пространство X . Построенное отображение не есть равномерный предел вложений.

Доказательство гипотезы Гуревича легко вытекает из сформулированного следствия и формулы для вычисления размерности степеней компакта [28].

ТЕОРЕМА БОКШТЕЙНА–КУЗЬМИНОВА. Для любого компакта X размерности его степеней вычисляются по одному из следующих законов:

- (1) $\dim X^k = k \cdot \dim X$ для всех $k \geq 1$;
- (2) $\dim X^k = k \cdot (\dim X - 1) + 1$ для всех $k \geq 1$.

СЛЕДСТВИЕ 8. Для компакта X следующие условия эквивалентны.

- (1) Имеет место неравенство $\dim X \leq n$.
- (2) Множество $\mathcal{E}(X, \mathbb{R}^{2n+1})$ всех вложений X в $\mathbb{R}^{2n+1}$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{2n+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана Гуревичем.

(2) $\Rightarrow$ (1). Согласно следствию Дранишникова–Веста из условия (2) вытекает неравенство $\dim X^2 \leq 2n$. С другой стороны, по теореме Бокштейна–Кузьмина справедливо неравенство $2 \dim X - 1 \leq \dim X^2$. Два выписанных неравенства дают неравенство $\dim X \leq n + 1/2$, которое эквивалентно неравенству условия (1).

Гипотезу Нёбелинга [27] можно сформулировать следующим образом. “Вероятно, компактное пространство X имеет размерность $\leq n$ тогда и только тогда, когда для некоторого m такого, что $n + 1 \leq m \leq 2n + 1$, конечнократные отображения из $\mathcal{N}_{2n-m,2}(X, \mathbb{R}^m)$ образуют всюду плотное подмножество $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$ ”.

ТЕОРЕМА ДРАНИШНИКОВА–РЕПОВША–ШЕПИНА. Для любых компактов X и Y и всякого m существуют такие непрерывные отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$ и $g: Y \rightarrow \mathbb{R}^m$ и положительное число $\varepsilon > 0$, что для любых ε -аппроксимаций f_ε и g_ε справедливо неравенство

$$\dim f_\varepsilon(X) \cap g_\varepsilon(Y) \geq \dim X \times Y - m.$$

СЛЕДСТВИЕ 9. Для компакта X и целых чисел n и m таких, что $n + 1 \leq m \leq 2n + 1$, следующие условия эквивалентны.

- (1) Имеет место неравенство $\dim X \leq n$.
- (2) Множество $\mathcal{N}_{2n-m,2}(X, \mathbb{R}^m)$ всюду плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^m)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) доказана Гуревичем.

(2) $\Rightarrow$ (1). В пространстве X существуют такие два дизъюнктивных компакта X_1 и X_2 , что $\dim X_1 \times X_2 = \dim X^2$. По теореме Дранишникова–Реповша–Шепина существуют такие отображения $f_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^m$, $i = 1, 2$, и такое положительное число ε , что как только $\varrho(f_i, g_i) < \varepsilon$, $i = 1, 2$, где $g_i: X_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ это непрерывные отображения, так

$$\dim g_1(X_1) \cap g_2(X_2) \geq \dim X_1 \times X_2 - m = \dim X^2 - m.$$

Продолжим теперь непрерывное отображение $f_1 \cup f_2: X_1 \cup X_2 \rightarrow \mathbb{R}^m$ до непрерывного отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^m$. Всякая ε -аппроксимация $g \in \mathcal{N}_{2n-m,2}(X, \mathbb{R}^m)$ отображения f порождает ε -аппроксимации $g_i = g|_{X_i}$ отображений f_i . При этом из включения $g_1(X_1) \cap g_2(X_2) \subseteq B_2(g)$ и условия теоремы вытекает неравенство

$$\dim X^2 - m \leq \dim g_1(X_1) \cap g_2(X_2) \leq \dim B_2(g) \leq 2n - m.$$

Полученное неравенство эквивалентно неравенству $\dim X^2 \leq 2n$. С другой стороны, неравенство Бокштейна–Кузьмина $2 \dim X - 1 \leq \dim X^2$ приводит к неравенству $2 \dim X \leq 2n + 1$, т.е. к неравенству $\dim X \leq n + 1/2$. Целочисленность размерности влечет искомое неравенство.

§ 5. Обращение теоремы существования для полиэдров

Для доказательства теоремы, обратной к теореме *существования* “экономичного” отображения, нам понадобятся некоторые факты из теории индекса свободного действия конечной группы G . По всей видимости, в настоящее время относительно полно построена теория индекса только для группы $G = (\mathbb{Z}_p)^\alpha$, где p это некоторое простое число, а $\alpha \geq 1$. Случай группы $G = \mathbb{Z}_p$ исследован в работах многих авторов и является уже почти классическим, случай же общей группы $G = (\mathbb{Z}_p)^\alpha$ исследован в основном в работах А. Ю. Воловикова [20]. Приведем некоторые, необходимые в дальнейшем, понятия и факты.

Пусть K это симплицальный комплекс. Определим комплекс $P^q(K) \subset K^q$ как объединение таких произведений $\sigma_1 \times \cdots \times \sigma_q$ симплексов из K , что симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset K$ являются попарно дизъюнктными.

Симметрическая группа Σ_q действует на полиэдре K^q и на его подполиэдре $P^q(K)$ перестановками координат. Если $q = p^\alpha$ для некоторого числа p , то на пространстве K^q и его подпространстве $P^q(K)$ действует и группа $(\mathbb{Z}_p)^\alpha$. В этом случае на пространстве $P^q(K)$ действие группы $(\mathbb{Z}_p)^\alpha$ свободное, поэтому определен индекс $\text{in}_{(\mathbb{Z}_p)^\alpha} P^q(K)$.

ТЕОРЕМА ВОЛОВИКОВА. *Для простого числа p и натурального $\alpha \geq 1$ при $N \leq (n + 2)q - 2$, где $q = p^\alpha$, справедливо неравенство*

$$\text{in}_{(\mathbb{Z}_p)^\alpha} P^q(\Delta_n^N) \geq N - 2(q - 1).$$

Эта теорема есть частный случай вычислений Воловикова: в работе [36] нужно положить $n = \alpha$, $s = n + 1$, $j = 2$ и $k = 0$.

Обозначим через $p[q]$ наименьшее простое число, большее $q - 1$.

ТЕОРЕМА 4. *Пусть числа n , m , q и N удовлетворяют неравенствам*

$$(m + 1)(p[q] - 1) + q - 1 \leq N \leq (n + 2)p[q] - 2.$$

Тогда для всякого непрерывного отображения $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ существуют такие попарно дизъюнктные замкнутые симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_q \subset \Delta_n^N$, что пересечение их образов непусто $f(\sigma_1) \cap \cdots \cap f(\sigma_q) \neq \emptyset$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отображение $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$ по формуле $\tilde{f} = f \circ \pi_1$, т.е. формуле $\tilde{f}(x_1, \dots, x_{p[q]}) = f(x_1)$, порождает отображение

$$\tilde{f}: P^{p[q]}(\Delta_n^N) \rightarrow \mathbb{R}^m.$$

Согласно теореме Воловикова имеет место неравенство

$$\text{in}_{\mathbb{Z}_{p[q]}} P^{p[q]}(\Delta_n^N) \geq N - 2(p[q] - 1) \geq (m + 1)(p[q] - 1) + q - 1.$$

Так как согласно теореме Чебышёва справедливо неравенство $p[q] \leq 2q - 1$, то к отображению $\tilde{f}$ применима теорема Коэна–Ласка о частичной склейке орбиты [37, теорема 4]. Следовательно, существует такая точка $x \in Pp[q](\Delta_n^N)$, что по крайней мере q точек ее орбиты отображаются в одну точку. Склеиваемые точки орбиты и задают q штук искомым попарно дизъюнктивных симплексов, образы которых имеют непустое пересечение.

Следствие 10. *Если при $N = (n+2)p[q] - 2$ (или $N = (m+1)(p[q] - 1) + q - 1$) существует не более чем $(q-1)$ -кратное отображение $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^m$, то справедливо неравенство*

$$n + 1 \leq (m - n)(q - 1) + (m - n - 1)(p[q] - q).$$

Доказательство. Предположим, что справедливо обратное неравенство

$$(m - n)(q - 1) + (m - n - 1)(p[q] - q) \leq n,$$

т.е. неравенство

$$(m + 1)(p[q] - 1) + q - 1 \leq (n + 2)p[q] - 2.$$

Тогда при любом из данных в условии следствия чисел N применима теорема 4. Согласно теореме 4 для любого отображения Δ_n^N в $\mathbb{R}^m$ существуют q штук попарно непесекающихся замкнутых симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q$ с непустым пересечением их образов. Тогда понятно, что прообраз любой точки из этого пересечения $f(\sigma_1) \cap \dots \cap f(\sigma_q)$ содержит точки в каждом из симплексов $\sigma_1, \dots, \sigma_q$, а значит, имеет мощность не менее q , что противоречит условию.

Замечание 6. При $p[q] = q$, т.е. в случае, когда число $q = k + 1$ является простым, мы получаем в точности теорему Саркариа [35] и, в частности, обращение теоремы существования “экономичного” отображения на классе всех n -мерных полиэдров. Обращение теоремы существования “экономичного” отображения получается из следствия 10 и при некоторых не простых значениях числа $k + 1$, но перед проведением соответствующего анализа приведем один общий случай.

Следствие 11. *При $N = (n+2)p[n+1] - 2$ для всякого непрерывного отображения $f: \Delta_n^N \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ существуют такие попарно дизъюнктивные замкнутые симплексы $\sigma_1, \dots, \sigma_{n+1} \subset \Delta_n^N$, что пересечение их образов непусто.*

Доказательство. Для чисел $n, m = n+1, q = n+1$ и числа $N = (n+2)p[n+1] - 2$ справедливы неравенства теоремы 4, поэтому существование искомым симплексов гарантируется указанной теоремой.

Неравенство из следствия 10 превращается в неравенство $(n, m, q - 1)$ (достаточное условие в следствии Гуревича о существовании “экономичного” отображения) при простом числе q (замечание 6) и при $m = n + 1$ (следствие 11). Однако за счет того, что все числа в неравенстве следствия 10 являются *целыми* числами, из этого *формально* более слабого неравенства неравенство $(n, m, q - 1)$ вытекает и в некоторых других случаях. Так как для разбора всех случаев, для которых справедливо обращение следствия Гуревича, мы не подготовили почву (нужно было сводить все

к теореме о частичной склейке орбиты группы $(\mathbb{Z}_p)^\alpha$, а не группы $\mathbb{Z}_p$, как в теореме Коэна–Ласка), то здесь мы опишем только самый первый случай (при этом все три числа n, m и q *одновременно* принимают *минимальное* значение) среди всех случаев, остающихся к настоящему времени открытыми.

Итак, пусть числа n, m и q удовлетворяют неравенству следствия 10 и не удовлетворяют неравенству $(n, m, q - 1)$, т.е. удовлетворяют системе неравенств

$$\begin{cases} n + 1 \leq (m - n)(q - 1) + (m - n - 1)(p[q] - q), \\ (m - n)(q - 1) \leq n. \end{cases}$$

Обозначим число $p[q] - q$ через δ и приведем в каждом неравенстве подобные члены

$$\begin{cases} n(q + \delta) + 1 + \delta \leq m(q - 1 + \delta), \\ m(q - 1) \leq nq. \end{cases}$$

Полученную систему можно переписать в следующем виде:

$$n(q + \delta)(q - 1) + (1 + \delta)(q - 1) \leq m(q - 1 + \delta)(q - 1) \leq nq(q - 1 + \delta).$$

Крайние члены полученной цепочки неравенств приводят к неравенству

$$(1 + \delta)(q - 1) \leq \delta n,$$

т.е., при $\delta \neq 0$, к неравенству

$$(1 + 1/\delta)(q - 1) \leq n.$$

При $\delta = 0$, т.е. при простом числе $q = 2, 3, 5, 7, 11, 13, \dots$, обращение следствия Гуревича справедливо согласно теореме Саркариа (замечание 6).

При $q = 4, 8, 9, \dots$ число $\delta \neq 0$, но обращение следствия Гуревича имеет место по теореме Воловикова [36], которая есть следствие сформулированной выше теоремы Воловикова и другой теоремы Воловикова [20] о полной склейке $(\mathbb{Z}_p)^\alpha$ -орбиты.

При $\delta = 1$, т.е. при $q = 6, 10, 12, \dots$, неравенство на n приобретает вид $2(q - 1) \leq n$. При $n = 2(q - 1) + \beta$, где $\beta \geq 0$ – целое число, на число m получается система неравенств $2q + \beta + \beta/q \leq m \leq 2q + \beta + \beta/(q - 1)$. В некоторых случаях полученное неравенство не имеет целых решений (относительно m), т.е. при некоторых числах n (β) и q обращение следствия Гуревича справедливо для всех m . Так как мы ищем “маломерный” открытый случай, то полагаем $n = 2q - 2$ и получаем $m = 2q$. Так как при $\delta = 1$ наименьшее значение $q = 6$ и соответственно $n = 10$ и $m = 12$, то найдена тройка, соответствующая наименьшему значению q , из всех троек $\{n, m, q\}$, для которых вопрос справедливости обращения следствия Гуревича открыт.

Покажем, что для больших значений q значения чисел n и m также больше. При $\delta \geq 2$, т.е. при $q = 14, \dots$, справедливо неравенство $14 \leq q \leq (1 + 1/\delta)(q - 1) \leq n$.

Резюмируем наш анализ в виде следующего вопроса: “*Всякий ли 10-мерный компакт (полиэдр) (например, Δ_{10}^{70}) можно не более чем 5-кратно отобразить в $\mathbb{R}^{12}$?*”

ЗАМЕЧАНИЕ 7. Теорема ван Кампена–Флореса о невложимости джойнов полиэдров Δ_n^{2n+2} позволяет оценивать снизу размерность евклидова пространства, в которое может быть k -регулярно [46] вложен полиэдр Δ_n^N .

Если пространство Δ_n^N , где $N = nk + n + k + \frac{k+1}{2}$, можно k -регулярно, где $k = 2l - 1$, вложить в $\mathbb{R}^m$, то $m \geq nk + n + k$.

Если пространство Δ_n^N , где $N = nk + k + \max\{\frac{k-2}{2}, 1\}$, можно k -регулярно, где $k = 2l$, вложить в $\mathbb{R}^m$, то $m \geq nk + k$.

Вместе с теоремой В. Г. Болтянского [47] о плотности при $m \geq k \dim X + \dim X + k$ множества всех k -регулярных вложений компакта X в $\mathbb{R}^m$ наша оценка снизу дает для нечетных чисел k решение задачи Борсука–Болтянского определения размерности евклидова пространства, в которое может быть k -регулярно вложен всякий компакт (полиэдр) размерности n .

§ 6. Когомологическая размерность

Будем говорить, что *алгебраический дефект размерной неполноценности* $A\text{-def } X$ конечномерного компакта X равен k , если для всякой абелевой группы G справедливо неравенство

$$\dim_G X \geq \dim X - k,$$

причем для некоторой группы имеет место равенство.

Будем говорить, что *геометрический дефект размерной неполноценности* $G\text{-def } X$ конечномерного компакта X равен k , если для всякого конечномерного компакта Y справедливо неравенство

$$\dim X \times Y \geq \dim X + \dim Y - k,$$

причем для некоторого компакта имеет место равенство.

Так как для компактного пространства X для любой абелевой группы G справедливо неравенство $\dim_G X \leq \dim X$, то имеет место неравенство $A\text{-def } X \geq 0$. С другой стороны, если для компакта X для некоторой абелевой группы G имеет место равенство $\dim_G X = 0$, то компакт X нульмерен, т.е. $\dim X = 0$. Это означает, что для всякого компакта X положительной размерности справедлива оценка сверху: $A\text{-def } X \leq \dim X - 1$. Согласно Дранишникову [48] для любого $n \geq 1$ существует n -мерный компакт Y_n , для которого $A\text{-def } Y_n = n - 1$.

Аналогично, из логарифмического неравенства $\dim X \times Y \leq \dim X + \dim Y$ вытекает неравенство $G\text{-def } X \geq 0$. С другой стороны, по теореме Гуревича [49] для всякого конечномерного компакта X с $\dim X \geq 1$ и всякого конечномерного компакта Y справедливо неравенство $\dim X \times Y \geq 1 + \dim Y$. Это означает, что для всякого компакта X положительной размерности справедлива оценка сверху: $G\text{-def } X \leq \dim X - 1$. На самом деле, одинаковость ограничений на дефекты есть следствие их равенства.

Ю. Кодама [50], В. И. Кузьминов [28] и окончательно А. Н. Дранишников [48] построили *пробные* пространства. Именно, в работе А. Н. Дранишникова, Д. Реповша и Е. В. Щепина [39] показано, что построенные Дранишниковым по группе G и числу n n -мерные компакты $Y_{n,G}$ обладают тем свойством, что

$$\dim_G X = \dim X \times Y_{n,G} - \dim Y_{n,G}$$

для всех компактов X с $\text{A-def } X \leq n - 1$.

Из существования пробных компактов и вычислений в алгебре Бокштейна [39] легко вытекает

ТЕОРЕМА 5. *Для всякого (конечномерного) компакта X справедливо равенство*

$$\text{A-def } X = \text{G-def } X.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Докажем сначала неравенство $\text{A-def } X \leq \text{G-def } X$. Для группы G и числа $n = \dim X$ (или даже $n = \text{A-def } X + 1$) возьмем пробный компакт $Y_{n,G}$. Тогда

$$\begin{aligned} \dim X - \dim_G X &= \dim X - (\dim X \times Y_{n,G} - \dim Y_{n,G}) \\ &= \dim X + \dim Y_{n,G} - \dim X \times Y_{n,G} \leq \text{G-def } X. \end{aligned}$$

Докажем теперь обратное неравенство $\text{A-def } X \geq \text{G-def } X$. Для доказательства нам потребуется неравенство из работы [39, лемма 2.1, неравенства произведения]: $\min_G \dim_G X + \dim Y \leq \dim X \times Y$. Тогда для произвольного конечномерного компакта Y имеет место цепочка неравенств

$$\begin{aligned} \text{A-def } X &= \dim X - \min_G \dim_G X \geq \dim X + \dim Y - \dim X \times Y, \text{ поэтому} \\ \text{A-def } X &\geq \max_Y \{ \dim X + \dim Y - \dim X \times Y \} = \text{G-def } X. \end{aligned}$$

Формула Бокштейна

$$\dim_G X = \max \{ \dim_H X : H \in \sigma(G) \subseteq \sigma - \text{базис Бокштейна (основные группы)} \},$$

сводящая вычисление кохомологической размерности пространства X по группе G к вычислению кохомологических размерностей пространства X по основным группам, показывает, что алгебраический дефект $\text{A-def } X$ реализуется на одной из основных групп. Неравенства Бокштейна показывают, что алгебраический дефект $\text{A-def } X$ реализуется на одной из групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ или $\mathbb{Q}$.

Если в предыдущем доказательстве вместо леммы 2.1 воспользоваться леммой 2.3 из той же работы [39], т.е., в частности, заменить произвольный компакт Y на “геометрически” эквивалентный компакт, являющийся компактификацией Александрова объединения соответствующих пробных пространств, то можно увидеть, что геометрический дефект $\text{G-def } X$ реализуется на одном из n -мерных пробных пространств для одной из основных групп σ и более того, для одной из групп $\mathbb{Z}_{p^\infty}$ или $\mathbb{Q}$.

ТЕОРЕМА 6. *Пусть $f: X \rightarrow Y$ это нульмерное отображение конечномерного компакта X на конечномерный компакт Y , причем для группы G справедливо неравенство $\dim_G Y \geq \dim_G X + q$. Тогда для любого $k = 1, \dots, q$ в множестве $B_{k+1}(f)$ имеется такой компакт Y_{k+1} , что*

$$\dim_G Y_{k+1} \geq \dim_G Y - k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для числа $n = \dim Y$ и группы G рассмотрим пробный компакт $Y_{n,G}$. Отображение $f \times \text{id}: X \times Y_{n,G} \rightarrow Y \times Y_{n,G}$ нульмерно и

$$\dim Y \times Y_{n,G} = \dim_G Y + \dim Y_{n,G} \geq \dim_G X + q + \dim Y_{n,G} = \dim X \times Y_{n,G} + q.$$

Следовательно, по теореме Фрейденделя–Вайнштейна [24, Ch. 4, § 3] для любого $k = 1, \dots, q$ в множестве $B_{k+1}(f \times \text{id})$ имеется такой компакт Z_{k+1} , что $\dim Z_{k+1} \geq \dim Y \times Y_{n,G} - k$. Так как $B_{k+1}(f \times \text{id}) = B_{k+1}(f) \times Y_{n,G}$ и проекция на первый сомножитель является совершенным отображением, то существует такой компакт $Y_{k+1} \subseteq B_{k+1}(f)$, что $Z_{k+1} \subseteq Y_{k+1} \times Y_{n,G}$. Из последнего включения мы и получаем искомое неравенство

$$\begin{aligned} \dim_G Y_{k+1} &= \dim Y_{k+1} \times Y_{n,G} - \dim Y_{n,G} \geq \dim Z_{k+1} - \dim Y_{n,G} \\ &\geq \dim Y \times Y_{n,G} - k - \dim Y_{n,G} = \dim_G Y - k. \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 8. Доказательство кохомологического варианта теоремы Фрейденделя–Вайнштейна мы провели редукцией к соответствующему топологическому утверждению (ведь наши приложения относятся к метрическим компактным пространствам). Однако повторение именно схемы доказательства теоремы Фрейденделя–Вайнштейна позволяет получить более общие результаты. В связи с совпадением алгебраического и геометрического дефекта компакта X умножение компактов X и Y в доказательстве теоремы 6 на произвольный компакт Z (не пробный) не приводит к более сильному *числовому* утверждению. Здесь укажем, что глубокий результат по теореме Гуревича для *размерности продолжения* получили недавно А. Н. Дранишников и В. В. Успенский [51].

Для доказательства того, что аналог теоремы 2 для $m = n + 1$ неверен (в [26] указано, что теорема Дранишникова, применяемая в доказательстве теоремы 2, при $m = n + 1$ неверна), нам нужна

ТЕОРЕМА АЛЕКСАНДРОВА. *Всякий компакт $X \subset \mathbb{R}^{n+1}$ размерности $\dim X \geq n$ является размерно полноценным.*

СЛЕДСТВИЕ 12. *Для всякого размерностно неполноценного n -мерного компакта X для любого нульмерного отображения $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и любого $k = 1, \dots, \text{A-def } X$ справедливо неравенство*

$$\dim B_{k+1}(f) \geq n - k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $f: X \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ это нульмерное отображение. Тогда по теореме Гуревича $\dim f(X) \geq \dim X - \dim f = n$. По теореме Александрова для любой группы G имеет место неравенство $\dim_G f(X) = \dim f(X) \geq n$. С другой стороны, существует такая группа G , что $\dim_G X = \dim X - \text{A-def } X = n - \text{A-def } X$. Для этой группы G справедливо неравенство

$$\dim_G f(X) \geq n = \dim_G X + \text{A-def } X.$$

Следовательно, искомое неравенство является прямым следствием неравенства Александрова $\dim B_{k+1}(f) \geq \dim_G B_{k+1}(f)$ и неравенства теоремы 6.

Следствие 12 показывает, что теорема Гуревича для $m = n + 1$ и $k = 2$ допускает и следующую форму обращения.

ТЕОРЕМА 7. *Для n -мерного компакта X и целого числа r следующие условия эквивалентны.*

- (1) *Имеет место неравенство $r \geq n - 1$.*
- (2) *Множество $\mathcal{N}_{r,2}(X, \mathbb{R}^{n+1})$ содержит плотное в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{n+1})$ множество типа G_δ .*
- (3) *Множество всех нульмерных отображений из $\mathcal{N}_{r,2}(X, \mathbb{R}^{n+1})$ плотно в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{n+1})$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Импликация (1) $\Rightarrow$ (2) является ослабленным вариантом теоремы Гуревича (для $k = 2$).

Импликация (2) $\Rightarrow$ (3) вытекает из того, что по теореме Гуревича множество $\mathcal{H}(X, \mathbb{R}^{n+1})$ всех регулярно ветвящихся отображений пространства X в пространство $\mathbb{R}^{n+1}$ содержит плотное в пространстве $\mathcal{C}(X, \mathbb{R}^{n+1})$ множество типа G_δ . Тогда по теореме Бэра множество $\mathcal{N}_{r,2}(X, \mathbb{R}^{n+1}) \cap \mathcal{H}(X, \mathbb{R}^{n+1})$ обладает сформулированным свойством.

Для доказательства импликации (3) $\Rightarrow$ (1) рассмотрим два случая.

Пусть $\dim X^2 = 2n$. Тогда в пространстве X существуют такие дизъюнктные подкомпакты X_1 и X_2 , что $\dim X_1 \times X_2 = 2n$. Возьмем отображения $f_1: X_1 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ и $f_2: X_2 \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$, о которых говорится в теореме Дранишников–Реповша–Щепина. Продолжим отображение $f_1 \cup f_2$ с компакта $X_1 \cup X_2$ на все пространство X . Для построенного отображения g из включения $B_2(g_\varepsilon) \supseteq g_\varepsilon(X_1) \cap g_\varepsilon(X_2)$ вытекает неравенство $r \geq \min_\varepsilon \dim(g_\varepsilon(X_1) \cap g_\varepsilon(X_2)) \geq n - 1$.

Пусть $\dim X^2 = 2n - 1$. Тогда компакт X размерностно неполноценен и по следствию 12 (при $k = 1 \leq \text{A-def } X$) для любого нульмерного отображения f имеет место неравенство $\dim B_2(f) \geq n - 1$.

§ 7. Исторические замечания к формуле Урысона

Так получилось, что честь создания теории размерности разделили два математика – Павел Самуилович Урысон и Карл Менгер. Уже сподвижники и продолжатели Урысона и Менгера пытались по горячим следам написать историю создания теории размерности. В этом плане уместно указать, что П. С. Александров, друг и часто соавтор П. С. Урысона, и Витольд Гуревич, являвшийся последователем К. Менгера, по просьбе Л. Брауэра написали обзоры для журнала *Mathematische Annalen* [52], [53], которые отражали вклад Урысона и Менгера в теорию размерности и состояние теории на тот момент.

Истории создания П. С. Урысоном теории размерности посвящены предисловия П. С. Александрова к монографии Гуревича–Волмэна [5] и собранию трудов Урысона [1].

Современное отношение к двум создателям теории размерности, видимо, лучше всего иллюстрируют следующие два ярких примера.

1. Р. Энгелькинг и Р. Поль в статье, посвященной В. Гуревичу, пишут:

“Определение размерности было дано независимо П. С. Урысоном в 1922 году и К. Менгером в 1923 году. В зародышевом состоянии оно появилось ранее в статьях А. Пуанкаре, Брауэра и Лебега. Менгер и Урысон построили теорию размерности компактных метрических пространств; Урысон был впереди Менгера в этой задаче, когда он умер в 1924 году в возрасте 26 лет.”

“Индуктивный подход к размерности, основанный на отделении точек от замкнутых множеств, взятый в этом определении, и подход, предлагаемый нижеприводимым свойством (5) (свойством покрытий куба), приводят к одному понятию размерности в классе сепарабельных метрических пространств (см. сноски 3 и 4); вне данного класса это уже неверно. Размерность, введенная Менгером и Урысоном, теперь обычно обозначается как ind и называется *малой индуктивно размерностью*.” [10, с. XXI, сноска ¹]

“Метод Гуревича давал основные свойства ind , установленные Менгером и Урысоном, существенно более простым путем и позволил расширить теорию размерности с компактных на сепарабельные метрические пространства (такое расширение было достигнуто независимо в то же время Л. Тумаркиным).” [10, с. XXII]

“³Открытие Лебега привело позже Э. Чеха к введению *размерности в смысле покрытий* ($\dim$ в наших обозначениях).” [10, с. XXIII]

“Процесс продолжения основных теорем теории размерности с компактных на сепарабельные метрические пространства, инициированный Гуревичем использованием нормальных семейств, был продолжен с помощью теоремы компактификации, позволяющей, в частности, расширить характеризацию размерности в терминах конечных замкнутых покрытий порядка $\leq n + 1$, краеугольный камень теории размерности⁴.”

⁴Прозаически эта характеристика означает, что в области сепарабельных метрических пространств малая индуктивная размерность и размерность в смысле покрытий совпадают.” [10, с. XXIII]

Обратим внимание на два момента.

а. Приведенные отрывки невольно заставляют читателя приписать основной вклад Урысона в теорию размерности (см. введение) другим замечательным математикам – введению размерности $\dim$ Э. Чеху, а тождество $\dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X$ В. Гуревичу.

б. При изложении фактов Урысон признается идущим впереди и упоминается первым. При общем же обсуждении истории создания теории размерности происходит “инверсия”.

Впрочем, в статье, посвященной В. Гуревичу, являвшемуся последователем дела Менгера, такая “инверсия” еще понятна. Приведем пример “расширения”, история возникновения которого автору совершенно непонятна и в которой, видимо, разобратся уже невозможно.

2. Перечисляя заслуги Урысона, и только Урысона, П. С. Александров пишет [5, с. 10], [1, т. 1, с. 33]:

“Среди теорем, *доказанных Урысоном и не доказанных Менгером*, отметим следующие:

2) В главе 6 Урысон доказывает свою формулу

$$(Y) \quad \text{ind}(A \cup B) \leq \text{ind } A + \text{ind } B + 1$$

и выводит из нее теорему о том, что n -мерное множество может быть представлено как сумма $n + 1$ нульмерного множества и не может быть представлено как сумма меньшего числа нульмерных множеств. При этом даются очень точные оценки класса слагаемых с точки зрения дескриптивной классификации. Этой теоремы, одной из основных в теории размерности, у Менгера тоже нет.”

К сожалению, местоимение “этой” в применении к трем теоремам (особенно в свете нижеследующего) оставляет место неясностям.

а. Автор данных строк в ранних работах К. Менгера не смог найти приведенную формулу.

б. В. Гуревич в статье, дающей конспект менгеровской теории размерности, пишет [53, с. 72 (135)]:

“Из теоремы суммы легко получается теорема Урысона о том, что всякое n -мерное σ -компактное пространство является суммой $n + 1$, но не меньше, нульмерного множества.”

В. Гуревич дает идейно очень ясное, но технически очень неполное доказательство сформулированной теоремы. Так, в доказательстве невозможности представления в виде меньшего числа слагаемых, т.е. фактически в доказательстве формулы (У), вообще не возникают ограничения на область ее справедливости.

Но в данном случае нас интересует только тот факт, что, излагая теорию Менгера, В. Гуревич называет соответствующий факт теоремой Урысона.

Впрочем, и в своей оригинальной работе по продолжению теории размерности с компактных на сепарабельные метрические пространства с помощью понятия нормального семейства, упоминавшейся выше при цитировании Р. Энгелькинг и Р. Поля, В. Гуревич пишет [54, с. 761 (82), сноска²⁷):

“Относительно компактных замкнутых множеств эта теорема была объявлена Урысоном без доказательства [55]. Доказательство Урысона, опубликованное в Fund. Math. [15], во время печатания этой работы автору не было известно.”

в. Отличающийся исключительной точностью, Ричард Энгелькинг в своей монографии по теории размерности связывает обсуждаемую формулу только с именем Урысона.

Казалось бы, что в таком конкретном случае вопроса с атрибутикой имен создателей теории размерности не должно быть. Но процитируем теперь монографию П. С. Александрова и Б. А. Пасынкова.

“3. ФОРМУЛА УРЫСОНА–МЕНГЕРА. Самым замечательным фактом, касающимся малой индуктивной размерности, является, бесспорно, формула Урысона–Менгера (У) для любых множеств A и B в произвольном наследственно нормальном пространстве X .” [9, с. 180]

“Одним из основных результатов в теории размерности наследственно нормальных пространств является формула Урысона–Менгера

$$\dim(A \cup B) \leq \dim A + \dim B + 1,$$

доказанная Смирновым [56] для любых множеств A, B наследственно нормального пространства X .” [9, с. 397]

“В случае произвольных нормальных пространств неравенство Урысона–Менгера установлено Зарелуа [57].” [9, с. 401, сноска*]

Отметим, что как Ю. М. Смирнов, так и А. В. Зарелуа пишут в своих работах о неравенстве Урысона, а не о неравенстве Урысона–Менгера. Смена терминологии произошла после опубликования монографии Александрова–Пасынкова.

Как сказал автору данных строк Б. А. Пасынков, весь материал, относящийся к наследственно нормальным пространствам, из которого взяты приведенные выше цита-

ты, написан лично П. С. Александровым. Понять причину, по которой П. С. Александров изменил свое мнение (а может, описался?) в вопросе, который, судя по всему, был ему далеко не безразличен, представляется сегодня почти невозможным. Во всяком случае, приведенные выше выдержки из работ Александрова, а также приводимый ниже комментарий Александрова к мемуару Урысона с несомненностью показывают, что сам Александров придавал указанным результатам большое значение и, как показывает последующее развитие теории размерности, в этом он был, несомненно, прав.

“Едва ли можно согласиться с автором (П. С. Урысоном – прим. автора), что, например, теорема о том, что всякое n -мерное множество может быть представлено как сумма $n + 1$ (но не меньшего числа) множеств размерности нуль, есть теорема ‘второстепенного значения’.” [1, с. 491]

В статье Б. П. Двалишвили [58], написанной после опубликования монографии Александрова–Пасынкова, в категории битопологических пространств получена уже “формула Урысона–Менгера”. Л. Г. Замбахидзе [59] ввел функции размерностного типа I и $г$, указывающие степень близости данной топологии к бикомпактной (периферически бикомпактной) топологии, и доказал для инвариантов I и $г$ уже “формулу Менгера–Урысона”.

Совершенно особое положение формула Урысона (но уже как “формула Урысона–Менгера” или даже “формула Менгера–Урысона”) приобрела в рамках теории размерности благодаря рождению новой дисциплины – “теории продолжения” в терминологии А. Н. Дранишникова [60] и “теории экстремности” в терминологии Е. В. Шепина [30]. Здесь очень важно подчеркнуть, что *экстремные результаты позволили получить новые неожиданные соотношения в рамках классической теории размерности*. Работа А. Н. Дранишникова [26] дает удивительный пример “цементирования” теорией экстремности результатов по существованию отображений общего положения, формуле $(\log)$ и формуле Урысона–Менгера ($У$).

Как А. Н. Дранишников, Д. Реповш и Е. В. Шепин [61], так и Ю. Дыдак [62] отмечают, что они решают проблему 10 из обзора В. И. Кузьмина [28]. Однако В. И. Кузьминов спрашивает о справедливости когомологической формулы Урысона. В работах же [26], [61]–[64] говорится о формуле (неравенстве, теореме) Урысона–Менгера и даже чаще – Менгера–Урысона.

В заключение подчеркнем, что именно воспитаники школы Александрова (школы Урысона–Александрова, по мнению самого Александрова – “Положение П. С. Урысона в истории математической науки определяется прежде всего тем, что он явился создателем советской топологии” [1, т. 1, с. 20]), читавшие (и, может быть, неоднократно) предисловие Александрова к монографии Гуревича–Волмэна, но еще более внимательно читавшие монографию Александрова–Пасынкова, ввели в устойчивый математический оборот вместо термина “неравенство Урысона” термин “неравенство Урысона–Менгера”.

Приведенная история является уникальным примером иронии судьбы, когда именно благодаря математику, подчеркивавшему общепринятое мнение, что другой математик не имеет никакого отношения к одному конкретному результату, этот результат и стал впоследствии ассоциироваться еще и с именем второго математика.

Автору приятно выразить свою благодарность А. Ю. Воловикову, А. Н. Дранишникову, Б. А. Пасынкову, В. В. Федорчуку и Е. В. Шепину за помощь. Особая благодарность Х. Пишангу за приглашение в мае–июле 1995 г. в Ruhr-Universität Bochum, где

началась эта работа, и Х. Штайнлайну из Ludwig-Maximilians-Universität München, в результате доклада на семинаре которого в июле 1995 года автор осознал универсальность метода общего положения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Урысон П. С. Труды по топологии и другим областям математики. Т. 1 и 2. М.: Гостехиздат, 1951.
- [2] Красносельский М. А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: Гостехиздат, 1956.
- [3] Sangwine-Yager J. R. Mixed volumes // Handbook of Convex Geometry / ed. P. M. Gruber, J. M. Wills. Amsterdam: Elsevier Sci. Publ., 1993. P. 43–71.
- [4] Тихомиров В. М. Некоторые вопросы теории приближений. М.: Изд-во МГУ, 1976.
- [5] Гуревич В., Волмэн Г. Теория размерности. М.: ИЛ, 1948.
- [6] Lebesgue H. Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à deux espaces, de n et $n + p$ dimensions // Math. Ann. 1911. V. 70. P. 166–168.
- [7] Lebesgue H. Sur les correspondances entre les points de deux espaces // Fund. Math. 1921. V. 2. P. 256–285.
- [8] Brouwer L. E. J. Über den natürlichen Dimensionsbegriff // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 142. P. 146–152.
- [9] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [10] Engelking R., Pol R. Hurewicz's contributions to dimension theory // Collect. Works of Witold Hurewicz / ed. K. Kuperberg. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1995. P. XXI–XXVIII.
- [11] Pontrjagin L. Sur une hypothèse fondamentale de la dimension // C. R. Acad. Sci. 1930. V. 190. P. 1105–1107.
- [12] Болтянский В. Г. О теореме сложения размерностей // УМН. 1951. Т. 6. №3. С. 99–129.
- [13] Бокштейн М. Ф. Гомологические инварианты топологических пространств. I. II. // Труды ММО. 1956. Т. 5. С. 3–80; 1957. Т. 6. С. 3–133.
- [14] Бабенко К. И. Основы численного анализа. М.: Наука, 1986.
- [15] Urysohn P. Mémoire sur les multiplicités cantorienes // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 30–137; 1926. V. 8. P. 225–359.
- [16] Alexandroff P. Über die Uryson'sche Konstanten // Fund. Math. 1933. V. 20. P. 140–150.
- [17] Богатый С. А. Теорема Люстерника–Шнирельмана и βf // Фундамент. и прикл. матем. 1998. Т. 4. №1. С. 11–38.
- [18] Макеев В. В. О некоторых свойствах непрерывных отображений сфер и задачах комбинаторной геометрии // Геометрические вопросы теории функций и множеств. Калинин: Калинин. гос. ун-т, 1986. С. 75–85.
- [19] Бабенко И. К., Богатый С. А. К отображению сферы в евклидово пространство // Матем. заметки. 1989. Т. 46. №3. С. 3–8.
- [20] Воловиков А. Ю. Теорема типа Буржана–Янга для $\mathbb{Z}_p^n$ -действия // Матем. сб. 1992. Т. 183. №7. С. 115–144.
- [21] Bogaty S. A. The Knaster problem, the Borsuk theorem and cyclic systems // Topol. and Appl. Intern. Topol. Conf. dedic. P. S. Alexandroff's 100th Birthday. Moscow, May 27–31, 1996. Moscow: PHASIS. P. 167–169.
- [22] Hurewicz W. Dimensionstheorie und Cartesische Räume // Koninklijke Akademie van Wetenschappen. Proceedings of the Section of Sciences 1931. V. 34. P. 399–400; перепечатано в Collect. Works of Witold Hurewicz. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1995. P. 253–255.
- [23] Hurewicz W. Über Abbildungen von endlichdimensionalen Räumen auf Teilmengen Cartesischer Räume // Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften 1933. V. 4. P. 754–768; перепечатано в Collect. Works of Witold Hurewicz. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1995. P. 295–309.
- [24] Engelking R. Dimension Theory. Amsterdam: North-Holland, 1978.

- [25] Dranišnikov A.N., Repovš D., Ščepin E.V. On intersections of compacta of complementary dimensions in Euclidean space // *Topol. Appl.* 1991. V. 38. P. 237–253.
- [26] Dranišnikov A.N. On the dimension of the product of two compacta and the dimension of their intersection in general position in Euclidean space // Preprint.
- [27] Nöbeling. Abstract on the article [21] // *Zentralblatt für Math. und ihre Grenzgeb.* 1931. V. 1. P. 409; перепечатано в *Collect. Works of Witold Hurewicz*. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1995. P. 255.
- [28] Кузьминов В. И. Гомологическая теория размерности // *УМН.* 1968. Т. 23. № 5. С. 3–49.
- [29] Dranišnikov A.N., West J. On compacta that intersect unstably in Euclidean space // *Topol. Appl.* 1992. V. 43. P. 181–187.
- [30] Шепин Е. В. Арифметика теории размерности // *УМН.* 1998. Т. 53. № 5.
- [31] Dranišnikov A.N., Repovš D., Ščepin E.V. Transversal intersection formula for compacta // Preprint.
- [32] Tverberg H. A generalization of Radon's theorem // *J. London Math. Soc.* 1966. V. 41. P. 123–128.
- [33] Van Kampen E.R. Komplexe in euklidischen Raumen // *Abh. Math. Sem. Hamburg.* 1932. V. 9. P. 72–78.
- [34] Flores A. Über n -dimensionale Komplexe die im R_{2n+1} absolut selbstverschlungen sind // *Ergeb. Math. Kolloq.* 1933/34. V. 6. P. 4–7.
- [35] Sarkaria K.S. A generalized van Kampen–Flores theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 111. № 2. P. 559–565.
- [36] Воловиков А. Ю. К теореме ван Кампена–Флореса // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 5. С. 663–670.
- [37] Cohen F., Lusk E.L. Configuration-like spaces and the Borsuk–Ulam theorem // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1976. V. 56. P. 313–317.
- [38] Болтянский В. Г. О размерной полнотности компактов // *Докл. АН СССР.* 1949. Т. 67. № 5. С. 775–777.
- [39] Dranišnikov A.N., Repovš D., Ščepin E.V. On approximation and embedding problems for cohomological dimension // *Topol. Appl.* 1994. V. 55. № 1. P. 67–86.
- [40] Пасынков Б. А. Об универсальных бикомпактных и метрических пространствах данной размерности // *Fund. Math.* 1967. V. 60. P. 285–308.
- [41] Summerhill R.R. General position for closed subsets of Euclidean space // *Gen. Topol. Appl.* 1973. V. 3. P. 339–345.
- [42] Radon J. Mengen konvexer Körper, die einen gemeinsamen Punkt enthalten // *Math. Ann.* 1921. V. 83. P. 113–115.
- [43] Bajmóczy E.G., Bárány I. On common generalization of Borsuk's and Radon's theorem // *Acta Math. Acad. Sci. Hungar.* 1979. V. 34. P. 347–350.
- [44] Bárány I., Shlossman S.B., Szűcs A. On topological generalization of a theorem of Tverberg // *J. London Math. Soc.* 1981. V. 23. P. 158–164.
- [45] Воловиков А. Ю. К топологическому обобщению теоремы Тверберга // *Матем. заметки.* 1996. Т. 59. № 3. С. 454–456.
- [46] Борсук К. Замечания к вложимости множеств в евклидовы пространства // *Труды III Всесоюз. матем. съезда.* 1959. Т. IV. С. 197–198.
- [47] Болтянский В. Г. Отображения компактов в евклидовы пространства // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1959. Т. 23. С. 871–892.
- [48] Дранишников А. Н. Гомологическая теория размерности // *УМН.* 1988. Т. 43. № 4. С. 11–55.
- [49] Hurewicz W. Sur la dimension des produits Cartésiens // *Ann. of Math.* 1935. V. 36. № 1. P. 194–197; перепечатано в *Collect. Works of Witold Hurewicz*. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1995. P. 335–339.
- [50] Kodama Y. On a problem of Alexandroff concerning the dimension of product spaces, II // *J. Math. Soc. Japan.* 1959. V. 11. P. 94–111.

- [51] Dranishnikov A. N., Uspenskij V. V. Light maps and extensional dimension // Preprint.
- [52] Alexandroff P. Darstellung der Grundzüge der Urysohnschen Dimensionstheorie // Math. Ann. 1928. V. 98. № 1. P. 31–63.
- [53] Hurewicz W. Grundriß der Mengerschen Dimensionstheorie // Math. Ann. 1928. V. 98. № 1. P. 64–88; перепечатано в Collect. Works of Witold Hurewicz. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1995. P. 127–151.
- [54] Hurewicz W. Normalbereiche und Dimensionstheorie // Math. Ann. 1927. V. 96. P. 736–764; перепечатано в Collect. Works of Witold Hurewicz. Providence, RI: Amer. Math. Soc. 1995. P. 57–86.
- [55] Urysohn P. Les multiplicités cantorienes // C. R. Acad. Sci. 1922. V. 175. P. 440–442.
- [56] Смирнов Ю. М. Некоторые соотношения в теории размерности // Матем. сб. 1951. Т. 29. № 1. С. 157–172.
- [57] Зарелуа А. В. О равенстве размерностей // Матем. сб. 1963. Т. 62. № 3. С. 295–319.
- [58] Двалишвили Б. П. О размерности и некоторых других вопросах теории битоологических пространств // Тр. Тбилис. матем. ин-та. 1977. Т. 56. С. 15–51.
- [59] Замбахидзе Л. Г. О функциях размерностного типа // Тр. Тбилис. матем. ин-та. 1977. Т. 56. С. 52–98.
- [60] Dranishnikov A. N. On intersection of compacta in Euclidean space. II // Proc. Amer. Math. Soc. 1991. V. 113. № 4. P. 1149–1154.
- [61] Dranishnikov A. N., Repovš D., Ščepin E. On the failure of the Urysohn–Menger sum formula for cohomological dimension // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 120. P. 1267–1270.
- [62] Dydak J. Cohomological dimension and metrizable spaces. II // Trans. Amer. Math. Soc. 1996. V. 348. № 4. P. 1647–1661.
- [63] Dranishnikov A., Repovš D. The Urysohn–Menger sum formula: An extension of the Dydak–Walsh theorem to dimension one // J. Austral. Math. Soc. Ser. A. 1995. V. 59. № 2. P. 273–282.
- [64] Dydak J. Union theorem for cohomological dimension: A simple counterexample // Proc. Amer. Math. Soc. 1994. V. 121. № 1. P. 295–297.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: bogaty@nw.math.msu.su

Поступила в редакцию
28.04.1998