Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Файрайзл, Асимптотический анализ полной системы Навье–Стокса–Фурье: от течений сжимаемой к течениям несжимаемой жидкости, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 169–192

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6803>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.73.141

26 апреля 2023 г., 12:27:39

УДК 517.958+531.3-324

Асимптотический анализ полной системы Навье–Стокса–Фурье: от течений сжимаемой к течениям несжимаемой жидкости

Э. Файрайзл

Дается обзор новых результатов, связанных с изучением полной системы Навье–Стокса–Фурье для общей вязкой сжимаемой и теплопроводящей жидкости и ее предельного поведения, когда число Маха стремится к нулю. В качестве предельной задачи выступает классическая система Навье–Стокса для несжимаемой жидкости с некоторой подъемной силой, объединенная с соответствующим уравнением теплопроводности.

Библиография: 66 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	170
§ 2. Глобальное существование	172
2.1. Введение	172
2.2. Предположения	173
2.3. Слабые (вариационные) решения	175
2.4. Существование глобальных по времени решений	177
§ 3. Нижний предел числа Маха	178
3.1. Приближение Обербека–Буссинеска	178
3.2. Предел при $Ma, Fr \rightarrow 0$	180
3.3. Термодинамическая устойчивость и равномерные оценки	182
3.4. Акустическое уравнение	183
§ 4. Граничные эффекты	184
§ 5. Сильно стратифицированные течения	185
Список литературы	189

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта IAA100190606 от GA ASCR как части общей исследовательской программы Академии наук Чешской Республики, Institutional Research Plan AV0Z10190503.

§ 1. Введение

В ряде недавно опубликованных статей и монографий объясняется роль параметров масштаба при точном анализе сложных моделей, возникающих в математической гидродинамике. Такой подход часто позволяет значительно упростить систему уравнений, сохранив важную информацию о течении конкретной жидкости и отбросив несущественные детали. Обычно такие системы образуются из-за того, что в уравнениях, которые описывают конкретный режим течения, присутствует сингулярность (особенность). Этот метод особенно важен в метеорологии, где огромные различия в масштабах атмосферных потоков порождают большое число качественно различных моделей (см. обзоры [1], [2] или записи лекций [3]).

В настоящем обзоре основное внимание уделяется явлению стратификации, возникающему под воздействием гравитации, а также в силу асимптотической несжимаемости так называемых потоков с малым числом Маха. Изучаемые базовые уравнения образуют полную **систему Навье–Стокса–Фурье**, которая описывает эволюцию общей сжимаемой теплопроводящей жидкости. Состояние этой системы в момент времени $t > 0$ в точке с пространственными координатами $x \in \Omega \subset \mathbb{R}^3$ полностью задается значениями следующих переменных величин: *плотностью* $\varrho = \varrho(t, x)$, *скоростью* $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ и абсолютной *температурой* $\vartheta = \vartheta(t, x)$, которые удовлетворяют **уравнению непрерывности**

$$\text{Sr } \partial_t \varrho + \text{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (1.1)$$

уравнению баланса моментов

$$\text{Sr}(\partial_t \varrho \mathbf{u}) + \text{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Ma}^2} \nabla_x p(\varrho, \vartheta) = \text{div}_x \mathbb{S} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \varrho \nabla_x F, \quad (1.2)$$

уравнению баланса энтропии

$$\text{Sr } \partial_t(\varrho s(\varrho, \vartheta)) + \text{div}_x(\varrho s(\varrho, \vartheta) \mathbf{u}) + \text{div}_x\left(\frac{\mathbf{q}}{\vartheta}\right) = \sigma \quad (1.3)$$

и уравнению баланса полной энергии

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \left(\frac{\text{Ma}^2}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho, \vartheta) - \frac{\text{Ma}^2}{\text{Fr}^2} \varrho F \right) dx = 0, \quad (1.4)$$

где *давление* $p = p(\varrho, \vartheta)$, *специальная энтропия* $s(\varrho, \vartheta)$ и *специальная энергия* $e(\varrho, \vartheta)$ связаны посредством **уравнения Гиббса**

$$\vartheta Ds = De + pD\left(\frac{1}{\varrho}\right). \quad (1.5)$$

Предполагается, что исследуемая среда имеет линейную вязкость с *тензором напряжения* $\mathbb{S}$, который подчиняется классическому **реологическому закону Ньютона**

$$\mathbb{S} = \mu(\vartheta) \left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^t - \frac{2}{3} \text{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I} \right) + \eta(\vartheta) \text{div}_x \mathbf{u} \mathbb{I}. \quad (1.6)$$

Кроме того, считается, что для *потока тепла* $\mathbf{q}$ выполнен **закон Фурье**

$$\mathbf{q} = -\kappa(\vartheta)\nabla_x\vartheta. \quad (1.7)$$

Отметим, что транспортные коэффициенты μ , η и κ являются явными функциями абсолютной температуры ϑ .

Скорость производства энтропии σ , стоящая на месте источника в (1.3), удовлетворяет неравенству

$$\sigma \geq \frac{1}{\vartheta} \left(\text{Ma}^2 \mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} + \frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta} |\nabla_x \vartheta|^2 \right), \quad (1.8)$$

где в соответствии со вторым законом термодинамики величина в правой части должна быть неотрицательной для любого допустимого течения.

Член $\nabla_x F = \nabla_x F(x)$ обозначает известную потенциальную движущую силу; для простоты берется

$$\nabla_x F = [0, 0, -1], \quad \text{т.е.} \quad F(x) = -x_3. \quad (1.9)$$

Уравнения (1.1)–(1.9) необходимо дополнить консервативными граничными условиями, совместимыми с общим балансом энергии, выраженным через (1.4). Везде далее предполагается, что $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ является ограниченной областью с границей $\partial\Omega$, принадлежащей классу $C^{2+\mu}$. Введем **граничные условия прилипания**

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (1.10)$$

наряду с **условиями отсутствия теплотерь**

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (1.11)$$

где $\mathbf{n}$ обозначает вектор внешней нормали.

Легко проверить, что для любого *гладкого* решения системы (1.1)–(1.11) неравенство (1.8) упрощается до равенства

$$\sigma = \frac{1}{\vartheta} \left(\text{Ma}^2 \mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} + \frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta} |\nabla_x \vartheta|^2 \right)$$

в полном соответствии с классической теорией. Однако в дальнейшем будут рассматриваться слабые (обобщенные) решения задачи (1.1)–(1.11), что предполагает существование (гипотетических) особенностей, которые обращают (1.8) в строгое неравенство (см. [4], [5] или относящиеся к этому вопросу комментарии в [6]).

Символы Ma , Fr и Sr означают безразмерные параметры, называемые соответственно *числом Маха*, *числом Фруда* и *числом Струхала*. Введя характерное время t_{char} , характерную длину L_{char} , характерную скорость U_{char} , характерную плотность ϱ_{char} и характерное давление P_{char} , имеем

$$\text{Ma} = \frac{U_{\text{char}}}{\sqrt{P_{\text{char}}/\varrho_{\text{char}}}}, \quad \text{Fr} = \frac{U_{\text{char}}}{\sqrt{gL_{\text{char}}}}, \quad \text{Sr} = \frac{L_{\text{char}}/t_{\text{char}}}{U_{\text{char}}}, \quad (1.12)$$

где g обозначает модуль ускорения свободного падения. Основная цель данной статьи заключается в обсуждении режимов потока, когда

$$\text{Sr} \approx 1, \quad \text{Ma} \approx \varepsilon, \quad \text{Fr} \approx \varepsilon^k \quad \text{при условии} \quad k = 0, \frac{1}{2}, 1, \quad \varepsilon \rightarrow 0. \quad (1.13)$$

В частности, когда число Маха стремится к нулю, ожидается, что течение будет подчиняться классической системе Навье–Стокса, которая описывает эволюцию во времени вязкой *несжимаемой* жидкости.

“Несжимаемый предел” при $Ma \rightarrow 0$ для различных систем, возникающих в математической гидродинамике, изучался в плодотворной работе [7] (см. также [8]). Можно выделить две группы качественно различных результатов, получаемых различными методами. Первый подход касается *сильных решений*, которые определены для (возможно) коротких интервалов времени, длина которых, тем не менее, не зависит от величины параметра $Ma \rightarrow 0$. В этих рамках самые последние достижения для системы (1.1)–(1.9) можно найти в недавних работах [9], [10] (о более ранних результатах см. обзоры [11]–[13] и цитированную в них литературу). Вторая группа результатов основана на теории глобального по времени существования *слабых решений* лежащей в основе общей системы уравнений, эта теория изучает сходимость решений на произвольном интервале времени. Результаты этого типа для изэнтропной системы Навье–Стокса были получены в работах [14], [15] и развиты в [16], [17]. Наша цель состоит в построении аналогичной теории, которая применяется к решениям полной системы Навье–Стокса–Фурье.

Как уже отмечалось, наш метод исследования связан с *теорией существования* в духе Лерэ (см. [18]) для полной системы Навье–Стокса–Фурье, предложенной в [19] и развитой далее в работах [20], [21] (см. § 2). При таком подходе все соотношения (1.1)–(1.8) будут пониматься в интегральном (обобщенном) смысле, включая неравенство энтропийного баланса (1.3), (1.8).

Силу предложенной теории существования иллюстрируют результаты при $Ma \rightarrow 0$, $Fr \rightarrow 0$, которые устанавливаются в § 3. В частности, мы увидим, что при $Ma \approx \varepsilon$, $Fr \approx \sqrt{\varepsilon}$ соответствующие решения системы (1.1)–(1.8) стремятся к решению приближения Обербека–Буссинеска, которое является самой часто встречающейся в многочисленных приложениях приближенной моделью (см. обзор [22]).

Параграф 4 посвящен влиянию границы на нижний предел числа Маха. Следуя пионерской работе [16], мы изучаем здесь задачи в пространственных областях с “волнистым” дном (см. [23]). Основной темой обсуждения является взаимодействие быстрых акустических волн с пограничным слоем, возникающее от волнистого дна области, которое влечет *сильную* сходимость поля скорости.

В § 5 рассматривается случай, когда число Маха пропорционально числу Фруда. В этой ситуации анализ *полной* системы Навье–Стокса–Фурье является весьма сложным, и поэтому мы ограничимся более простой моделью, основанной на изотермическом приближении, исследованном в [24]. Здесь предельная система является так называемым неэластическим приближением, которое введено и изучено в [25], [26] и других работах.

§ 2. Глобальное существование

2.1. Введение. Вариационные (слабые) решения позволяют дать наиболее естественную математическую формулировку балансовых законов, возникающих в механике непрерывных течений, которые записываются в форме ин-

тегральных равенств, а не в виде дифференциальных уравнений с частными производными. Со времен основополагающей работы Лерэ [18], расширенной существенным образом в работах [27]–[31] и многих других, теория вариационных решений, основанная на функциональных пространствах Соболева, стала важным инструментом современной математической физики.

В большинстве упомянутых выше работ изучаются *несжимаемые жидкости*, когда ожидается, что слабые решения являются регулярными, по крайней мере, в случае гладких начальных данных. В отличие от этого, теория *сжимаемой* и/или *сжимаемой теплопроводящей жидкости*, имеющая дело с весьма неоднородным набором данных, с большим основанием исходит из концепции “истинно слабых” решений, у которых могут наблюдаться различные типы разрывов и другие нерегулярные явления (см., например, работы [32]–[36]). Двигаясь дальше в этом направлении, некоторые авторы построили теорию *решений-мер*, стремясь изучать быстрые осцилляции, которые могут развиваться у решений за конечное время (см. [37], [38]).

Строгая математическая теория сжимаемых баротропных потоков с большими (начальными) данными была изложена совсем недавно в [39] (см. также интересный близкий результат в [40]). Основная идея, обсуждавшаяся уже в [41], [42], заключается в свойстве “слабой непрерывности” физических величин, описывающих эффективное вязкое давление, вместе с искусным применением так называемого перенормированного уравнения непрерывности, которое позволяет описать возможные осцилляции плотности. Хороший обзор последних результатов на эту тему имеется в монографии [43].

Целью настоящего параграфа является изложение математической теории общих сжимаемых вязких теплопроводящих жидкостей без ограничений на размер их начальных состояний. Это исследование можно считать развитием части программы, заложенной в монографии [19]. Однако по сравнению с [19] представленный материал имеет ряд новых моментов: базовые уравнения являются более реалистичными, поскольку основаны на чисто физических принципах; транспортные коэффициенты могут зависеть от температуры; сняты некоторые технические ограничения на рост функций и т.п. Перечислим основные составляющие нашего метода:

- [A1] разумные *вариационные формулировки* физических принципов, основанные на втором законе термодинамики;
- [A2] физически обоснованные структурные предположения, налагаемые на нелинейные величины, входящие в *базовые уравнения*;
- [A3] *априорные* оценки, которые выводятся исключительно из условия ограниченности полной энергии и полной энтропии системы в начальный момент времени;
- [A4] оценки, обеспечивающие равномерную интегрируемость всех плотностей и потоков, участвующих в вариационных формулировках.

2.2. Предположения. В соответствии с теорией существования решений, развитой в [20], [44], физические свойства жидкости описываются следующим образом.

I. Как уже подчеркивалось в формуле (1.6), все рассматриваемые жидкости являются *линейно вязкими*, т.е. тензор вязкого напряжения $\mathbb{S}$ задан в (1.6), где коэффициенты вязкости μ и η являются непрерывно дифференцируемыми

функциями абсолютной температуры ϑ , которые удовлетворяют неравенствам

$$0 < \underline{\mu}(1 + \vartheta^\beta) \leq \mu(\vartheta) \leq \bar{\mu}(1 + \vartheta^3), \quad 0 \leq \eta(\vartheta) \leq \bar{\eta}(1 + \vartheta^3), \quad \beta > \frac{2}{5}, \quad (2.1)$$

где $\underline{\mu}$, $\bar{\mu}$ и $\bar{\eta}$ – положительные константы. Отметим, что условие (2.1) допускает физически обоснованное значение $\beta = \frac{1}{2}$ (см. [45]).

II. Жидкость является *теплопроводящей*. Вектор потока тепла $\mathbf{q}$ подчиняется закону Фурье (1.7), коэффициент теплопроводности κ является непрерывно дифференцируемой функцией абсолютной температуры ϑ , причем

$$0 < \underline{\kappa}(1 + \vartheta^3) \leq \kappa(\vartheta) \leq \bar{\kappa}(1 + \vartheta^3). \quad (2.2)$$

Условие (2.2) допускает излучение, которое может возникнуть при высокотемпературных режимах (см., например, [45]–[48]).

III. Аналогично [21], рассматривается класс жидкостей, которые ведут себя подобно, грубо говоря, *реальному одноатомному газу*. Под этим подразумевается, что давление $p = p(\varrho, \vartheta)$ допускает представление

$$p(\varrho, \vartheta) = p_F(\varrho, \vartheta) + p_R(\vartheta), \quad p_F(\varrho, \vartheta) = p_G(\varrho, \vartheta) + p_E(\varrho, \vartheta), \quad (2.3)$$

где p_G – классическое молекулярное давление, p_E обозначает давление электронного газа, преобладающее в (вырожденной) области высокой плотности, а p_R – давление излучения в силу испускания газом фотонов. Таким образом, в силу соотношения Гиббса (1.5), специальная внутренняя энергия e может быть представлена в виде

$$e(\varrho, \vartheta) = e_F(\varrho, \vartheta) + e_R(\varrho, \vartheta), \quad (2.4)$$

причем слагаемое e_F связано с p_F посредством *уравнения состояния*

$$p_F(\varrho, \vartheta) = \frac{2}{3} \varrho e_F(\varrho, \vartheta), \quad (2.5)$$

где

$$p_R = \frac{a}{3} \vartheta^4, \quad \varrho e_R = a \vartheta^4, \quad a > 0. \quad (2.6)$$

Кроме того, предполагается, что электроны образуют Ферми-газ, и, в частности, внутренняя энергия остается строго положительной, когда температура стремится к нулю:

$$\liminf_{\vartheta \rightarrow 0+} e_F(\varrho, \vartheta) > 0 \quad \text{при любом заданном } \varrho > 0 \quad (2.7)$$

(см., например, [49; гл. 1, 15], [50; гл. 4], [51]).

IV. Асимптотический анализ при $\text{Ma}, \text{Fr} \rightarrow 0$ существенным образом опирается на **условия термодинамической устойчивости**

$$\frac{\partial p(\varrho, \vartheta)}{\partial \varrho} > 0, \quad c_v(\varrho, \vartheta) = \frac{\partial e_F(\varrho, \vartheta)}{\partial \vartheta} > 0. \quad (2.8)$$

Кроме того, налагается техническое, но вполне физически оправданное ограничение

$$\limsup_{\vartheta \rightarrow 0+} c_v(\varrho, \vartheta) < \infty \quad \text{для любого фиксированного } \varrho > 0 \quad (2.9)$$

(см. [52]).

Имея в виду возможные приложения к математическим моделям метеорологии, рассмотрим простейшую, но вполне физически значимую ситуацию, когда пространственная область Ω является горизонтальным слоем, ограниченным сверху и снизу двумя боковыми поверхностями Γ_T и Γ_B . Все физические величины предполагаются периодическими по (x_1, x_2) , и область

$$\Omega = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \mathcal{T}^2, \Phi_B(x_1, x_2) < x_3 < \Phi_T(x_1, x_2)\}, \quad (2.10)$$

где $\mathcal{T}^2 = ((-\pi, \pi) \mid_{\{-\pi, \pi\}})^2$ – двумерный тор, а Φ_B и Φ_T – скалярные функции с областью определения $\mathcal{T}^2$. Положим

$$\Gamma_B = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \mathcal{T}^2, x_3 = \Phi_B(x_1, x_2)\} \quad (2.11)$$

и

$$\Gamma_T = \{(x_1, x_2, x_3) \mid (x_1, x_2) \in \mathcal{T}^2, x_3 = \Phi_T(x_1, x_2)\}. \quad (2.12)$$

В соответствии с (1.10) и (1.11) зададим подходящие граничные условия на боковых поверхностях Γ_B и Γ_T , чтобы иметь закон сохранения энергии, выраженный формулой (1.4). В частности, мы предполагаем выполненными *условия непротекания* для поля скорости и для потока тепла:

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T, \quad (2.13)$$

$$\mathbf{q} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T, \quad (2.14)$$

где $\mathbf{n}$ обозначает вектор внешней нормали. Кроме того, накладывается или условие Навье *полного скольжения*

$$\mathbb{S}\mathbf{n} \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T, \quad (2.15)$$

или стандартное *условие прилипания*

$$\mathbf{u} = 0 \quad \text{на} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T. \quad (2.16)$$

2.3. Слабые (вариационные) решения. Как уже отмечалось в § 1, главным моментом в концепции слабого (вариационного) решения является замена всех дифференциальных уравнений на интегральные тождества, причем скорость производства энтропии σ , заданная в (1.8), учитывает возможность концентрации особенностей на множестве нулевой меры Лебега. Однако, как показано в работе [44], обе формулировки задачи (классическая и вариационная) совершенно эквивалентны, если вариационные решения, которые определяются ниже, имеют достаточную гладкость. Что касается уравнения непрерывности (1.1), то для него вводится понятие перенормированного решения в смысле Ди Перна–Лионса [53], которое оказывается весьма полезным при изучении осцилляций плотности (см. [39], [42]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2.1. Говорят, что тройка $\{\varrho, \mathbf{u}, \vartheta\}$ представляет *слабое решение* системы Навье–Стокса–Фурье (1.1)–(1.8) на $(0, T) \times \Omega$, удовлетворяющее граничным условиям (2.13), (2.14), (2.15) (или (2.16)) и начальным условиям

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_0, \quad \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_0, \quad \vartheta(0, \cdot) = \vartheta_0, \quad (2.17)$$

если выполнены следующие условия.

1) Плотность ϱ является неотрицательной функцией, $\varrho \in L^\infty(0, T; L^{\frac{5}{3}}(\Omega))$, момент $\varrho \mathbf{u}$ принадлежит пространству $L^\infty(0, T; L^q(\Omega; \mathbb{R}^3))$ при некотором $q > 1$, и интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega (\text{Sr } \varrho B(\varrho) \partial_t \varphi + \varrho B(\varrho) \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi - b(\varrho) \text{div}_x \mathbf{u} \varphi) dx dt \\ = - \int_\Omega \text{Sr } \varrho_0 B(\varrho_0) \varphi(0, \cdot) dx \end{aligned} \quad (2.18)$$

выполнено для любой функции $\varphi \in \mathcal{D}([0, T) \times \bar{\Omega})$ и любой функции b такой, что

$$b \in L^\infty \cap C[0, \infty), \quad B(\varrho) = B(1) + \int_1^\varrho \frac{b(z)}{z^2} dz. \quad (2.19)$$

2) Поле скоростей $\mathbf{u}$ принадлежит пространству $L^2(0, T; W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3))$ для некоторого $p > 1$ и удовлетворяет граничным условиям (2.13) (или (2.16)) в смысле пространства следов, абсолютная температура ϑ положительна почти всюду на множестве $(0, T) \times \Omega$,

$$\vartheta^\nu \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)) \quad \text{при всех } \nu \in \left[1, \frac{3}{2}\right],$$

и интегральное тождество

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left(\text{Sr } \varrho \mathbf{u} \cdot \partial_t \varphi + (\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) : \nabla_x \varphi + \frac{1}{\text{Ma}^2} p(\varrho, \vartheta) \text{div}_x \varphi \right) dx dt \\ = \int_0^T \int_\Omega \left(\mathbb{S} : \nabla_x \varphi + \frac{1}{\text{Fr}^2} \varrho \nabla_x F \cdot \varphi \right) dx dt - \int_\Omega \text{Sr } \varrho_0 \mathbf{u}_0 \cdot \varphi(0, \cdot) dx \end{aligned} \quad (2.20)$$

имеет место при любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}([0, T) \times \Omega; \mathbb{R}^3)$ такой, что $\varphi \times \mathbf{n} = 0$ на $\partial\Omega$ (или $\varphi = 0$ на $\partial\Omega$, если используется условие прилипания (2.16) вместо (2.15)). Здесь тензор вязкого напряжения $\mathbb{S}$ задан формулой (1.6), и все величины в (2.20) предполагаются интегрируемыми.

3) Энтропия $\varrho s(\varrho, \vartheta)$ принадлежит пространству $L^\infty(0, T; L^1(\Omega))$, функции $\varrho s(\varrho, \vartheta) \mathbf{u}$ и $\frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta} \nabla_x \vartheta$ интегрируемы на множестве $(0, T) \times \Omega$, функция $\log \vartheta \in L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$, и интегральное неравенство

$$\begin{aligned} \int_0^T \int_\Omega \left(\text{Sr } \varrho s(\varrho, \vartheta) \partial_t \varphi + \varrho s(\varrho, \vartheta) \mathbf{u} \cdot \nabla_x \varphi - \frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta} \nabla_x \vartheta \cdot \nabla_x \varphi \right) dx dt \\ + \int_0^T \int_\Omega \frac{1}{\vartheta} \left(\text{Ma}^2 \mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} + \frac{\kappa(\vartheta)}{\vartheta} |\nabla_x \vartheta|^2 \right) \varphi dx dt \\ \leq - \int_\Omega \text{Sr } \varrho_0 s(\varrho_0, \vartheta_0) \varphi(0, \cdot) dx \end{aligned} \quad (2.21)$$

выполнено для любой неотрицательной пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}([0, T) \times \bar{\Omega})$.

4) Имеет место общий баланс энергии

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \int_{\Omega} \left(\frac{\text{Ma}^2}{2} \varrho |\mathbf{u}|^2 + \varrho e(\varrho, \vartheta) + \frac{\text{Ma}^2}{\text{Fr}^2} \varrho F \right) dx \\ &= \int_{\Omega} \left(\frac{\text{Ma}^2}{2} \varrho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + \varrho_0 e(\varrho_0, \vartheta_0) + \frac{\text{Ma}^2}{\text{Fr}^2} \varrho_0 F \right) dx = E_0 \end{aligned} \quad (2.22)$$

при почти всех $\tau \in (0, T)$.

2.4. Существование глобальных по времени решений. Подходящая теория существования решений системы (1.1)–(1.8) в ограниченной гладкой области $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ в классе вариационных решений из определения 2.1 была разработана в [44; теорема 2.4] (см. также в [20] модификации, необходимые при учете условий роста (2.1)). Изменения, которые учитывают особый вид пространственных областей, заданных в (2.10)–(2.12), при граничных условиях (2.13)–(2.16) также не вызывают осложнений.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть пространственная область Ω определена в (2.10), где $\Phi_B, \Phi_T \in C^{2+\nu}(\mathcal{T}^2)$, $\Phi_B < \Phi_T$. Кроме того, пусть начальные данные $\varrho_0, \mathbf{u}_0, \vartheta_0$ удовлетворяют условиям

$$\varrho_0, \vartheta_0 \in L^\infty(\Omega), \quad \mathbf{u}_0 \in L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3), \quad \text{ess inf}_{x \in \mathcal{T}^2} \varrho_0 > 0, \quad \text{ess inf}_{x \in \mathcal{T}^2} \vartheta_0 > 0. \quad (2.23)$$

Предположим также, что функции p, s и e связаны посредством уравнения Гиббса (1.5), причем выполнены соотношения (2.3)–(2.9). Пусть $\mathbb{S}$ и $\mathbf{q}$ заданы соответственно в (1.6) и (1.7), где транспортные коэффициенты μ, η и κ удовлетворяют (2.1), (2.2).

Тогда при любом $T > 0$ задача (1.1)–(1.8) с граничными условиями (2.13), (2.14), (2.15) (или (2.16)) имеет вариационное решение $\{\varrho, \vartheta, \mathbf{u}\}$ в смысле определения (2.1).

На самом деле, условия (2.23) не являются оптимальными. Результат о существовании решения можно распространить на произвольные начальные данные с конечной полной энергией и неотрицательными распределениями плотности и температуры (см. [19; гл. 7]).

Доказательство теоремы 2.1 основано на разрешении ряда подходящих приближенных задач, которые приводятся ниже.

Уравнение непрерывности (1.1) заменяется параболической задачей

$$\text{Sr } \partial_t \varrho + \text{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = \delta \Delta \varrho, \quad \delta > 0, \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \quad (2.24)$$

дополненной граничными условиями Неймана

$$\nabla_x \varrho \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \quad (2.25)$$

и начальным условием

$$\varrho(0) = \varrho_{0,\varepsilon}, \quad (2.26)$$

где $\varrho_{0,\varepsilon} \in C^2(\overline{\Omega})$,

$$\left\{ \begin{array}{l} 0 < \inf_{x \in \Omega} \varrho_{0,\varepsilon}(x) \leq \sup_{x \in \Omega} \varrho_{0,\varepsilon}(x) < \infty, \\ \nabla_x \varrho_{0,\varepsilon} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0 \end{array} \right\}.$$

Удобное приближение уравнения моментов (1.2) имеет вид

$$\begin{aligned} \text{Sr } \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \text{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Ma}^2} \nabla_x p(\varrho, \vartheta) + \varepsilon \nabla_x \varrho^\Gamma + \delta \nabla_x \mathbf{u} \nabla_x \varrho \\ = \text{div}_x \mathbb{S} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \varrho \nabla_x F \quad \text{в } (0, T) \times \Omega \end{aligned} \quad (2.27)$$

при

$$\mathbf{u}|_{\partial\Omega} = 0 \quad \text{или} \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \mathbb{S} \mathbf{n} \times \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.28)$$

$$\varrho \mathbf{u}(0) = \varrho_{0,\varepsilon} \mathbf{u}_{0,\varepsilon}. \quad (2.29)$$

Наконец, применяя ту же стратегию, что и в [54], заменяем уравнение энтропии (1.3) на полное уравнение для внутренней энергии

$$\begin{aligned} \text{Sr } \partial_t \left(\frac{1}{\text{Ma}^2} \varrho e + \varepsilon \varrho \vartheta \right) + \text{div}_x \left(\left(\frac{1}{\text{Ma}^2} \varrho e + \varepsilon \varrho \vartheta \right) \mathbf{u} \right) - \text{div}_x \left(\left(\frac{\kappa(\varrho, \vartheta)}{\text{Ma}^2} + \varepsilon \vartheta^\Gamma \right) \nabla_x \vartheta \right) \\ = \varepsilon \delta |\nabla_x \varrho|^2 \Gamma \varrho^{\Gamma-2} - \frac{1}{\text{Ma}^2} p \text{div}_x \mathbf{u} + \mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} \quad \text{в } (0, T) \times \Omega, \end{aligned} \quad (2.30)$$

дополненное условиями

$$\nabla_x \vartheta \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad (2.31)$$

$$(e + \varepsilon \vartheta)(0) = e(\varrho_{0,\varepsilon}, \vartheta_{0,\varepsilon}) + \varepsilon \vartheta_{0,\varepsilon}. \quad (2.32)$$

При фиксированных значениях параметров $\delta > 0$ и $\varepsilon > 0$ приближенную задачу (2.27)–(2.32) можно решить с помощью модификации метода Галёркина, примененной в [19; гл. 7] (см. также [54]), если число $\Gamma > 0$ выбрано достаточно большим. Далее можно действовать так же, как в [54], чтобы, устремляя $\delta \rightarrow 0$, получить приближенные задачи “второго уровня”. Наконец, завершается доказательство теоремы 2.1 предельным переходом при $\varepsilon \rightarrow 0$ в точности так, как это сделано в [44; § 3], с использованием необходимых модификаций, описанных в [20], которые учитывают условия (2.1), (2.2) роста транспортных коэффициентов.

§ 3. Нижний предел числа Маха

3.1. Приближение Обербека–Буссинеска. Приближение Обербека–Буссинеска используется, когда плотность жидкости близка к постоянной, но существуют разности давления из-за изменений температуры, что вызывает неустойчивость гидростатического равновесия. Такая ситуация наблюдается во многих задачах о конвекции, когда разности температур возникают независимо от динамики течения. При этом необходимо, чтобы число Маха стремилось к нулю. Это позволяет плотности ϱ приближаться к константе $\bar{\varrho}$, за исключением гравитационной объемной силы, перенормированной с помощью подходящего выбора числа Фруда. Таким образом, разности температур не вызываются течением, а существуют независимо от него (см. пояснения в работе [22]).

Чтобы объяснить идею этого приближения и сделать изложение более прозрачным, рассмотрим простой геометрический случай, а именно, предположим,

что границы Γ_B , Γ_T являются плоскими. Тогда без потери общности можно считать, что в (2.10)

$$\Phi_B \equiv 0, \quad \Phi_T \equiv \pi. \quad (3.1)$$

В предложенных рамках **приближение Обербека–Буссинеска** состоит из **уравнения непрерывности**

$$\operatorname{div}_x \mathbf{U} = 0, \quad (3.2)$$

баланса моментов

$$\bar{\varrho}(\partial_t \mathbf{U} + \operatorname{div}_x(\mathbf{U} \otimes \mathbf{U})) + \nabla_x P = \operatorname{div}_x \mathbb{S} + r \nabla_x F, \quad \nabla_x F = [0, 0, -1], \quad (3.3)$$

баланса тепловой энергии

$$\bar{\varrho} \bar{c}_p (\partial_t \Theta + \operatorname{div}_x(\Theta \mathbf{U})) - \operatorname{div}_x(\bar{\kappa} \nabla_x \Theta) = 0, \quad (3.4)$$

где $\mathbf{u} = \mathbf{U}(t, x)$ обозначает поле скоростей, $\Theta = \Theta(t, x)$ – температуру, а P – напряжение по нормали (давление).

Аналогично (1.6), тензор вязкого напряжения $\mathbb{S}$ задается по закону Ньютона:

$$\mathbb{S} = \bar{\mu}(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x^\perp \mathbf{u}), \quad (3.5)$$

где коэффициент вязкости $\bar{\mu}$, как и коэффициент теплопроводности $\bar{\kappa}$, а также специфический нагрев при постоянном давлении $\bar{c}_p$ вычисляются при постоянной плотности $\bar{\varrho}$ и при постоянной температуре $\bar{\vartheta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \Theta \, dx$. В соответствии с приближением Буссинеска зависящая от температуры плотность $r = r(\Theta)$ появляется только в уравнении моментов, и при этом предполагается, что она меняется вместе с температурой по закону

$$r + \bar{\varrho} \bar{\alpha}(\Theta - \bar{\vartheta}) = 0, \quad (3.6)$$

где $\bar{\alpha}$ обозначает коэффициент теплового расширения (см. [22] или [55], где подробно изложены физические основы такой постановки задачи).

Согласуясь с (2.13)–(2.15), рассмотрим периодические граничные условия по пространственным координатам x_1, x_2 и консервативные граничные условия

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbb{S} \mathbf{n}) \times \mathbf{n} = 0, \quad \nabla_x \Theta \cdot \mathbf{n} = F_b \quad \text{на границе} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T. \quad (3.7)$$

Отметим, что при таких условиях общее количество тепловой энергии

$$E_{\text{th}} = \int_\Omega \bar{\varrho} \bar{c}_p \Theta \, dx = \bar{\varrho} \bar{c}_p \bar{\vartheta} |\Omega|$$

является константой движения.

Введем понятие вариационного решения системы Обербека–Буссинеска в духе основополагающей статьи Лерэ [18].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3.1. Тройка функций $\{r, \mathbf{U}, \Theta\}$ называется *вариационным решением* системы (3.2)–(3.6) с граничными условиями (3.7) и начальными данными

$$\mathbf{U}(0, \cdot) = \mathbf{U}_0, \quad \Theta(0, \cdot) = \Theta_0, \quad (3.8)$$

если выполнены следующие условия:

1) скорость $\mathbf{U}$ принадлежит $L^\infty(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3))$, плотность r принадлежит $L^\infty(0, T; L^2(\Omega))$,

$$\operatorname{div}_x \mathbf{U} = 0 \quad \text{почти всюду в } (0, T) \times \Omega, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$$

и интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (\bar{\varrho} \mathbf{U} \cdot \partial_t \varphi + \bar{\varrho} (\mathbf{U} \otimes \mathbf{U}) : \nabla_x \varphi) \, dx \, dt \\ &= \int_0^T \int_\Omega (\bar{\mu} (\nabla_x \mathbf{U} + \nabla_x^\perp \mathbf{U}) : \nabla_x \varphi - r \nabla_x F \cdot \varphi) \, dx \, dt - \int_\Omega \bar{\varrho} \mathbf{U}_0 \cdot \varphi(0, \cdot) \, dx \end{aligned} \quad (3.9)$$

выполнено для любой пробной функции

$$\varphi \in \mathcal{D}([0, T) \times \bar{\Omega}; \mathbb{R}^3), \quad \operatorname{div}_x \varphi = 0, \quad \varphi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0;$$

2) температура $\Theta \in L^\infty(0, T; L^2(\Omega)) \cap L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega))$ удовлетворяет

$$r + \bar{\varrho} \alpha \left(\Theta - \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \Theta \, dx \right) = 0 \quad \text{при почти всех } (0, T) \times \Omega \quad (3.10)$$

и интегральное тождество

$$\begin{aligned} & \int_0^T \int_\Omega (\bar{\varrho} \bar{c}_p (\Theta \partial_t \varphi + \Theta \mathbf{U} \cdot \nabla_x \varphi) - \bar{\kappa} \nabla_x \Theta \cdot \nabla_x \varphi) \, dx \, dt \\ &= \bar{\kappa} \left(\int_{\{x_3=0\}} F_b \varphi \, d\sigma - \int_{\{x_3=\pi\}} F_b \varphi \, d\sigma \right) - \int_\Omega \bar{\varrho} \bar{c}_p \Theta_0 \varphi(0, \cdot) \, dx \end{aligned} \quad (3.11)$$

выполнено для любой пробной функции $\varphi \in \mathcal{D}([0, T) \times \bar{\Omega})$.

3.2. Предел при $\text{Ma}, \text{Fr} \rightarrow 0$. Следуя [56], покажем, что систему (3.2)–(3.6) с граничными условиями (3.7) можно представить в виде асимптотического предела полной системы Навье–Стокса–Фурье (1.1)–(1.8), когда оба числа Маха и Фруда стремятся к нулю. Точнее, введя малый параметр $\varepsilon > 0$ в системе Навье–Стокса–Фурье (1.1)–(1.8), положим

$$\text{Sr} = 1, \quad \text{Ma} = \varepsilon, \quad \text{Fr} = \sqrt{\varepsilon}. \quad (3.12)$$

Кроме того, будем считать, что начальные распределения плотности и температуры представляют собой малые возмущения пространственно однородного состояния равновесия $\{\bar{\varrho}, \bar{\vartheta}\}$:

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_{\varepsilon,0} = \bar{\varrho} + \varepsilon \varrho_{\varepsilon,0}^{(1)}, \quad \vartheta(0, \cdot) = \vartheta_{\varepsilon,0} = \bar{\vartheta} + \varepsilon \vartheta_{\varepsilon,0}^{(1)}, \quad (3.13)$$

где

$$\bar{\varrho} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \varrho_{\varepsilon,0} \, dx > 0, \quad \bar{\vartheta} = \frac{1}{|\Omega|} \int_\Omega \vartheta_{\varepsilon,0} \, dx > 0 \quad (3.14)$$

и

$$\{\varrho_{\varepsilon,0}^{(1)}\}_{\varepsilon>0}, \quad \{\vartheta_{\varepsilon,0}^{(1)}\}_{\varepsilon>0} \quad \text{ограничены в } L^\infty(\Omega). \quad (3.15)$$

Относительно начальной скорости предполагается, что

$$\mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_{\varepsilon,0}, \quad \mathbf{u}_{\varepsilon,0} \rightarrow \mathbf{u} \quad (*)\text{-слабо в } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3). \quad (3.16)$$

Отметим, что такой выбор начальных данных полностью согласуется с (1.12).

Следующий результат получен в [56; теорема 1.1].

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия теоремы 2.1, а область Ω является плоской, т.е. функции Φ_B, Φ_T в (2.10) удовлетворяют (3.1). Кроме того, предполагается, что

$$\text{Gr} = 1, \quad \text{Ma} = \varepsilon, \quad \text{Fr} = \sqrt{\varepsilon}, \quad F = x_3,$$

$a = \varepsilon$ в (2.6) и $\beta = 1$ в (2.1).

Пусть $\{\varrho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – семейство слабых решений системы Навье–Стокса–Фурье (1.1)–(1.8) на $\Omega \times (0, T)$ с граничными условиями (2.13)–(2.15) и начальными данными

$$\varrho_{\varepsilon,0} = \bar{\varrho} + \varepsilon \varrho_{\varepsilon,0}^{(1)}, \quad \mathbf{u}_{\varepsilon,0}, \quad \vartheta_{\varepsilon,0} = \bar{\vartheta} + \varepsilon \vartheta_{\varepsilon,0}^{(1)},$$

которые удовлетворяют условиям (3.14) и

$$\begin{aligned} \varrho_{\varepsilon,0}^{(1)} &\rightarrow \varrho_0^{(1)}, \quad \vartheta_{\varepsilon,0}^{(1)} \rightarrow \vartheta_0^{(1)} \quad (*)\text{-слабо в } L^\infty(\Omega), \\ \mathbf{u}_{\varepsilon,0} &\rightarrow \mathbf{u}_0 \quad (*)\text{-слабо в } L^\infty(\Omega; \mathbb{R}^3). \end{aligned}$$

Тогда при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$\begin{aligned} \varrho_\varepsilon &\rightarrow \bar{\varrho} \quad \text{в } C([0, T]; L^1(\Omega)) \cap L^\infty(0, T; L^{\frac{5}{3}}(\Omega)), \\ \vartheta_\varepsilon &\rightarrow \bar{\vartheta} \quad \text{в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \end{aligned}$$

и, с точностью до перехода, если необходимо, к подпоследовательности,

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_\varepsilon &\rightarrow \mathbf{U} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)), \\ \varrho_\varepsilon^{(1)} = \frac{\varrho_\varepsilon - \bar{\varrho}}{\varepsilon} &\rightarrow \varrho^{(1)} \quad (*)\text{-слабо в } L^\infty(0, T; L^{\frac{5}{3}}(\Omega)), \\ \vartheta_\varepsilon^{(1)} = \frac{\vartheta_\varepsilon - \bar{\vartheta}}{\varepsilon} &\rightarrow \vartheta^{(1)} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega)), \end{aligned} \quad (3.17)$$

где тройка функций

$$\begin{aligned} \mathbf{U}, \quad r &= \varrho^{(1)} + \bar{\varrho} \left(\frac{1}{\partial_\varrho p_F(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta})} - \frac{\bar{\vartheta} \bar{\alpha}^2}{\bar{c}_p} \right) \left(x_3 - \frac{\pi}{2} \right), \\ \Theta &= \bar{\vartheta} + \vartheta^{(1)} + \frac{\bar{\vartheta} \bar{\alpha}}{\bar{c}_p} \left(x_3 - \frac{\pi}{2} \right) \end{aligned}$$

представляет собой слабое решение системы Обербека–Буссинеска (3.2)–(3.6) в смысле определения 3.1 с начальными данными

$$\mathbf{U}_0 = \mathbf{H}[\mathbf{u}_0], \quad \Theta_0 = \bar{\vartheta} + \frac{\bar{c}_v}{\bar{c}_p} \vartheta_0^{(1)} - \frac{2}{3} \frac{\bar{\vartheta} \bar{c}_v}{\bar{\varrho} \bar{c}_p} \varrho_0^{(1)} \quad (3.18)$$

и с граничными условиями (3.7), причем

$$F_b = \frac{\bar{\vartheta}\bar{\alpha}}{\bar{c}_p} \quad \text{на границе} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T.$$

Здесь $\mathbf{H}$ обозначает проектор Гельмгольца на пространство бездивергентных векторных полей.

Аналогичный результат можно доказать для слабо стратифицированных течений при $\text{Fr} \approx 1$, отвечающих значению $k = 0$ в (1.13). В этом случае уравнение моментов (3.3) не зависит от силы. Поэтому связывание уравнений (3.3) и (3.4) происходит исключительно через конвективный член в (3.4) (см. [57; теорема 1.1]).

Соотношение (3.18) выявляет самый важный аспект проблемы. Если желательно получить нетривиальное решение системы Обербека–Буссинеска с помощью асимптотического предела, функции $\varrho_0^{(1)}$, $\vartheta_0^{(1)}$ должны быть также нетривиальными (ненулевыми). В частности, приходится иметь дело с так называемыми *плохо приготовленными* данными, которые усиливают высокочастотные акустические волны, что “безвредно” для асимптотического предела, но порождает в исходной системе осцилляции поля скорости, имеющие высокую амплитуду (ср. с обзорной статьей [13]).

3.3. Термодинамическая устойчивость и равномерные оценки. Как уже отмечалось выше, для доказательства теоремы 3.1 необходимо получить два основных результата: (i) надлежащие *равномерные оценки*, не зависящие от $\varepsilon \rightarrow 0$, (ii) точное описание осцилляций по времени “градиентной части” $\mathbf{H}^\perp[\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon]$ момента. Здесь разложение Гельмгольца вектор-функции $\mathbf{v}$ определено по формуле

$$\mathbf{v} = \mathbf{H}[\mathbf{v}] + \mathbf{H}^\perp[\mathbf{v}], \quad \mathbf{H}[\mathbf{v}] = \mathbf{v} - \nabla_x \Psi, \quad \mathbf{H}^\perp[\mathbf{v}] = \nabla_x \Psi, \quad (3.19)$$

где Ψ – единственное (обобщенное) решение задачи Неймана

$$\Delta \Psi = \operatorname{div}_x \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega, \quad \nabla_x \Psi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \Psi \, dx = 0.$$

Основным и, по сути, единственным источником равномерных оценок служит **диссипативное тождество**

$$\begin{aligned} & \frac{1}{\varepsilon^2} \left(E_\varepsilon(\tau) - \bar{\vartheta} \int_\Omega \varrho_\varepsilon s(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon)(\tau) \, dx \right) + \frac{\bar{\vartheta}}{\varepsilon^2} \sigma_\varepsilon[0, \tau] \times \bar{\Omega} \\ & = \frac{1}{\varepsilon^2} \left(E_{\varepsilon,0} - \bar{\vartheta} \int_\Omega \varrho_{\varepsilon,0} s(\varrho_{\varepsilon,0}, \vartheta_{\varepsilon,0})(0) \, dx \right), \end{aligned} \quad (3.20)$$

где

$$\begin{aligned} E_\varepsilon(\tau) &= \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \varrho_\varepsilon |\mathbf{u}_\varepsilon|^2 + \varrho_\varepsilon e(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) - \varepsilon \varrho_\varepsilon F \right) dx, \\ E_{\varepsilon,0} &= \int_\Omega \left(\frac{\varepsilon^2}{2} \varrho_{\varepsilon,0} |\mathbf{u}_{\varepsilon,0}|^2 + \varrho_{\varepsilon,0} e(\varrho_{\varepsilon,0}, \vartheta_{\varepsilon,0}) - \varepsilon \varrho_{\varepsilon,0} F \right) dx. \end{aligned}$$

Символ σ_ε обозначает положительную меру, выражающую скорость производства энтропии согласно (1.3), (1.8), существование которой является простым следствием (2.21), (2.22) и теоремы Рисса о представлении (см. [56; § 2]).

В частности, соотношение (3.20) вместе с предположением относительно начальных данных влечет оценку

$$\operatorname{ess\,sup}_{t \in [0, T]} \int_{\Omega} H(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) \, dx \leq \varepsilon^2 c, \quad (3.21)$$

где величина

$$H(\varrho, \vartheta) = \varrho e(\varrho, \vartheta) - \bar{\varrho} \bar{\vartheta} s(\varrho, \vartheta) - (\varrho - \bar{\varrho}) \partial_\varrho (\varrho e - \bar{\vartheta} \varrho s)(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta}) - \bar{\varrho} e(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta}) - \bar{\varrho} \bar{\vartheta} s(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta})$$

напоминает свободную энергию Гельмгольца.

При условии (2.8), наложенном на термодинамическую устойчивость системы, можно показать, что

$$H(\varrho, \vartheta) \geq \begin{cases} c_1(K)(|\varrho - \bar{\varrho}|^2 + |\vartheta - \bar{\vartheta}|^2) & \text{при } [\varrho, \vartheta] \in K, \\ c_2(K)\varrho(e(\varrho, \vartheta) + |s(\varrho, \vartheta)|) & \text{при } [\varrho, \vartheta] \in (0, \infty)^2 \setminus K \end{cases} \quad (3.22)$$

для любого компакта $K \subset (0, \infty)^2$ (см. [56; лемма 2.1]). В частности, соотношения (3.20), (3.21) вместе с (1.8) порождают все равномерные оценки, необходимые для осуществления предельных переходов в теореме 3.1.

Другое следствие из (3.20) заключается в равномерной оценке для меры производства энтропии, а именно, справедливо неравенство

$$\|\sigma_\varepsilon\|_{\mathcal{M}^+([0, T] \times \bar{\Omega})} \leq \varepsilon^2 c. \quad (3.23)$$

3.4. Акустическое уравнение. Изучив уравнение моментов (1.2), легко видеть, что основная задача асимптотического анализа системы при $\varepsilon \rightarrow 0$ состоит в контроле быстрой осцилляции по времени “градиентной составляющей” момента $\mathbf{H}^\perp[\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon]$, которая управляется **акустическим уравнением**

$$\varepsilon \partial_t (\mathbf{H}^\perp[\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon]) + \nabla_x V_\varepsilon = \varepsilon \mathbf{H}^\perp[\operatorname{div}_x \mathbb{S}_\varepsilon] + \varepsilon \mathbf{G}_1^\varepsilon, \quad (3.24)$$

$$\varepsilon \partial_t V_\varepsilon + M_0 \operatorname{div}_x (\mathbf{H}^\perp[\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon]) = S_0 \sigma_\varepsilon + \varepsilon G_2^\varepsilon. \quad (3.25)$$

Здесь величины $\mathbf{G}_1^\varepsilon$, G_2^ε равномерно ограничены в соответствующих функциональных пространствах, M_0 , S_0 – положительные константы и

$$V_\varepsilon = \Lambda_1 \frac{\varrho_\varepsilon - \bar{\varrho}}{\varepsilon} + \Lambda_2 \frac{\varrho_\varepsilon s(\varrho_\varepsilon, \vartheta_\varepsilon) - \bar{\varrho} s(\bar{\varrho}, \bar{\vartheta})}{\varepsilon}$$

для некоторых постоянных величин Λ_1 , Λ_2 .

Система (3.24), (3.25) является линейным гиперболическим уравнением с постоянной скоростью распространения волн, которое можно решить с помощью принципа Дюамеля:

$$\begin{bmatrix} \mathbf{H}^\perp[\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon] \\ V_\varepsilon \end{bmatrix} (t) = \mathcal{S}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{H}^\perp[\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon] \\ V_\varepsilon \end{bmatrix} (0) + \mathcal{S}\left(\frac{t}{\varepsilon}\right) \int_0^t \mathcal{S}\left(\frac{-\tau}{\varepsilon}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{h}_{\varepsilon,1} \\ h_{\varepsilon,2} \end{bmatrix} (\tau) \, d\tau, \quad (3.26)$$

$$\mathbf{h}_{\varepsilon,1} = \mathbf{H}^\perp[\operatorname{div}_x \mathbb{S}_\varepsilon] + \mathbf{G}_1^\varepsilon, \quad h_{\varepsilon,2} = \frac{S_0}{\varepsilon} \sigma_\varepsilon + G_2^\varepsilon, \quad (3.27)$$

где $\mathcal{S}$ – это разрешающий оператор соответствующего однородного уравнения, который является изометрией в энергетическом пространстве (см. [58]).

Замечательная особенность формулы (3.26) состоит в том, что осцилляции по времени полностью характеризуются с помощью временного масштабирования $\mathcal{S}$. Это свойство является решающим при предельном переходе в конвективном члене (1.2), когда обнаруживается, что осциллирующая часть является полным градиентом и ее можно включить в давление P в уравнении (3.3) (ср. [14], [59]). Отметим, однако, что $h_{\varepsilon,2}$ содержит мерозначную компоненту σ_ε , и это усложняет анализ (см. [56; §§ 4, 5]).

§ 4. Граничные эффекты

В предыдущих параграфах было показано, что движение вязкой сжимаемой теплопроводящей жидкости, заполняющей объем между двумя параллельными плоскостями, характеризуется взаимодействием быстрых акустических волн и медленным сдвигом. При выполнении подходящих базовых предположений, когда относительная скорость звука стремится к бесконечности ($Ma \rightarrow 0$), жидкость стремится стать несжимаемой.

Поскольку эволюция по времени акустических волн описывается гиперболическим уравнением (3.24), (3.25), осцилляции по времени сохраняются, что влечет за собой лишь слабую сходимость поля скоростей, если недоступна другая часть информации о движущей силе $[\mathbf{h}_{\varepsilon,1}, h_{\varepsilon,2}]$. Это похоже на течение жидкости в области с плоскими границами без какой-либо эффективной диссипации акустической энергии. Основным предметом обсуждения этого параграфа является взаимодействие быстрых акустических волн с пограничным слоем, возникающее из-за волнистого дна физической области. А в результате проявляется *сильная* сходимость поля скорости.

В отличие от (3.1) теперь предполагается, что в (2.11), (2.12)

$$\Phi_B = \Phi_B(x_1, x_2), \quad \Phi_T = \pi, \quad (4.1)$$

и условия (2.13), (2.15) заменяются на граничные условия прилипания (2.16). Кроме того, предполагается, что

$$|\Phi_B(x_1, x_2)| < \pi, \quad \Phi_B(-x_1, x_2) = -\Phi_B(x_1, x_2) \quad \text{при всех } (x_1, x_2) \in \mathcal{T}^2, \quad (4.2)$$

т.е. область Ω является горизонтальным слоем с “волнистым дном”.

Первое и очень поверхностное наблюдение относится к уравнению (3.24), в котором диссипативный член $\varepsilon \mathbf{H}^\perp[\mathbb{S}_\varepsilon]$ включен в действующую силу $\mathbf{h}_{\varepsilon,1}$. Однако в общем случае этот член влечет убывание решений по времени порядка $\exp(-\varepsilon t)$, что полностью устраняется изменением масштаба времени $t \approx t/\varepsilon$. Важное наблюдение, сделанное впервые в работе [16] при исследовании упрощенной изентропной модели, заключается в том, что результат будет сильнее, если физическая граница не является плоской, а боковые колебания акустических волн запрещены из-за условий прилипания на границе. Образование пограничного слоя приводит к быстрому затуханию порядка $\exp(-\sqrt{\varepsilon} t)$ с последующей аннигиляцией акустических волн.

В работе [16] замечено, что этот довольно удивительный эффект глушения тесно связан с разрешимостью следующей переопределенной задачи на собственные значения:

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в } \Omega, \quad w|_{\partial\Omega} = \text{const}, \quad \nabla_x w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0. \quad (4.3)$$

Разрешимость (4.3) эквивалентна так называемой задаче Помпейю и исследовалась многими авторами. В частности, известно, что для ограниченной односвязной области $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ с липшицевой, но не вещественно аналитической границей задача (4.3) имеет лишь тривиальное решение $w = \text{const}$, $\lambda = 0$ (см. [60]). То же самое верно для произвольной ограниченной липшицевой области в $\mathbb{R}^N$, $N \geq 2$, с границей $\partial\Omega$, гомеоморфной единичной сфере, но не являющейся вещественно аналитической (см. [61]). Похожие результаты для эллипсоидов и некоторых торов в $\mathbb{R}^3$ были получены в [62]. С другой стороны, довольно просто проверить, что для шаров, а также для плоских “периодических” объектов, например вида $\mathcal{T}^2 \times (0, \pi)$, задача (4.3) допускает непостоянные решения.

Здесь же утверждается, что для областей вида (2.10) с волнистым дном, границы которых задаются по формулам (4.1), (4.2), задача (4.3) имеет лишь тривиальные решения, как только $\Phi_B \neq 0$. Точнее, в [23; утверждение 5.1] доказан следующий результат.

УТВЕРЖДЕНИЕ 4.1. Пусть область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана в (2.10), где часть “дна” $\Gamma_B \subset \partial\Omega$ определяется функцией $\Phi_B \in C^3(\mathcal{T}^2)$, которая удовлетворяет (4.2), причем $\Phi_T \equiv \pi$. Предположим, что имеется функция $w \neq \text{const}$, которая является решением переопределенной задачи на собственные значения

$$\Delta w = \lambda w \quad \text{в } \Omega, \quad \nabla_x w \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad w = c_T \quad \text{на } \Gamma_T, \quad w = c_B \quad \text{на } \Gamma_B. \quad (4.4)$$

Тогда $\Phi_B \equiv 0$.

Главное достижение новаторской работы [16] состоит в обнаружении быстрого (порядка $\exp(-\sqrt{\varepsilon} t)$) затухания акустических волн при условии, что $\text{Ma} \approx \varepsilon$ в областях, где (4.3) имеет лишь тривиальные решения (см. утверждение 2 в [16]). Этот подход, примененный к полной системе Навье–Стокса–Фурье, с использованием классической техники малого параметра из работы М. И. Вишика, Л. А. Люстерника [63] приводит к следующему результату (см. [23; теорема 3.1]).

ТЕОРЕМА 4.1. В условиях теоремы 3.1 предположим, что область $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ задана в (2.10), где часть “дна” $\Gamma_B \subset \partial\Omega$ определена функцией $\Phi_B \in C^3(\mathcal{T}^2)$, которая удовлетворяет (4.2), причем $\Phi_T \equiv \pi$ и $\Phi_B \neq 0$.

Тогда утверждение теоремы 3.1 также выполнено, а сходимость (3.17) можно заменить на более сильную:

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{U} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)) \quad \text{и (сильно) в } L^2(0, T; L^2(\Omega; \mathbb{R}^3)). \quad (4.5)$$

§ 5. Сильно стратифицированные течения

Заключительная часть данного обзора основана на работе [24] и посвящена качественно новой ситуации, когда оба числа Маха и Фруда стремятся к нулю

с одинаковой скоростью, а именно, когда

$$\text{Sr} = 1, \quad \text{Ma} = \text{Fr} = \varepsilon. \quad (5.1)$$

Тогда предельное течение становится сильно стратифицированным, т.е. плотность жидкости меняется существенным образом по вертикальной координате, и стандартное условие несжимаемости (3.2) становится неприменимым.

Насколько известно автору, строгие математические результаты имеются только для сокращенной **системы Навье–Стокса**, которая описывает эволюцию плотности $\varrho = \varrho(t, x)$ и скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t, x)$ вязкой сжимаемой жидкости:

$$\text{Sr} \partial_t \varrho + \text{div}_x(\varrho \mathbf{u}) = 0, \quad (5.2)$$

$$\text{Sr} \partial_t(\varrho \mathbf{u}) + \text{div}_x(\varrho \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \frac{1}{\text{Ma}^2} \nabla_x p(\varrho) = \text{div}_x \mathbb{S} + \frac{1}{\text{Fr}^2} \varrho \nabla_x F, \quad (5.3)$$

где p обозначает давление, $F = F(x) = -x_3$ представляет гравитационный потенциал, а $\mathbb{S}$ – это тензор вязкого напряжения, который определяется по закону Ньютона (1.6). Здесь $\mu > 0$ – константа и $\eta \equiv 0$. В частности, полностью игнорируется эффект изменений температуры вследствие движения жидкости. Имеются две реальные ситуации, в которых такая постановка приводит к разумной аппроксимации: (i) *изентропное течение*, когда энтропия предполагается постоянной, (ii) *изотермическое течение*, когда мы пренебрегаем изменением температуры.

Помня о возможных приложениях к атмосферным течениям, рассмотрим случай, когда Ω имеет вид (2.10) с плоской границей, заданной в (3.1), и положим

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0, \quad (\mathbb{S}\mathbf{n}) \times \mathbf{n} = 0 \quad \text{на боковой поверхности} \quad \Gamma_B \cup \Gamma_T. \quad (5.4)$$

Как уже отмечалось в § 3, такая постановка представляется разумным компромиссом между физической интерпретацией и математической простотой модели.

Следуя общему подходу, уже использованному в § 3, представим начальные данные в виде

$$\varrho(0, \cdot) = \varrho_{\varepsilon,0} = \tilde{\varrho} + \varepsilon \varrho_{\varepsilon,0}^{(1)}, \quad \mathbf{u}(0, \cdot) = \mathbf{u}_{\varepsilon,0}, \quad (5.5)$$

где $\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}(x_3)$ – единственное решение **стационарной задачи**

$$\nabla_x p(\tilde{\varrho}) = \tilde{\varrho} \nabla_x g \quad \text{в} \quad \Omega, \quad \int_{\Omega} \tilde{\varrho} \, dx = m \quad (5.6)$$

с заданной *общей массой* $m > 0$.

По техническим соображениям уравнение состояния давление-плотность рассматривается в форме

$$p = p_{\varepsilon}(\varrho) = \varrho + \varepsilon p_d(\varrho), \quad (5.7)$$

где

$$p_d \equiv 0 \quad \text{на} \quad [0, \bar{\varrho}] \quad \text{для некоторого числа} \quad \bar{\varrho} > 0. \quad (5.8)$$

Следовательно, взяв $\bar{\varrho}$ достаточно большим, можно предполагать, что единственное решение задачи (5.6) задается формулой

$$\tilde{\varrho} = \tilde{\varrho}(x_3) = k \exp(-x_3), \quad (5.9)$$

где константа $k > 0$ однозначно определяется по заданной общей массе m . В частности, $\tilde{\varrho}$ не зависит от ε . Кроме того, без потери общности рассуждений можно считать число $m > 0$ зафиксированным так, что $k = 1$.

Поскольку вопрос о единственности решения задачи (5.1)–(5.5) в общем случае остается открытым (по крайней мере, в классе слабых решений), будут рассматриваться только “правильные” слабые решения, удовлетворяющие, помимо (5.1)–(5.5), **энергетическому неравенству**

$$E(\tau) + \text{Ma}^2 \int_0^\tau \int_\Omega \mathbb{S} : \nabla_x \mathbf{u} \, dx \, dt \leq E_0 \quad \text{при почти всех } \tau > 0, \quad (5.10)$$

где

$$\begin{aligned} E(\tau) &= \int_\Omega \left(\text{Ma}^2 \varrho |\mathbf{u}|^2 + P(\varrho) + \frac{\text{Ma}^2}{\text{Fr}^2} \varrho x_3 \right) (\tau) \, dx, \\ E_0 &= \int_\Omega \left(\text{Ma}^2 \varrho_0 |\mathbf{u}_0|^2 + P(\varrho_0) + \frac{\text{Ma}^2}{\text{Fr}^2} \varrho_0 x_3 \right) dx, \end{aligned}$$

причем

$$P(\varrho) \equiv \varrho \int_1^\varrho \frac{p(z)}{z^2} \, dz. \quad (5.11)$$

Существование обобщенных решений задачи (5.1)–(5.5), (5.10) для произвольных начальных данных было доказано П.-Л. Лионсом в работе [39] при условии, что p_d – неубывающая функция, $p_d(\varrho) \approx \varrho^\gamma$, $\gamma \geq \frac{9}{5}$ для достаточно большого ϱ . Позднее этот результат был распространен для $\gamma > \frac{3}{2}$ в работе [64] (случай немонотонной функции p_d рассмотрен в [65]).

В отличие от ситуации, исследованной в § 3, осцилляции по времени акустических волн в сильно стратифицированных потоках описываются **стратифицированным акустическим уравнением**

$$\varepsilon \partial_t (\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) + \tilde{\varrho} \nabla_x V_\varepsilon = \varepsilon \operatorname{div}_x \mathbb{S}_\varepsilon + \varepsilon \mathbf{G}_1^\varepsilon, \quad (5.12)$$

$$\varepsilon \partial_t V_\varepsilon + \frac{1}{\tilde{\varrho}} \operatorname{div}_x (\varrho_\varepsilon \mathbf{u}_\varepsilon) = 0, \quad (5.13)$$

где функция $\mathbf{G}_1^\varepsilon$ равномерно ограничена в подходящей норме и

$$V_\varepsilon = \frac{\varrho_\varepsilon - \tilde{\varrho}}{\varepsilon \tilde{\varrho}}.$$

В частности, скорость волн зависит от вертикальной координаты x_3 (см. [24]).

Добавим к уравнениям (5.12), (5.13) “взвешенное” разложение Гельмгольца

$$\mathbf{H}_w[\mathbf{v}] = \mathbf{v} - \tilde{\varrho} \nabla_x \Psi \quad \text{и} \quad \mathbf{H}_w^\perp[\mathbf{v}] = \tilde{\varrho} \nabla_x \Psi \quad (5.14)$$

для любого $\mathbf{v} \in W^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, $\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0$, где Ψ – единственное решение задачи Неймана

$$\operatorname{div}_x (\tilde{\varrho} \nabla_x \Psi) = \operatorname{div}_x \mathbf{v} \quad \text{в } \Omega, \quad \nabla_x \Psi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \int_\Omega \Psi \, dx = 0. \quad (5.15)$$

Стоит отметить, что функции $\mathbf{H}_w[\mathbf{v}]$ и $\mathbf{H}_w^\perp[\mathbf{v}]$ ортогональны в весовом гильбертовом пространстве $L_{1/\bar{\varrho}}^2$, снабженном скалярным произведением

$$\langle \mathbf{u}, \mathbf{v} \rangle_{L_{1/\bar{\varrho}}^2} = \int_{\Omega} \mathbf{u}(x) \cdot \mathbf{v}(x) \frac{dx}{\bar{\varrho}}.$$

Можно показать, что, подобно обычному проектору Гельмгольца, $\mathbf{H}_w$ является линейным ограниченным оператором в пространстве $W_n^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3)$, а также в пространстве $L^p(\Omega; \mathbb{R}^3)$ при любом $1 < p < \infty$ (в последнем случае при условии, что $\operatorname{div}_x \mathbf{v}$ отождествлено с линейной формой $\phi \mapsto \int_{\Omega} \mathbf{v} \cdot \nabla_x \phi dx$, ограниченной на $W^{1,p}(\Omega)$). Здесь по определению

$$W_n^{1,p}(\Omega; \mathbb{R}^3) = \{ \mathbf{v} \in W^{1,p}(\mathcal{T}^2 \times (0, \pi)) \mid v_3(x_1, x_2, 0) = v_3(x_1, x_2, \pi) = 0 \\ \text{при п.в. } (x_1, x_2) \in \mathcal{T}^2 \}.$$

Объединив весь предварительный материал, можно сформулировать окончательный результат (см. теорему 1.1 в [24]).

ТЕОРЕМА 5.1. *Предположим, что $\{\varrho_\varepsilon, \mathbf{u}_\varepsilon\}_{\varepsilon>0}$ – последовательность слабых решений с конечной энергией для задачи (5.1)–(5.5), (5.10) (определение которых аналогично определению 3.1), причем*

$$\operatorname{Sr} = 1, \quad \operatorname{Ma} = \operatorname{Fr} = \varepsilon.$$

Пусть начальные условия заданы в (5.5), причем

$$\int_{\Omega} \varrho_{\varepsilon,0}^{(1)} dx = 0, \quad \{\varrho_{\varepsilon,0}^{(1)}\}_{\varepsilon>0} \text{ ограничена в } L^\infty(\Omega) \text{ и} \\ \mathbf{u}_{\varepsilon,0} \rightarrow \mathbf{u}_0 \text{ слабо в } L^2(\Omega; \mathbb{R}^3),$$

а $\bar{\varrho}$ является решением стационарной задачи (5.6). Кроме того, предполагается, что давление можно записать в виде $p_\varepsilon(\varrho) = \varrho + \varepsilon p_d(\varrho)$ для некоторой функции $p_d \in C^1[0, \infty)$, причем

$$p'_d \geq 0 \quad \text{на } [0, \infty), \\ p_d(\varrho) = \begin{cases} 0 & \text{при } \varrho \in [0, \bar{\varrho}], \\ \varrho^{\frac{5}{3}} & \text{при } \varrho \geq 2\bar{\varrho}, \end{cases}$$

где $\bar{\varrho} > \sup_{x \in \Omega} \tilde{\varrho}(x)$.

Тогда

$$\varrho_\varepsilon \rightarrow \tilde{\varrho} \quad \text{в } L^\infty(0, T; L^{\frac{5}{3}}(\Omega))$$

и, по крайней мере для некоторой подпоследовательности,

$$\mathbf{u}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{u} \quad \text{слабо в } L^2(0, T; W^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3)),$$

где предельное поле скорости $\mathbf{u}$ является слабым решением (в смысле определения 5.1, которое дается ниже) задачи

$$\partial_t(\tilde{\varrho} \mathbf{u}) + \operatorname{div}_x(\tilde{\varrho} \mathbf{u} \otimes \mathbf{u}) + \tilde{\varrho} \nabla_x p = \mu \operatorname{div}_x \left(\nabla_x \mathbf{u} + \nabla_x \mathbf{u}^t - \frac{2}{3} \operatorname{div}_x \mathbf{u} \mathbf{I} \right), \quad (5.16)$$

$$\operatorname{div}_x(\tilde{\varrho} \mathbf{u}) = 0, \quad (5.17)$$

с граничными условиями (5.4) и начальными условиями

$$\tilde{\mathbf{u}}(0, \cdot) = \mathbf{H}_w[\tilde{\mathbf{u}}_0]. \quad (5.18)$$

Систему (5.16)–(5.18) принято называть **неэластичным приближением**. В представленной постановке его можно рассматривать, как простую модель изотермической атмосферы с температурой $\Theta \equiv 1$ (см., например, [25], [26]). Близкие модели и дальнейшее обсуждение имеются в книге [66]. Отметим, что подходящее определение слабых решений системы (5.16)–(5.18) выглядит следующим образом.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Функция $\mathbf{u} \in L^2(0, T; W_n^{1,2}(\Omega; \mathbb{R}^3))$ называется *слабым решением* системы (5.16)–(5.18), если выполнены следующие условия:

- 1) $\operatorname{div}_x(\tilde{\rho}\mathbf{u}) = 0$ почти всюду на $(0, T) \times \Omega$;
- 2) уравнение момента (5.16) и начальные данные (5.18) понимаются в обобщенном смысле, точнее, имеет место интегральное тождество

$$\int_0^T \int_{\Omega} \left(\tilde{\rho}\mathbf{u} \cdot \partial_t \varphi + \tilde{\rho}\mathbf{u} \otimes \mathbf{u} : \nabla_x \varphi \right) dx dt = \int_0^T \int_{\Omega} \mathbb{S} : \nabla_x \varphi dx dt - \int_{\Omega} \tilde{\rho}\mathbf{u}_0 \cdot \varphi dx \quad (5.19)$$

для любой пробной функции

$$\varphi \in \mathcal{D}([0, T]; \mathcal{D}(\bar{\Omega}; \mathbb{R}^3)), \quad \varphi \cdot \mathbf{n}|_{\partial\Omega} = 0, \quad \operatorname{div}_x(\tilde{\rho}\varphi) = 0 \quad \text{в } (0, T) \times \Omega. \quad (5.20)$$

Такое слабое решение можно рассматривать в качестве естественного расширения стандартного понятия слабого решения в духе первоначальной статьи Лерэ [18] (см. также работу [27] или более позднее изложение в книге [28]). Таким образом, выполнение начальных условий сводится к (5.18), в чем отражается невозможность контроля давления, которое проявляется здесь лишь неявно через выбор пробной функции в (5.20).

Список литературы

- [1] R. Klein, N. Botta, T. Schneider, C.D. Munz, S. Roller, A. Meister, L. Hoffmann, T. Sonar, “Asymptotic adaptive methods for multi-scale problems in fluid mechanics”, *J. Engrg. Math.*, **39**:1 (2001), 261–343.
- [2] R. Klein, “Asymptotic analyses for atmospheric flows and the construction of asymptotically adaptive numerical methods”, *ZAMM Z. Angew. Math. Mech.*, **80**:11–12 (2000), 765–777.
- [3] A. Majda, *Introduction to PDEs and waves for the atmosphere and ocean*, Courant Lect. Notes Math., **9**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2003.
- [4] G.L. Eyink, “Local 4/5-law and energy dissipation anomaly in turbulence”, *Nonlinearity*, **16**:1 (2003), 137–145.
- [5] T. Nagasawa, “A new energy inequality and partial regularity for weak solutions of Navier–Stokes equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **3**:1 (2001), 40–56.
- [6] G.P. Galdi, *An introduction to the mathematical theory of the Navier–Stokes equations. Vol. 1. Linearized steady problems*, Springer Tracts Nat. Philos., **38**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [7] S. Klainerman, A. Majda, “Singular limits of quasilinear hyperbolic systems with large parameters and the incompressible limit of compressible fluids”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **34**:4 (1981), 481–524.

- [8] D. B. Ebin, “The motion of slightly compressible fluids viewed as a motion with strong constraining force”, *Ann. of Math.* (2), **105**:1 (1977), 141–200.
- [9] T. Alazard, “Low Mach number flows and combustion”, *SIAM J. Math. Anal.*, **38**:4 (2006), 1186–1213.
- [10] T. Alazard, “Low Mach number limit of the full Navier–Stokes equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **180**:1 (2006), 1–73.
- [11] R. Danchin, “Low Mach number limit for viscous compressible flows”, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, **39**:3 (2005), 459–475.
- [12] G. Métivier, S. Schochet, “The incompressible limit of the non-isentropic Euler equations”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **158**:1 (2001), 61–90.
- [13] S. Schochet, “The mathematical theory of low Mach number flows”, *M2AN Math. Model. Numer. Anal.*, **39**:3 (2005), 441–458.
- [14] P.-L. Lions, N. Masmoudi, “Incompressible limit for a viscous compressible fluid”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **77**:6 (1998), 585–627.
- [15] P.-L. Lions, N. Masmoudi, “On a free boundary barotropic model”, *Ann. Inst. H. Poincaré Anal. Non Linéaire*, **16**:3 (1999), 373–410.
- [16] B. Desjardins, E. Grenier, P.-L. Lions, N. Masmoudi, “Incompressible limit for solutions of the isentropic Navier–Stokes equations with Dirichlet boundary conditions”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **78**:5 (1999), 461–471.
- [17] D. Bresch, B. Desjardins, E. Grenier, C.-K. Lin, “Low Mach number limit of viscous polytropic flows: Formal asymptotic in the periodic case”, *Stud. Appl. Math.*, **109**:2 (2002), 125–149.
- [18] J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, *Acta Math.*, **63**:1 (1934), 193–248.
- [19] E. Feireisl, *Dynamics of viscous compressible fluids*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **26**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [20] E. Feireisl, “Mathematical theory of compressible, viscous, and heat conducting fluids”, *Comput. Appl. Math.* (to appear).
- [21] E. Feireisl, “Stability of flows of real monoatomic gases”, *Comm. Partial Differential Equations*, **31**:2 (2006), 325–348.
- [22] R. Kh. Zeytounian, “Joseph Boussinesq and his approximation: a contemporary view”, *C. R. Mécanique*, **331**:8 (2003), 575–586.
- [23] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, “On the incompressible limit for the Navier–Stokes–Fourier system in domains with wavy bottoms”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* (to appear).
- [24] E. Feireisl, J. Málek, A. Novotný, I. Straškraba, “Anelastic approximation as a singular limit of the compressible Navier–Stokes system”, *Comm. Partial Differential Equations* (to appear).
- [25] D. R. Durran, “Improving the anelastic approximation”, *J. Atmospheric Sci.*, **46**:11 (1989), 1453–1461.
- [26] F. B. Lipps, R. S. Hemler, “A scale analysis of deep moist convection and some related numerical calculations”, *J. Atmospheric Sci.*, **39**:10 (1982), 2192–2210.
- [27] О. А. Ладыженская, *Математические вопросы динамики несжимаемой жидкости*, 2-е изд., Наука, М., 1970; 2-е англ. изд. О. А. Ladyzhenskaya, *The mathematical theory of viscous incompressible flow*, Gordon and Breach, New York–London–Paris, 1969.
- [28] R. Temam, *Navier–Stokes equations. Theory and numerical analysis*, Stud. Math. Appl., **2**, North-Holland, Amsterdam–New York–Oxford, 1977.
- [29] L. Caffarelli, R. V. Kohn, L. Nirenberg, “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**:6 (1982), 771–831.

- [30] С. Н. Антонцев, А. В. Кажихов, В. Н. Монахов, *Краевые задачи механики неоднородных жидкостей*, Наука, Новосибирск, 1983; англ. пер.: S. N. Antontsev, A. V. Kazhikhov, V. N. Monakhov, *Boundary value problems in mechanics of nonhomogeneous fluids*, Stud. Math. Appl., **22**, North-Holland, Amsterdam, 1990.
- [31] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **3**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [32] B. Desjardins, “Regularity of weak solutions of the compressible isentropic Navier–Stokes equations”, *Comm. Partial Differential Equations*, **22**:5–6 (1997), 977–1008.
- [33] D. Hoff, “Discontinuous solutions of the Navier–Stokes equations for multidimensional flows of heat-conducting fluids”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **139**:4 (1997), 303–354.
- [34] D. Hoff, “Dynamics of singularity surfaces for compressible viscous flows in two space dimensions”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **55**:11 (2002), 1365–1407.
- [35] D. Hoff, D. Serre, “The failure of continuous dependence on initial data for the Navier–Stokes equations of compressible flow”, *SIAM J. Appl. Math.*, **51**:4 (1991), 887–898.
- [36] В. А. Вайгант, “Пример несуществования в целом по времени решения уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой баротропной жидкости”, *Докл. АН СССР*, **339**:2 (1994), 155–156; англ. пер.: V. A. Vaigant, “An example of the nonexistence with respect to time of the global solutions of Navier–Stokes equations for a compressible viscous barotropic fluid”, *Russian Acad. Sci. Dokl. Math.*, **50**:3 (1995), 397–399.
- [37] R. J. DiPerna, “Measure-valued solutions to conservation laws”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **88**:3 (1985), 223–270.
- [38] J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, M. Ružička, *Weak and measure-valued solutions to evolutionary PDEs*, Appl. Math. Math. Comput., **13**, Chapman and Hall, London, 1996.
- [39] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 2. Compressible models*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **10**, Clarendon Press, Oxford, 1998.
- [40] В. А. Вайгант, А. В. Кажихов, “О существовании глобальных решений двумерных уравнений Навье–Стокса сжимаемой вязкой жидкостью”, *Сиб. матем. журн.*, **36**:6 (1995), 1283–1316; англ. пер.: V. A. Vaigant, A. V. Kazhikhov, “On the existence of global solutions to two-dimensional Navier–Stokes equations of a compressible viscous fluid”, *Siberian Math. J.*, **36**:6 (1995), 1108–1141.
- [41] D. Hoff, “Strong convergence to global solutions for multidimensional flows of compressible, viscous fluids with polytropic equations of state and discontinuous initial data”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **132**:1 (1995), 1–14.
- [42] D. Serre, “Variations de grande amplitude pour la densité d’un fluid visqueux compressible”, *Phys. D*, **48**:1 (1991), 113–128.
- [43] A. Novotný, I. Straškraba, *Introduction to the mathematical theory of compressible flow*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **27**, Oxford Univ. Press, Oxford, 2004.
- [44] E. Feireisl, A. Novotný, “On a simple model of reacting compressible flows arising in astrophysics”, *Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A*, **135**:6 (2005), 1169–1194.
- [45] E. Becker, *Gasdynamik*, Teubner, Stuttgart, 1966.
- [46] C. Buet, B. Després, “Asymptotic analysis of fluid models for the coupling of radiation and hydrodynamics”, *J. Quant. Spectroscopy Radiative Transfer*, **85**:3–4 (2004), 385–418.
- [47] J. Oxenius, *Kinetic theory of particles and photons. Theoretical foundations of non-LTE plasma spectroscopy*, Springer Ser. Electrophys., **20**, Springer-Verlag, Berlin, 1986.
- [48] Я. Б. Зельдович, Ю. П. Райзер, *Физика ударных волн и высокотемпературных гидродинамических явлений*, Физматгиз, М., 1963; англ. пер.: Ya. B. Zel’dovich, Yu. P. Raizer, *Physics of shock waves and high-temperature hydrodynamic phenomena*, Academic Press, New York, 1966.

- [49] S. Eliezer, A. Ghatak, H. Hora, *An introduction to equations of states: theory and applications*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1986.
- [50] I. Müller, T. Ruggeri, *Rational extended thermodynamics*, Springer Tracts Nat. Philos., **37**, Springer-Verlag, New York, 1998.
- [51] G. Gallavotti, *Statistical mechanics. A short treatise*, Texts Monogr. Phys., Springer-Verlag, Berlin, 1999.
- [52] S. E. Bechtel, F. J. Rooney, M. G. Forest, “Connection between stability, convexity of internal energy, and the second law for compressible Newtonian fluids”, *J. Appl. Mech.*, **72**:2 (2005), 299–300.
- [53] R. J. DiPerna, P.-L. Lions, “Ordinary differential equations, transport theory and Sobolev spaces”, *Invent. Math.*, **98**:3 (1989), 511–547.
- [54] B. Ducomet, E. Feireisl, “On the dynamics of gaseous stars”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **174**:2 (2004), 221–266.
- [55] K. R. Rajagopal, M. Ružička, A. R. Shrinivasa, “On the Oberbeck–Boussinesq approximation”, *Math. Models Methods Appl. Sci.*, **6**:8 (1996), 1157–1167.
- [56] E. Feireisl, A. Novotný, “The Oberbeck–Boussinesq approximation as a singular limit of the full Navier–Stokes–Fourier system”, *J. Math. Fluid Mech.* (to appear).
- [57] E. Feireisl, A. Novotný, “On the low Mach number limit for the full Navier–Stokes–Fourier system”, *Arch. Ration. Mech. Anal.* (to appear).
- [58] S. Schochet, “Fast singular limits of hyperbolic PDEs”, *J. Differential Equations*, **114**:2 (1994), 476–512.
- [59] N. Masmoudi, “Asymptotic problems and compressible and incompressible limits”, *Advances in mathematical fluid mechanics* (Paseky, Czech Republic, 1999), eds. J. Málek, J. Nečas, M. Rokyta, Springer, Berlin, 2000, 119–158.
- [60] N. Garofalo, F. Segàla, “Another step toward the solution of the Pompeiu problem in the plane”, *Comm. Partial Differential Equations*, **18**:3–4 (1993), 491–503.
- [61] S. A. Williams, “Analyticity of the boundary for Lipschitz domains without Pompeiu property”, *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:3 (1981), 357–369.
- [62] R. Dalmasso, “A new result on the Pompeiu problem”, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **352**:6 (2000), 2723–2736.
- [63] М. И. Вишик, Л. А. Люстерник, “Регулярное вырождение и пограничный слой для линейных дифференциальных уравнений с малым параметром”, *УМН*, **12**:5(77) (1957), 3–122.
- [64] E. Feireisl, A. Novotný, H. Petzeltová, “On the existence of globally defined weak solutions to the Navier–Stokes equations”, *J. Math. Fluid Mech.*, **3**:4 (2001), 358–392.
- [65] E. Feireisl, “Compressible Navier–Stokes equations with a non-monotone pressure law”, *J. Differential Equations*, **184**:1 (2002), 97–108.
- [66] A. Majda, “High Mach number combustion”, *Reacting flows: combustion and chemical reactors*, Part 1 (Ithaca, 1985), Lectures in Appl. Math., **24**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1986, 109–184.

Э. Файрайзл (E. Feireisl)

Mathematical Institute of the Academy of Sciences
of the Czech Republic
E-mail: feireisl@math.cas.cz

Поступила в редакцию
27.09.2006