Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Э. Гутерман, Преобразования неотрицательных целочисленных матриц, сохраняющие определитель, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm680>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.174.16.151

26 апреля 2023 г., 08:09:04

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НЕОТРИЦАТЕЛЬНЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ МАТРИЦ, СОХРАНЯЮЩИЕ ОПРЕДЕЛИТЕЛЬ

А. Э. ГУТЕРМАН

Теория линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты, берет свое начало с работы Фробениуса [1], где охарактеризованы линейные биективные отображения матриц над полем комплексных чисел, сохраняющие определитель. В дальнейшем эта область активно развивалась, в частности, были получены аналоги теоремы Фробениуса для матриц над различными полями и кольцами, см. [2], [3]. Вместе с тем, в связи с многочисленными приложениями в комбинаторике, теории графов и теории информации, постоянно растет интерес к линейной алгебре над полукольцами, см. [4]. В том числе интенсивно ведутся исследования линейных отображений, сохраняющих матричные инварианты над полукольцами, см. [3; гл. 9]. Однако общий вопрос об аналоге теоремы Фробениуса для матриц с коэффициентами из полукольца остается открытым. В настоящей работе получен аналог теоремы Фробениуса для матриц с неотрицательными целыми коэффициентами, а именно, охарактеризованы аддитивные биективные отображения, сохраняющие определитель. Кроме того, охарактеризованы аддитивные биективные отображения, сохраняющие перманент и другие коэффициенты ладейного многочлена.

Пусть $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ обозначает множество всех $(n \times n)$ -матриц с неотрицательными целыми коэффициентами, E_{ij} – матричная единица, C_i – матрица с единицами в i -м столбце и нулями во всех остальных столбцах, R_j – матрица с единицами в j -й строке и всеми остальными элементами, равными нулю.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Отображение $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ называется перестановочным, если существуют матрицы перестановки $P, Q \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ такие, что $T(X) = PXQ$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ или $T(X) = PX^tQ$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$.

ЛЕММА 1. Пусть $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ – линейное отображение, заданное как $T(E_{ij}) = E_{\sigma(i), \sigma(j)}$ для всех (i, j) , где σ – перестановка на множестве пар $\{(i, j) \mid 1 \leq i \leq n, 1 \leq j \leq n\}$. Если отображение T сохраняет определитель, то T – перестановочное отображение, причем перестановки, соответствующие матрицам P и Q имеют одинаковую четность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Покажем, что T^{-1} отображает строки матрицы в строки или столбцы. Допустим противное, т.е. что существуют такие индексы i, j, k , что $T^{-1}(E_{ij})$ и $T^{-1}(E_{ik})$ не лежат в одной строке или в одном столбце. Тогда существуют матричные единицы $E_{i_1 j_1}, \dots, E_{i_{n-2} j_{n-2}}$ такие, что матрица $A = T^{-1}(E_{ij}) + T^{-1}(E_{ik}) + E_{i_1 j_1} + \dots + E_{i_{n-2} j_{n-2}}$ является матрицей перестановки. В этом случае $\det A = \pm 1$. Отсюда $\det T(A) = \pm 1$. С другой стороны, $T(A) = E_{ij} + E_{ik} + T(E_{i_1 j_1}) + \dots + T(E_{i_{n-2} j_{n-2}})$. По условию матрица $T(E_{rs})$ имеет в точности один ненулевой элемент для всех $r, s = 1, \dots, n$. Поскольку E_{ij} и E_{ik} лежат в одной строке, из принципа Дирихле следует, что матрица $T(A)$ имеет нулевую строку. Следовательно, $\det T(A) = 0$. Полученное противоречие показывает, что T^{-1} переводит элементы матрицы, лежащие в одной строке, в элементы, лежащие в одной строке или одном столбце. Аналогично, легко видеть, что T^{-1} переводит столбцы в строки или столбцы. Следовательно, то же самое верно и для отображения T .

Поскольку ни одна комбинация k строк и l столбцов, где $k + l = n$, не может покрыть матрицу $J = \sum_{i,j=1,\dots,n} E_{ij}$, за исключением случая $l = 0$ или $k = 0$, получаем, что или образ при отображении T каждой строки есть строка, а столбца – столбец, или образ каждой строки – столбец, а столбца – строка. Следовательно, существуют такие матрицы перестановки P и Q , что $T(R_i) = PR_iQ$ и $T(C_j) = PC_jQ$ для всех i, j или $T(R_i) = P(R_i)^tQ$ и $T(C_j) = P(C_j)^tQ$ для всех i, j . Отсюда следует, что $T(E_{ij}) = PE_{ij}Q$ для всех i, j или $T(E_{ij}) = PE_{ji}Q$ для всех i, j , т.е. $T(X) = PXQ$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ или $T(X) = PX^tQ$ для всех $X \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$.

Работа выполнена при частичной поддержке гранта Президента РФ “Ведущие научные школы”.

Наконец, поскольку отображение $X \mapsto PXQ$ ($X \mapsto PX^tQ$) должно сохранять определитель, имеем: $\det(PQ) = \det(PEQ) = \det E = 1$, где $E = \sum_{i=1}^n E_{ii}$ — единичная матрица. Отсюда следует, что матрицы P и Q отвечают перестановкам одинаковой четности.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Ненулевая матрица $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ называется неразложимой, если для любых матриц $X, Y \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ из $X + Y = A$ следует, что или $X = 0$, или $Y = 0$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ — аддитивное биективное отображение. Отображение T сохраняет определитель в том и только том случае, когда T — перестановочное отображение, причем перестановки, соответствующие матрицам P и Q , имеют одинаковую четность.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Легко видеть, что отображения описанного типа сохраняют определитель. Заметим, что автоморфизмы аддитивного моноида $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ переводят неразложимые элементы в неразложимые и единственными неразложимыми элементами в $\mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ являются матрицы E_{ij} , $1 \leq i, j \leq n$. Отсюда следует, что $T(E_{ij}) = E_{\sigma(i,j)}$ для всех (i, j) для некоторой перестановки σ . Следовательно, по лемме 1 отображение T имеет требуемый вид.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Пусть матрица $A \in \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$. Многочлен $R_A(x) = \sum_{i=0}^n p_i x^i \in \mathbb{Z}[x]$, где коэффициент $p_0 = 1$, а при $1 \leq i \leq n$ коэффициент p_i равняется сумме перманентов всех $(i \times i)$ -подматриц в A , называется ладейным многочленом матрицы A .

Легко видеть, что, в отличие от определителя, перманент и другие коэффициенты ладейного многочлена остаются неизменными при всех перестановочных преобразованиях. В работе [5] было показано, что над некоторыми полукольцами линейные отображения, сохраняющие перманент (старший коэффициент ладейного многочлена), оставляют неизменными все коэффициенты ладейного многочлена, и установлено, что соответствующие преобразования исчерпываются перестановочными отображениями. Предлагаемый метод позволяет ослабить условия теоремы из [5] и получить характеристику отображений, сохраняющих любой коэффициент ладейного многочлена, в частности, доказать следующий результат:

ТЕОРЕМА 2. Рассмотрим аддитивное биективное отображение $T: \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+) \rightarrow \mathcal{M}_n(\mathbb{Z}_+)$ и фиксированное целое число i , $2 \leq i \leq n$. Отображение T сохраняет i -й коэффициент ладейного многочлена в том и только том случае, когда T — перестановочное отображение.

При $i = n$ получаем утверждение теоремы из [5].

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] G. Frobenius // Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch lineare Substitutionen, Sitzungsber. Berlin: Preuss. Akad. Wiss. Berlin, 1897. P. 994–1015. [2] A. Guterman // Linear and Multilinear Algebra. 2001. V. 48. № 4. P. 293–311. [3] C.-K. Li, S. Pierce, N.-K. Tsing (Eds.). A Survey of Linear Preserver Problems. Taylor & Francis, 1992. (Linear and Multilinear Algebra. V. 33. № 1–2 (Special issues).) [4] K. Głazek. A Guide to the Literature on Semirings and their Applications in Mathematics and Information Sciences. Dordrecht: Kluwer, 2002. [5] L. B. Beasley, N. J. Pullman // Linear Algebra Appl. 1987. V. 90. P. 33–46.

Принято редколлегией
23.09.2003