Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Г. Н. Пифтанкин, Д. В. Трещёв, Сепаратрисное отображение в гамильтоновых системах, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 2, 3–108

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6804>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 13:28:41

УДК 531.01

Сепаратрисное отображение в гамильтоновых системах

Г. Н. Пифтанкин, Д. В. Трещёв

Сепаратрисное отображение построено в нескольких классах задач гамильтоновой динамики. Полученные формулы применены для исследования двумерных симплектических отображений, близких к интегрируемым: построены эллиптические периодические траектории, проходящие через сепаратрисные лунки, даны оценки ширины стохастического слоя. В гамильтоновых системах с двумя с половиной степенями свободы доказана типичность диффузии Арнольда в априори неустойчивом случае и построены траектории с линейным по времени средним ростом энергии в задаче Мезера.

Библиография: 66 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

Глава 1. Введение	5
§ 1. Размер стохастического слоя	6
§ 2. Острова устойчивости в сепаратрисных лунках	8
§ 3. Диффузия Арнольда: постановка проблемы	11
§ 4. Диффузия в задаче Мезера	12
§ 5. Диффузия в априори неустойчивых системах	14
Глава 2. Предварительные замечания	17
§ 1. Термины и обозначения	18
§ 2. Неподвижные точки двумерных симплектоморфизмов	18
§ 3. Нормальные координаты в окрестности гиперболической неподвижной точки	19
Глава 3. Сепаратрисное отображение Заславского	20
§ 1. Определение и формулы	20
§ 2. Отображение склейки: определение	24
§ 3. Отображение склейки: формулы	26
§ 4. Сепаратрисное отображение	28
§ 5. Интеграл Пуанкаре–Мельникова	29
§ 6. Гамильтонова система	30
§ 7. Сепаратрисное отображение для маятника	31
§ 8. Сепаратрисное отображение в общем случае	32

Глава 4. Сепаратрисное отображение Шильникова	34
§ 1. Формулы	34
§ 2. Доказательство	36
Глава 5. Сепаратрисное отображение в задаче Мезера	38
§ 1. Определение	38
§ 2. Формулы	39
Глава 6. Сепаратрисное отображение в априори неустойчивых системах .	41
§ 1. Описание конструкции	42
§ 2. Формулы для сепаратрисного отображения	43
Глава 7. Размер стохастического слоя	46
§ 1. Теоремы о величине стохастического слоя	46
§ 2. Стохастический слой в маятнике с колеблющейся точкой подвеса	51
§ 3. Теория КАМ и теорема Биркгофа	52
Глава 8. Острова устойчивости в сепаратрисных лунках	56
§ 1. Следствия из обратимости	56
§ 2. Симметричные траектории периода 3	58
§ 3. Условия устойчивости	59
§ 4. ЭПЛ-траектории существуют	59
§ 5. Площадь острова устойчивости	61
Глава 9. Рост энергии в задаче Мезера	61
§ 1. Формулировка результата	61
§ 2. Символические траектории	62
§ 3. Быстрые траектории Мезера	66
Глава 10. Траектории в окрестности асимптотических многообразий в апри- ори неустойчивых системах	69
§ 1. Уравнения Рауса	69
§ 2. Построение траектории	71
§ 3. Доказательство леммы о присоединении	74
§ 4. Доказательство леммы 10.5	76
§ 5. Доказательство леммы 10.7	78
§ 6. Соотношения между постоянными	79
Глава 11. Диффузия Арнольда в априори неустойчивых системах	79
§ 1. Предварительные соображения	79
§ 2. Четкие и нечеткие множества	80
§ 3. Прохождение через нерезонансный интервал	84
§ 4. Прохождение через четкий существенный резонанс	86
§ 5. Прохождение через нечеткий интервал	92
§ 6. Доказательство леммы 11.22	94
§ 7. Доказательство леммы 11.23	94
§ 8. Доказательство леммы 11.24	102

§ 9. Добавление к § 7	103
§ 10. Вспомогательные утверждения	104
Список литературы	105

Глава 1. Введение

Сепаратрисное отображение было придумано как удобное средство для изучения динамики диффеоморфизма или потока в малой окрестности асимптотических многообразий гиперболических неподвижных точек или периодических решений. Далее решение, порождающее асимптотические многообразия, будет называться базовым. Траектории, не выходящие из таких окрестностей, стартуют в некоторой “фундаментальной” области, приближаются к базовому решению и затем возвращаются в фундаментальную область. При этом большую часть времени траектория проводит около базового решения. Естественная идея состоит в том, чтобы пропустить динамически неинтересную часть движения, расположенную около базового решения, и рассмотреть лишь индуцированное отображение на себя фундаментальной области в случае дискретного времени или некоторого сечения Пуанкаре для непрерывного времени. Это отображение и называется *сепаратрисным*.

Удобство сепаратрисного отображения как средства исследования динамики в окрестности асимптотических многообразий объясняется следующими обстоятельствами:

- существуют координаты, в которых сепаратрисное отображение принимает универсальный и относительно простой вид: “главная часть” плюс “малые ошибки”,
- главная часть сепаратрисного отображения вычисляется явно в терминах невозмущенной системы и возмущения,
- “ошибки” явно оцениваются.

После того, как удобные формулы для сепаратрисного отображения получены, остается воспользоваться ими для исследования динамики. Таким образом результаты, представленные в настоящей статье, можно разделить на два класса: получение формул для различных сепаратрисных отображений и их применение. Как правило, мы будем рассматривать симплектические отображения и гамильтоновы потоки, хотя в ряде ситуаций аналогичные методы работают и для общих систем.

Существует два идеологически и технически различных класса систем, в которых сепаратрисное отображение позволило получить интересные динамические эффекты.

Первый класс – это системы близкие к интегрируемым. В невозмущенной интегрируемой системе асимптотические многообразия оказываются сдвоенными, а формулы для сепаратрисного отображения очень простыми. При малом возмущении в главном приближении по возмущающему параметру (традиционно, ε) в $O(\varepsilon)$ -окрестности асимптотических многообразий удается получить явные универсальные формулы для сепаратрисного отображения. Читатель, знакомый с проблематикой расщепления сепаратрис, конечно, догадывается,

что ключевую роль в этих формулах играют периодические функции, определенные интегралом Пуанкаре–Мельникова. Сепаратрисные отображения такого типа впервые возникли в [1]. Далее мы их условно называем сепаратрисными отображениями Заславского.

Для систем второго класса не требуется близости к интегрируемости. Здесь объектом исследования служит динамика, сосредоточенная в малой окрестности одной гомоклинической (т.е. двоякоасимптотической к базовой) траектории. Окрестности указанного типа, конечно, как правило, не инвариантны, но целиком содержат достаточно большой набор траекторий. Сепаратрисное отображение позволяет получить довольно подробное описание этой динамики. Подобный подход был предложен в [2] и далее был успешно применен для построения символической динамики, исследования гомоклинических бифуркаций, исследования хаотических аттракторов и т.п. В этой ситуации мы будем говорить о сепаратрисном отображении Шильникова.

Первая половина статьи (главы 3–6) имеет технический характер. В них даны определения и получены формулы для сепаратрисных отображений в различных ситуациях. Во второй половине статьи даны приложения сепаратрисного отображения в задачах динамики. Остановимся на этих приложениях подробнее.

§ 1. Размер стохастического слоя

Пусть T – гладкое симплектическое отображение двумерной области D на себя. Предположим, что отображение T близко к интегрируемому. (Точный смысл этому утверждению будет придан в § 1 главы 3.) Предположим также, что T имеет гиперболическую неподвижную точку σ , сепаратрисы которой ведут себя так, как показано на рис. 1.1. Три инвариантные кривые $\gamma_{\pm}$ и γ_0 , ближайшие к сепаратрисам, образуют границу стохастического слоя. Ширина w стохастического слоя – одна из важных величин, характеризующих хаотические свойства T в окрестности сепаратрис. Определение величины w , а также ширины d сепаратрисной лунки D будет дано в § 1 главы 7.

В главе 7 мы покажем, что при некоторых естественных предположениях выполняется следующая формула:

$$w/d \sim 1/\ln \mu. \quad (1.1)$$

Здесь $\mu > 1$ – большой мультипликатор гиперболической неподвижной точки σ . Символ $\sim$ означает, что для гладкого семейства T_{ε} , $0 \leq \varepsilon \leq \varepsilon_0$, гладких симплектических отображений, где T_0 интегрируемо,

$$C_1/\ln \mu(\varepsilon) < w(\varepsilon)/d(\varepsilon) < C_2/\ln \mu(\varepsilon).$$

Если $\ln \mu \sim 1$, мы видим, что величины w и d имеют одинаковый порядок. В то же время, бывают ситуации, когда при малых ε мультипликатор μ близок к единице. Рассмотрим, например, разрушение резонансной инвариантной окружности интегрируемого отображения

$$T_0(x, y) = (x + \nu(y), y)$$

Рис. 1.1. Окрестность сепаратрис гиперболической точки σ . Размер стохастического слоя.

цилиндра $Z = \{x \bmod 2\pi, y\}$ на себя при точном симплектическом возмущении. Пусть для простоты резонанс – простейший, т.е. исходная окружность задается условием $y = y_0$, $\nu(y_0) = 0$. Возмущенное отображение выглядит следующим образом:

$$T_\varepsilon(x, y) = (x + \nu(y) + \varepsilon f(x, y), y + \varepsilon g(x, y)) + O(\varepsilon^2).$$

В перенормированных переменных $(x \bmod 2\pi, \eta)$, $y = y_0 + \sqrt{\varepsilon} \eta$, отображение T_ε имеет вид

$$(x, \eta) \mapsto (x + \sqrt{\varepsilon} \nu'_0 \eta - \sqrt{\varepsilon} v(x)) + O(\varepsilon), \quad (1.2)$$

где $\nu'_0 = d\nu/dy|_{y=y_0}$ и $v = -g(x, y_0)$. Из условия точной симплектичности вытекает равенство нулю среднего функции v по угловой переменной x , следовательно, для некоторой периодической функции $V(x)$ выполняется равенство $v(x) = \partial V(x)/\partial x$. Отображение (1.2) отличается лишь в порядке $O(\varepsilon)$ от сдвига на время $\sqrt{\varepsilon}$ вдоль решений гамильтоновой системы с гамильтонианом $\nu'_0 \eta^2/2 + V(x)$.

Пусть x_0 – невырожденный локальный максимум потенциала V . Тогда несложно показать, что отображение (1.2) имеет гиперболическую неподвижную точку $(x, \eta) = (x_0, 0) + O(\sqrt{\varepsilon})$. Мультипликатор $\mu > 1$ в этой точке – следующий:

$$\mu = \exp(\sqrt{-\nu'_0 V''_0 \varepsilon}), \quad V''_0 = \partial^2 V / \partial x^2|_{x=x_0} < 0.$$

Таким образом, в указанной ситуации $\ln \mu \sim \sqrt{\varepsilon}$ и согласно (1.1) величина w значительно больше, чем d .

Оказывается, в случае мультипликаторов близких к единице постоянные C_1 и C_2 могут быть оценены в результате решения некоторых задач, не содержащих малого параметра. В частности, если T удовлетворяет некоторому условию симметрии и выполняется одна хорошо известная гипотеза о свойствах стандартного отображения, то справедливо следующее равенство:

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{w(\varepsilon) \ln \mu(\varepsilon)}{d(\varepsilon)} = \frac{4\pi}{k_0}, \quad (1.3)$$

где

$$k_0 = \inf \left\{ k' : \text{для любого } k > k' \text{ стандартное отображение} \right. \\ \left. \begin{aligned} \begin{pmatrix} J \\ \varphi \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} J \\ \psi \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I + \frac{k}{2\pi} \sin(2\pi\varphi) \\ \varphi + J \end{pmatrix} \end{aligned} \right. \\ \left. \begin{aligned} &\text{не имеет инвариантной кривой,} \\ &\text{гомотопной окружности } I = 0 \end{aligned} \right\}.$$

Постоянная $k_0 = 0.971635 \dots$ численно найдена в работах [3]–[5].

Пусть $\mathcal{A}$ – симплектическая площадь стохастического слоя и $\mathcal{A}_{\mathcal{D}}$ – площадь области $\mathcal{D}$. Тогда имеется следующий аналог соотношения (1.1):

$$\mathcal{A} \sim \frac{\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \ln \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{-1}}{\ln^2 \mu}, \quad (1.4)$$

а также аналог формулы (1.3) (при тех же предположениях):

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\mathcal{A} \ln^2 \mu}{\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \ln \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{-1}} = \frac{8\pi^2}{k_0}. \quad (1.5)$$

В общем (несимметричном) случае функции

$$\frac{w(\varepsilon) \ln \mu(\varepsilon)}{d(\varepsilon)}, \quad \frac{\mathcal{A}(\varepsilon) \ln^2 \mu(\varepsilon)}{\mathcal{A}_{\mathcal{D}}(\varepsilon) \ln \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^{-1}(\varepsilon)}$$

не имеют пределов при $\varepsilon \rightarrow 0$, а осциллируют между двумя постоянными.

В главе 7 мы сформулируем условия, при которых верны оценки (1.1)–(1.5). Соотношения (1.1) и (1.4) следуют из теоремы 7.2. Соотношения (1.3) и (1.5) вытекают из замечаний 7.11 и 7.12 при условии справедливости гипотезы 7.8.

Частные случаи соотношения (1.1) были найдены физиками с помощью некоторых неформальных рассуждений в терминах критерия Чирикова [1], [6], [7], а также путем анализа сепаратрисного отображения. В [8] доказана оценка $w/d \leq \text{const}$ при условии $\ln \mu \sim 1$. В статье [9] при том же условии получена оценка $w/d \geq \text{const}$. В. Ф. Лазуткин [10] получил оценку (1.1) для сепаратрис стандартного отображения.

§ 2. Островки устойчивости в сепаратрисных лунках

В главе 8 мы обсуждаем задачу о существовании эллиптических периодических траекторий, проходящих через сепаратрисные лунки, ограниченные отрезками устойчивой и неустойчивой сепаратрис гиперболической неподвижной точки. Мы покажем, что такие траектории, как правило, существуют в однопараметрических семействах симплектических отображений, близких к интегрируемым. Важно отметить, что эти траектории не порождаются какими бы то ни было периодическими траекториями невозмущенного отображения. Если ε – параметр возмущения, то их период имеет порядок $\ln(1/|\varepsilon|)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Пусть $T_\varepsilon: N \rightarrow N$ – семейство симплектических отображений двумерной области N на себя, $\varepsilon \in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ – параметр. Отображение T_0 предполагается интегрируемым, т.е. существует локально непостоянная функция $F: N \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $F \circ T_0 = F$. Мы предполагаем, что T_0 имеет гиперболическую неподвижную точку σ_0 , порождающую две петли сепаратрис (сепаратрисную “восьмерку”) в N . Точка σ_0 является критической для первого интеграла F . Мы считаем эту критическую точку невырожденной.

При малых $\varepsilon \neq 0$ отображение T_ε имеет гиперболическую неподвижную точку σ_ε , гладко зависящую от малого параметра. Я. Г. Синай [11] обнаружил, что эллиптические периодические траектории могут посещать сепаратрисные лунки, см. рис. 1.2. Далее мы называем такие траектории ЭПЛ (Эллиптические, Периодические, проходящие через Лунки). В примере, фигурирующем в [11], отображение далеко от интегрируемого.

Большое количество периодических решений около сепаратрис точки σ_ε можно получить методами символической динамики, но все они неустойчивы. Можно рассуждать и так. Когда при изменении параметра асимптотические многообразия двигаются и приближаются к касанию, появляются пары периодических решений, каждая пара первоначально состоит из эллиптического и гиперболического решения. Впрочем, далее мы используем другие методы.

Рис. 1.2. Простейший тип периодической траектории, посещающей сепаратрисную лунку

В. В. Козлов показал, что условие расщепления сепаратрис в первом приближении по ε , следующее из теории Пуанкаре–Мельникова, влечет разрушение невозмущенных резонансных кривых, расположенных близко к невозмущенным сепаратрисам. В результате появляются невырожденные периодические решения [12]. (Многомерное обобщение этого наблюдения имеется в [13].) Все эти решения делают ровно один оборот внутри сепаратрисной петли. Некоторые из них устойчивы. Отметим, что при малых, но фиксированных ε можно получить лишь конечное число таких траекторий. С. А. Довбыш [14] показал, что устойчивые периодические траектории, полученные таким образом, существуют только вне $\sqrt{|\varepsilon|}$ -окрестности сепаратрис и, следовательно, не могут посещать сепаратрисные лунки, так как ширина последних имеет порядок ε .

Каждой периодической траектории в окрестности сепаратрис можно сопоставить ее тип – число проходов около точки σ_ε . Другими словами, траектория типа n – это периодическая траектория сепаратрисного отображения периода n .

Простейший пример ЭПЛ-траектории приведен на рис. 1.2. Траектория вращается один раз внутри верхней петли сепаратрисной “восьмерки” и проходит один раз вдоль всей “восьмерки”. Согласно нашей классификации тип равен 3. Легко понять, что тип ЭПЛ-траектории всегда не меньше трех.

Пусть $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало и $J = J(T_\varepsilon) \subset (-\varepsilon_0, \varepsilon_0)$ – множество значений параметра ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_0$, для которых отображение T_ε имеет ЭПЛ-траекторию. Отображение T_0 будем считать фиксированным. Положим $T' = dT_\varepsilon/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}$. Тогда T' – гамильтоново векторное поле.

Пусть T_ε имеет гладкость C^r , $r \in \{13, 14, \dots, \infty, \omega\}$, и пусть $\mathcal{A}$ – пространство C^r -гладких векторных полей на N . Снабдим $\mathcal{A}$ C^2 -топологией.

ТЕОРЕМА 1.1. *Существует открытое множество $\mathcal{S} \subset \mathcal{A}$ такое, что для любого $T' \in \mathcal{S}$ относительная мера множества J на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ превосходит положительную постоянную, не зависящую от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

ГИПОТЕЗА 1.2. *Множество $\mathcal{S}$ можно выбрать плотным в $\mathcal{A}$.*

Теорема 1.1 является следствием соответствующего результата для обратимых семейств T_ε .

Пусть $I_\varepsilon: N \rightarrow N$ есть C^r -гладкое семейство инволюций ($I_\varepsilon^2 = \text{id}$) таких, что $I_\varepsilon(\sigma_\varepsilon) = \sigma_\varepsilon$. Отображения T_ε называются обратимыми относительно I_ε (или I_ε -обратимыми), если

$$T_\varepsilon \circ I_\varepsilon = I_\varepsilon \circ T_\varepsilon^{-1}.$$

Если T_0 обратимо, то I_0 отображает сепаратрисную “восьмерку” на себя. Мы будем предполагать, что I_0 сохраняет петли “восьмерки”, т.е. отображает каждую из них на себя. Такая инволюция действует как симметрия относительно вертикальной оси симметрии “восьмерки”.

ТЕОРЕМА 1.3. *Предположим, что T_ε обратимо относительно семейства инволюций I_ε , сохраняющих петли, и, по крайней мере, одна пара сепаратрис точки σ_ε расщепляется в первом приближении по ε . Тогда относительная мера множества J на интервале $(-\varepsilon, \varepsilon)$ превосходит некоторую положительную постоянную, не зависящую от $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$.*

Эллиптические периодические траектории, как правило, порождают островки устойчивости. Мы покажем, что площадь такого островка для типичной ЭПЛ-траектории имеет тот же порядок, что и площадь сепаратрисной лунки. Это означает, что, в принципе, эти островки можно наблюдать на картинках, полученных в результате численной симуляции динамики. Однако наивные попытки наблюдать островки устойчивости в сепаратрисных лунках обычно оканчиваются неудачей. Для этого имеется две причины. Во-первых, мера множества J , соответствующего “не очень маленьким” островкам, невелика, хотя это сильно зависит от параметров отображения. Если μ_0 обозначает старший мультипликатор T_0 в точке σ_0 , то грубые численные оценки показывают,

что эта мера изменяется от 0.004 до 0.3, когда μ_0 меняется от 1.1 до 10. Во-вторых, средняя относительная мера “не очень маленького” острова в лунке обычно меняется между 10^{-8} и 10^{-4} в том же промежутке μ_0 . Более подробную информацию о численном исследовании задачи см. в [15].

§ 3. Диффузия Арнольда: постановка проблемы

Дальнейшие применения сепаратрисного отображения, рассматриваемые в этой статье, связаны с задачей об эволюции медленных переменных в гамильтоновых системах. Прежде чем сформулировать основные результаты в этом направлении, опишем, в чем состоит задача.

В [16] предложен пример гамильтоновой системы вида

$$\begin{aligned} \dot{x} &= \partial H / \partial y, & \dot{y} &= -\partial H / \partial x, & H &= H_0(y) + \varepsilon H_1(x, y, t, \varepsilon), \\ x &\in \mathbb{T}^n = \mathbb{R}^n / \mathbb{Z}^n, & y &\in \mathbb{R}^n, & t &\in \mathbb{T}, & \varepsilon &\in (-\varepsilon_0, \varepsilon_0), \end{aligned} \quad (1.6)$$

с $n = 2$ и выпуклым по действиям y невозмущенным гамильтонианом H_0 , в которой переменные y могут измениться вдоль траектории на величину порядка единицы. Позднее это явление получило название диффузии Арнольда. В [16] был также предложен механизм, порождающий такую диффузию. В возмущенной задаче должен существовать набор гиперболических торов (переходная цепочка). Соответствующая цепочка устойчивых и неустойчивых асимптотических поверхностей должна быть соединена гетероклиническими траекториями. Тогда на траектории, идущей вдоль этой цепочки, имеет место дрейф переменных действие.

Основной вопрос, связанный с диффузией Арнольда в системах (1.6) звучит так. Является ли диффузия типичным свойством? При этом важно, в каком классе гладкости лежит H . Обычно наиболее интересным считается вещественно-аналитический случай. Он же является технически наиболее сложным.

Согласно теории Нехорошева [17], в вещественно-аналитических системах, удовлетворяющих довольно слабым условиям (так называемым условиям крутизны), средняя скорость дрейфа действий вдоль траектории оценивается сверху экспоненциально малой величиной $e^{-\alpha\varepsilon^{-\beta}}$ с положительными α, β . Экспоненциально малые эффекты представляют основную трудность для анализа диффузии. Другая трудность связана с тем фактом, что торы в переходной цепочке образуют, как правило, не непрерывное, а канторово семейство. Оно содержит дыры. Если эти дыры велики, то асимптотическим поверхностям двух торов, разделенных дырой, трудно дотянуться друг до друга. Оценки ширины дыр используют теорию КАМ и поэтому весьма громоздки.

При построении своего примера Арнольд не преодолел этих трудностей, а обошел их с помощью некоторых трюков. В примере Арнольда переходная цепочка образована гладким семейством гиперболических торов. С экспоненциально малыми эффектами удастся справиться благодаря тому, что возмущение зависит от двух малых параметров: ε и $\delta \sim e^{-c/\sqrt{\varepsilon}}$, $c > 0$. Параметр ε несет ответственность за появление гиперболических торов, а δ – за существование гетероклинических связей между ними. Так как δ экспоненциально мал

относительно ε , то существование этих связей можно установить с помощью метода Пуанкаре–Мельникова.

Р. Дуади [18] построил C^∞ -гладкие гамильтоновы системы с тремя степенями свободы, имеющие формально устойчивые, но неустойчивые по Ляпунову эллиптические положения равновесия, причем неустойчивость порождается диффузией Арнольда. Более гладкая (Жевре- α , $\alpha > 1$) ситуация рассмотрена в [19]. В [19] также содержится вариант теории Нехорошева для квазивыпуклых гамильтоновых систем класса Жевре.

В [20] в духе идей Арнольда построен широкий класс вещественно-аналитических систем (весьма вырожденных) с диффузионными траекториями. Возмущения, зависящие от двух малых параметров, рассмотрены в [21]. В отличие от исходного примера Арнольда второй параметр δ не экспоненциально мал относительно ε , а имеет вид $\delta = \varepsilon^p$, где постоянная p достаточно велика. Вариационный подход в примере Арнольда используется в [22]. В [23] произведен численный анализ примера Арнольда с $\varepsilon = \delta$.

Дж. Н. Мезер [24] анонсировал вариационное доказательство типичности диффузии Арнольда в системах (1.6) с положительно определенным гессианом $\partial^2 H_0 / \partial y^2$ в случае двух с половиной степеней свободы. Однако полного доказательства пока не появилось.

Существует несколько более простых задач, где явления типа диффузии (т.е. дрейф медленных переменных вдоль переходных цепочек) происходят без экспоненциально малых эффектов. К ним относятся задача Мезера и априори неустойчивые системы. Ниже мы рассмотрим эти два класса систем подробнее. Следует отметить, что с помощью метода сепаратрисного отображения в таких системах удастся не только доказывать существование диффузионных траекторий, но и оценивать максимальную скорость дрейфа медленных переменных.

§ 4. Диффузия в задаче Мезера

В главах 5 и 9 мы рассматриваем следующую гамильтонову систему:

$$\dot{q} = \partial H / \partial p, \quad \dot{p} = -\partial H / \partial q, \quad (1.7)$$

$$H(q, p, t) = T(q, p) + V(q, t), \quad q \in M^2, \quad p \in T_q^* M^2, \quad t \in \mathbb{T}, \quad (1.8)$$

где M^2 – гладкое компактное двумерное многообразие, $T(q, p)$ – кинетическая энергия (риманова метрика на M^2), $V(q, t)$ – периодическая по времени потенциальная энергия.

Система неавтономна, и энергия может изменяться на решениях.

ТЕОРЕМА 1.4 (Дж. Н. Мезер). *Пусть род M^2 положителен. Тогда для типичных T и V существует решение $\eta(t)$ системы (1.7)–(1.8), на котором $H(\eta(t), t) \rightarrow +\infty$ при $t \rightarrow +\infty$.*

Условия Мезера типичности метрики T и потенциала V сформулированы в § 1 главы 9. С помощью метода сепаратрисного отображения в главе 9 мы получим еще одно доказательство теоремы 1.4 и оценим максимально возможную скорость роста энергии:

ТЕОРЕМА 1.5 [25]. *При условиях Мезера существует решение $\eta(t)$ системы (1.7)–(1.8) такое, что при всех $t \geq 0$*

$$H(\eta(t), t) \geq A^- t + B^- \quad (1.9)$$

для некоторых констант $A^- > 0$ и B^- .

Поскольку $dH/dt = \partial V/\partial t \leq A^+$, то на любом решении $H(t) \leq A^+ t + B^+$, $A^+, B^+ = \text{const}$. Таким образом, рост энергии более быстрый, чем линейный по времени, невозможен ни на каком решении. В этом смысле оценка (1.9) точна.

В задаче Мезера отсутствует малый параметр ε , который обычно имеется в задачах о диффузии медленных переменных. Однако он появляется как отношение V/T при условии, что полная энергия достаточно велика. Действительно, потенциальная энергия ограничена. Поэтому рост полной энергии происходит за счет возрастания кинетической энергии. Система (1.7)–(1.8) при больших H представляет собой возмущение геодезического потока (т.е. системы с гамильтонианом T) неавтономным потенциалом V . При этом роль медленной переменной играет сам гамильтониан H .

Геометрический механизм роста энергии на решении $\eta(t)$ состоит в следующем. Пусть σ – минимальная геодезическая (относительно метрики T) в некотором гомотопическом классе замкнутых кривых на M^2 . Хорошо известно, что в общем случае эта геодезическая гиперболична, т.е. экспоненциально неустойчива относительно геодезического потока. Так как возмущение V неавтономно, время естественно считать фазовой переменной. Тогда σ порождает в невозмущенной системе с гамильтонианом T однопараметрическое семейство гиперболических двумерных торов. Проекцией каждого из этих торов на пространство положений $M^2 \times \mathbb{T}_t$ является $\sigma \times \mathbb{T}_t$, где $\mathbb{T}_t$ – окружность, соответствующая времени. Семейство параметризовано значением гамильтониана T . Большинство из торов для достаточно больших T выживают при возмущении, при этом появляются гетероклинические связи между их асимптотическими многообразиями и, следовательно, переходные цепочки. Соответствующие доказательства, использующие методы теории КАМ, имеются в [26] и [27]. Отметим, что исходное доказательство Мезера, основанное на вариационных методах, до сих пор не опубликовано. Доказательство, частично использующее вариационные идеи Мезера, содержится в [28]. В работах [26], [29] получены различные многомерные обобщения этого результата. Результат, аналогичный теореме 1.5, анонсировал Р. де ла Яве.

В главе 5 мы представим формулы для сепаратрисного отображения, которое описывает динамику в окрестности указанных выше гетероклинических связей. Сепаратрисное отображение задачи Мезера представляет собой возмущение по малому параметру V/T сепаратрисного отображения невозмущенной системы. В невозмущенной системе оно представляет собой прямое произведение сепаратрисного отображения Шильникова (глава 4), которое имеет инвариантное гиперболическое множество, и тождественного (сохранение энергии). Таким образом получаем возмущение частично гиперболической системы. Следовательно, сепаратрисное отображение возмущенной системы имеет много хаотических траекторий. В главе 9 мы построим эти траектории, используя идею

метода антиинтегрируемого предела – построения сжимающего оператора на пространстве траекторий. Для доказательства теоремы 1.5 необходимо выбрать среди построенных траекторий траектории с максимально возможным ростом энергии, что можно сделать, используя явные формулы сепаратрисного отображения.

§ 5. Диффузия в априори неустойчивых системах

Объектом исследования в главах 6, 10 и 11 являются так называемые априори неустойчивые гамильтоновы системы. Эти системы были введены в [30] с целью уйти от одной из главных технических трудностей при исследовании диффузии Арнольда – экспоненциально малых эффектов. Априори неустойчивая система является возмущением интегрируемой. Изучается динамика в окрестности гиперболического многообразия, образованного семейством невозмущенных (частично) гиперболических торов. Существование такого семейства заложено в определении априори неустойчивой системы. В главе 6 мы строим многомерный аналог сепаратрисного отображения Заславского. Полученные формулы являются далее основой для исследования проблемы диффузии Арнольда в таких системах.

Мы рассматриваем лишь случай, когда размерность гиперболических торов максимальна. Как обычно, удобнее рассматривать неавтономную систему с периодической по времени функцией Гамильтона. Если число степеней свободы равно $n + 1 + 1/2$, то размерность гиперболических торов равна $n + 1$. В невозмущенной (интегрируемой) системе эти торы образуют n -параметрическое семейство, являющееся $(2n + 1)$ -мерным гиперболическим множеством. Сепаратрисное отображение задает динамику в окрестности асимптотических многообразий этого множества. Сепаратрисное отображение с одинаковым успехом работает около нерезонансных и резонансных торов. При этом слова “гиперболические торы” и “асимптотические многообразия” означают объекты невозмущенной системы. Мы не используем тот факт, что некоторые из них выживают после возмущения.

Рассмотрим гамильтонову систему с гамильтонианом

$$H(y, x, v, u, t, \varepsilon) = H_0(y, v, u) + \varepsilon H_1(y, x, v, u, t) + O(\varepsilon^2). \quad (1.10)$$

Здесь $x = (x_1, \dots, x_n) \bmod 1$ – точка n -мерного тора $\mathbb{T}^n$, $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}^n$, где $\mathcal{D}_0$ – открытая область, и (v, u) – точка области $D \subset \mathbb{R}^2$. Пары переменных x и y , u и v канонически сопряжены, т.е. симплектическая структура и уравнения Гамильтона имеют вид $\omega = dy \wedge dx + dv \wedge du$,

$$\dot{y} = -\partial H / \partial x, \quad \dot{x} = \partial H / \partial y, \quad \dot{v} = -\partial H / \partial u, \quad \dot{u} = \partial H / \partial v. \quad (1.11)$$

Функция H считается 1-периодической по t , а параметр ε – малым. Удобно считать t точкой тора $\mathbb{T}^1$.

Система с гамильтонианом H_0 интегрируема и называется невозмущенной. Далее мы предполагаем, что гамильтониан (1.10) удовлетворяет нескольким условиям.

Н₀1. Функция H C^r -гладкая по $(y, x, v, u, t, \varepsilon)$, где r достаточно велико.¹

Н₀2. Для любого $y^0 \in \mathcal{D}_0$ функция $H_0(y^0, v, u)$ имеет невырожденную седловую точку $(v, u) = (v^0, u^0)$. Любая точка (v^0, u^0) лежит в компактной компоненте связности множества $\{(v, u) \in D : H_0(y^0, v, u) = H_0(y^0, v^0, u^0)\}$. Более того, (v^0, u^0) – единственная критическая точка $H_0(y^0, v, u)$ на этой компоненте.

Точка $(v^0, u^0) \in D$ гладко зависит от y^0 и является гиперболическим положением равновесия системы с одной степенью свободы и гамильтонианом $H_0(y^0, v, u)$. Соответствующие сепаратрисы сдвоены и образуют кривую типа восьмерки. Петли “восьмерки” далее обозначаются $\hat{\gamma}^\pm(y^0)$, где $\hat{\gamma}^+(y^0)$ называется верхней петлей, а $\hat{\gamma}^-(y^0)$ – нижней. Петли $\hat{\gamma}^\pm(y^0)$ имеют естественную ориентацию, порожденную потоком системы. Ориентация на D определяется системой координат v, u .

Н₀3. При всех $y^0 \in \mathcal{D}_0$ естественная ориентация $\hat{\gamma}^\pm(y^0)$ совпадает с ориентацией области D , т.е. движение по сепаратрисам происходит против часовой стрелки (см. рис 1.3).

Рис. 1.3. Множества U и $U^\pm$ в случае $n = 0$

Это условие, очевидно, ограничительным не является.

Н₀4. В невозмущенном гамильтониане переменные y отделены от u и v (т.е. $H_0(y, v, u) = F(y, f(v, u))$).

Условие **Н₀4**, по-видимому, не обязательно включать в определение априори неустойчивой системы. В некоторых конструкциях без него можно обойтись (см., например, [31]). Согласно **Н₀4** положения равновесия (v^0, u^0) не зависят от y^0 . Будем считать, что $(v^0, u^0) = 0$.

Сепаратрисное отображение, описывающее динамику системы (1.10)–(1.11) при условиях **Н₀1–Н₀4** в окрестности семейства гиперболических торов

$$N(y^0) = \{(y, x, v, u, t) : y = y^0, v = u = 0\} \quad (1.12)$$

и их асимптотических многообразий, строится в главе 6. Далее оно применяется к проблеме диффузии в простейшей нетривиальной ситуации – в случае

¹Заведомо годится $r \geq 13$.

двух с половиной степеней свободы. Чтобы сформулировать соответствующий результат, положим $n = 1$. Тогда $\mathcal{D}_0 \subset \mathbb{R}$ – интервал. Положим также

$$E(y) = H_0(y, 0, 0), \quad \nu = E_y: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}.$$

Следующее условие зависит от положительного параметра c_* .

Н₀5(c_*). Функция $\nu'(y) = d\nu(y)/dy$ не обращается в нуль в сильных резонансах, т.е. в точках, где $\nu = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, $q < 1/c_*$. Более того, для любого $y \in \mathcal{D}_0$ имеем: $|\nu'(y)| + |\nu''(y)| > 2c_\nu$ с некоторым $c_\nu > 0$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$ – интервал такой, что его замыкание $\overline{\mathcal{D}}$ также лежит в $\mathcal{D}_0$.

ТЕОРЕМА 1.6 [32]. Предположим, что H_0 удовлетворяет **Н₀1–Н₀4**. Тогда для типичного H_1 существуют $c_*, \varepsilon_0 > 0$ такие, что если **Н₀5(c_*)** выполнено и $\varepsilon \in (0, \varepsilon_0)$, то возмущенная система имеет решение

$$(x(t), y(t), v(t), u(t)), \quad t \in [0, T], \quad (1.13)$$

со следующими свойствами:

- (i) $\mathcal{D} \subset [y(0), y(T)]$,
- (ii) $c_1 < \frac{\varepsilon}{|\ln \varepsilon|} T < c_2$ для некоторых $c_1, c_2 > 0$.

Замечания. 1. Слова “типичный H_1 ” означают, что H_1 принадлежит открытому плотному множеству в $C^r(\mathcal{D}_0 \times \mathbb{T} \times D \times \mathbb{T}, \mathbb{R})$. Точнее, H_1 должен удовлетворять условиям **Н₁1–Н₁3** (см. § 2 главы 11). Условия **Н₁1–Н₁3** конструктивны, и, в принципе, их можно проверить для данного H_1 .

Теорему 1.6 можно сформулировать несколько иначе. Положив $\varepsilon = 1$, можно сказать, что H_1 достаточно мал в C^r -норме. Но тогда в качестве условия типичности для H_1 следует говорить, что H_1 лежит в так называемом подмножестве типа дополнения к остриям (cusp-residual subset) малого шара C^r (ср. [24]). Эти две возможности, очевидно, эквивалентны.

2. Утверждение (i) означает, что (1.13) – это диффузионная траектория, проходящая через $\mathcal{D}$, и, согласно (ii), средняя скорость диффузии имеет порядок $\varepsilon/|\ln \varepsilon|$. Та же оценка для скорости диффузии была получена в [33] для квазипериодического возмущения маятника, в [34] при дополнительном предположении, что имеется переходная цепочка с хорошими свойствами, и в [35], [36] в “нерезонансной” области многомерного априори неустойчивого варианта примера Арнольда. Отметим, что в указанных статьях возмущения являются тригонометрическими полиномами и, в частности, нетипичны.

3. Вариационный подход в задаче диффузии в априори неустойчивых системах с $2 + 1/2$ степенями свободы развивался в [37] и доведен до полных доказательств типичности диффузии в [38]. Более традиционные геометрические методы в композиции с новыми идеями в окрестности резонансов использованы в [39], [40]. В этих работах максимальная скорость диффузии не оценивалась.

4. Теорема 1.6 остается верной, если в уравнениях (1.11) имеются неконсервативные добавки порядка $O(\varepsilon^2)$.

5. На самом деле теорема 1.6 дает существование бесконечного количества траекторий со свойствами (i)–(ii). Очевидная оценка снизу для меры μ соответствующих начальных условий $\mu \geq e^{-cT}$, $c > 0$, по-видимому, достаточно реалистична в том смысле, что оценка сверху должна быть аналогичной.

6. В наших конструкциях нигде не используется существование гиперболических торов в возмущенной системе. Поэтому, формально говоря, у нас отсутствует “проблема больших дыр” (“large gap problem”), т.е. проблема построения гетероклинических связей между двумя гиперболическими торами, расположенными по разные стороны от сильного резонанса (подробное обсуждение этой проблемы и некоторых подходов к ее решению см. в [39], [40]). Впрочем, эта проблема полностью не исчезает. Ее следы (в других терминах) можно найти в части главы 11, касающейся пересечения сильных резонансов.

Используемые методы примыкают по духу к методам символической динамики. Мы строим коды, которые заставляют двигаться траекторию в данном направлении. Согласно лемме о присоединении (§ 2 главы 10) код порождает траекторию. Выбор кода имеет серьезные ограничения. В нерезонансной области хороший код легко строится. При прохождении сильных резонансов ситуация более трудная: иногда даже приходится в течение некоторого времени двигаться в противоположном направлении вдоль оси y , но в конце концов удается обеспечить эволюцию в нужном направлении со средней скоростью порядка $\varepsilon / \ln \varepsilon$.

7. Аналог теоремы 1.6 должен иметь место и в случае произвольного n . Ожидаемый эффект состоит в следующем. Для типичной априори неустойчивой системы в малой окрестности произвольной гладкой кривой $\gamma \subset \mathcal{D}_0$ должны существовать решения, идущие вдоль γ со средней скоростью порядка $\varepsilon / \ln \varepsilon$.

ПРИМЕР. Рассмотрим систему (1.11) с $H = H_0 + \varepsilon H_1$,

$$H_0 = \frac{y^2}{2} + \frac{v^2}{2} + \Omega^2 \cos(2\pi u), \quad H_1 = \cos(2\pi u)f(x, t), \quad (1.14)$$

$$f(x, t) = a(\cos(2\pi x) + \cos(2\pi t)) + b \cos(2\pi(x - t)) + b \cos(2\pi(x + t)).$$

Невозмущенная система является прямым произведением ротатора на цилиндре $Z_{xy} = \{x \bmod 1, y\}$ и маятника на цилиндре $Z_{uv} = \{u \bmod 1, v\}$.

Положим $\mathcal{D}_0 = (-3/2, 3/2)$. Так как мы интересуемся динамикой около сепаратрис маятника, будем считать, что $D \subset Z_{uv}$ – окрестность сепаратрис. Тогда D гомеоморфна окрестности восьмерки на плоскости. Невозмущенный гамильтониан H_0 удовлетворяет условиям **H**₀**1**–**H**₀**5**(c_*) с произвольным c_* .

Далее для удобства полагаем

$$\Omega = \pi/2, \quad a = \pi^2/8.$$

ТЕОРЕМА 1.7. *Существует положительная постоянная b_0 такая, что для любого $b \in (0, b_0)$ возмущение H_1 типично в смысле, требуемом в теореме 1.6.*

СЛЕДСТВИЕ 1.8. *Предположим, что $b \in (0, b_0)$ и $\beta \in (0, 3/2)$. Тогда при достаточно малых $\varepsilon > 0$ система (1.11), (1.14) имеет решение, у которого y -компонента проходит через интервал $(-\beta, \beta)$ в течение времени порядка $\ln \varepsilon / \varepsilon$.*

Глава 2. Предварительные замечания

В этой главе мы зафиксируем некоторые термины, обозначения и сформулируем хорошо известные факты, используемые далее.

§ 1. Термины и обозначения

Далее всюду c обозначает постоянные, не зависящие от ε и не играющие существенной роли в наших построениях. Эти постоянные считаются положительными и достаточно малыми. Если нижний индекс у функции является вещественной переменной, то он обозначает частную производную. Например, $\Theta_\xi \equiv \partial\Theta/\partial\xi$. Скобки $\langle \cdot, \cdot \rangle$ обозначают стандартное скалярное произведение в $\mathbb{R}^n$. Гладкими функциями будем называть функции класса $C^{\mathbf{r}}$, где $\mathbf{r}$ достаточно велико. Точнее, в обозначении класса гладкости $C^{\mathbf{r}}$ предполагается, что $\mathbf{r}$ может принимать произвольное значение из множества $\{9, 10, \dots, \infty, \omega\}$. Пусть f и g – гладкие функции. Будем говорить, что $f = O_k(g)$, если $f = hg^k$, где h – некоторая гладкая функция.

Автономную гамильтонову систему с $2n$ -мерным фазовым пространством (симплектическим многообразием) будем называть системой с n степенями свободы. Если же функция Гамильтона зависит от времени, причем эта зависимость периодическая, то будем говорить, что система имеет $n + \frac{1}{2}$ степеней свободы.

Пусть $T^t: M \rightarrow M$ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов риманова многообразия (M, dist) , $t \in \mathbb{Z}$ или $\mathbb{R}$. Орбита $\gamma(t) = T^t(\gamma(0))$ называется гетероклинической к инвариантным относительно T^t множествам $N_- \subset M$ и $N_+ \subset M$, если $\text{dist}(\gamma(t), N_\pm) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \pm\infty$. Если $N_- = N_+$, то $\gamma(t)$ называется гомоклинической к этому множеству.

§ 2. Неподвижные точки двумерных симплектоморфизмов

Диффеоморфизм T двумерной области $D \subset \mathbb{R}^2_{z=(z_1, z_2)}$ на себя называется симплектическим (симплектоморфизмом), если он сохраняет форму площади $\omega^2 = dz_2 \wedge dz_1$. Пусть σ – неподвижная точка симплектоморфизма T : $T(\sigma) = \sigma$. Мы будем исследовать динамику в окрестности этой точки.

К указанной задаче сводится исследование отображения T в окрестности периодического решения $\sigma \mapsto T(\sigma) \mapsto \dots \mapsto T^n(\sigma) = \sigma$ (с помощью замены T на T^n) и исследование гамильтоновой системы с полутора или двумя степенями свободы в окрестности периодического решения (с помощью перехода к отображению Пуанкаре).

Свойства динамической устойчивости неподвижной точки в значительной степени определяются матрицей монодромии $M = \partial T / \partial z|_{z=\sigma}$, так как в линейном приближении отображение T есть умножение на M . Собственные значения матрицы монодромии называются мультипликаторами неподвижной точки σ . Так как T сохраняет площадь, $\det M = 1$. Следовательно, характеристический полином для M представляется в виде $\mu^2 - \mu \text{tr} M + 1$. Имеется четыре возможности:

- $|\operatorname{tr} M| > 2$. Мультипликаторы – вещественны и различны. Неподвижная точка называется гиперболической.
- $|\operatorname{tr} M| < 2$. Мультипликаторы равны по модулю единице и различны. Точка σ называется эллиптической.
- $\operatorname{tr} M = -2$. Мультипликаторы равны -1 . Точка σ называется параболической.
- $\operatorname{tr} M = 2$. Мультипликаторы равны 1 . Точка σ называется вырожденной.

При малом возмущении системы невырожденные неподвижные точки не исчезают, а лишь слегка деформируются.

§ 3. Нормальные координаты в окрестности гиперболической неподвижной точки

Рассмотрим особо гиперболические неподвижные точки и периодические решения. Будем считать, что соответствующие мультипликаторы положительны (случай отрицательных мультипликаторов сводится к указанному путем рассмотрения σ как неподвижной точки отображения T^2). Одним из замечательных свойств симплектоморфизма в окрестности такого решения является существование так называемых нормальных координат. А именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.1. Пусть σ – гиперболическая неподвижная точка гладкого симплектического отображения T . Тогда в окрестности точки σ существуют гладкие симплектические координаты (q, p) и функция $\mathcal{M}(qp)$ такие, что $\sigma = (0, 0)$ и в новых координатах отображение T имеет вид

$$(q, p) \mapsto (q\mathcal{M}(qp), p/\mathcal{M}(qp)), \quad (2.1)$$

где $\mu = \mathcal{M}(0) > 1$ и μ^{-1} – мультипликаторы σ .

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. 1) Координаты, определенные в теореме 2.1, называются нормальными. Существование преобразования к нормальным координатам на формальном уровне установлено Г. Д. Биркгофом [41]. Сходимость преобразования в аналитическом случае доказана Ю. Мозером [42]. Случай конечной гладкости рассмотрен в [43].

2) Гладкость нормальных координат и функции $\mathcal{M}$ зависит линейно от гладкости T . Из [43] следует, что если T класса C^r , то отображение, задающее замену координат, можно взять C^s -гладким, где $s \leq (r - 3)/2$. В частности, если $r \geq 13$, то существуют C^5 -гладкие нормальные координаты.

3) Кривые $\Gamma^s = \{(q, p) : q = 0\}$ и $\Gamma^u = \{(q, p) : p = 0\}$ являются инвариантными для системы (2.1). Любое решение, расположенное на Γ^s (соответственно на Γ^u) экспоненциально стремится к σ при $n \rightarrow +\infty$ (соответственно при $n \rightarrow -\infty$). Кривые $\Gamma^{s,u}$ называются асимптотическими к σ или сепаратрисами.

4) Нормальные координаты (q, p) определены неоднозначно. Например, координаты $(q', p') = (-p, q)$ – нормальные. Более того, для любой гладкой функции $r(z)$ ($r(0) \neq 0$) координаты $q' = q/r(qp)$, $p' = pr(qp)$ также являются нормальными.

Пусть имеется гамильтонова система с полутора степенями свободы с фазовым пространством $D \subset \mathbb{R}^2$ и гамильтонианом $H(z, t)$, $z \in D$, $t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Аналогом теоремы 2.1 является следующая теорема.

ТЕОРЕМА 2.3. Пусть $(\sigma(t), t)$ – гиперболическое периодическое решение гамильтоновой системы с гамильтонианом H , $\sigma(0) = \sigma(1)$. Тогда на расширенном фазовом пространстве $D \times \mathbb{T}_t$ в окрестности кривой $(\sigma(t), t)$ существуют гладкие симплектические координаты (q, p, t) такие, что

- 1) время t совпадает с исходным,
- 2) периодическое решение $(\sigma(t), t) = (q = 0, p = 0, t)$,
- 3) в новых координатах гамильтониан зависит только от произведения qp :

$H = \mathcal{H}(pq)$.

Глава 3. Сепаратрисное отображение Заславского

В этой главе мы получим формулы сепаратрисного отображения для двумерных симплектических отображений и гамильтоновых систем с полутора степенями свободы, близких к интегрируемым.

§ 1. Определение и формулы

1.1. Двумерный симплектоморфизм. Рассмотрим семейство симплектических отображений T_ε , определенных на двумерной области $D \subset \mathbb{R}_{z=(z_1, z_2)}$, зависящее от малого параметра ε , $|\varepsilon| < \varepsilon_0$. Предположим, что

- I. Отображение T_0 имеет гиперболическую неподвижную точку σ ;
- II. T_0 интегрируемо, т.е. существует гладкая локально непостоянная функция $F: D \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $F \circ T_0 = F$.

Таким образом, динамика невозмущенного отображения T_0 проста. Область D расслаивается на инвариантные кривые уровня интеграла F . Гиперболическая неподвижная точка порождает четыре асимптотические ветви (сепаратрисы) $\Gamma^{u\pm}$ и $\Gamma^{s\pm}$ – две неустойчивые и две устойчивые соответственно (см. рис. 3.1). Сепаратрисы лежат на одном уровне интеграла F . Как правило, в интегрируемых системах неустойчивая и устойчивая сепаратрисы совпадают. А именно, пусть

- III. $\Gamma^{s\pm} = \Gamma^{u\pm} =: \Gamma^\pm$, так что сепаратрисы Γ^+ , Γ^- и точка σ образуют фигуру типа восьмерки (см. рис. 3.1).

Кривые Γ^+ и Γ^- будем условно называть верхней и нижней петлей “восьмерки” соответственно. Без ограничения общности можно считать, что $F(\sigma) = 0$. Легко установить, что $dF|_{z=\sigma} = 0$. Далее считаем, что σ – невырожденная критическая точка F , т.е.

- IV. $\det \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}(\sigma) \neq 0$.

Обозначим через $\mu > 1$ мультипликатор неподвижной точки σ и $\lambda = \ln \mu$.²

²Если T_0 – отображение за период, равный 1, гамильтоновой системы с полутора степенями свободы, то λ – показатель Ляпунова соответствующего периодического решения.

Рис. 3.1. Фазовая плоскость невозмущенной и возмущенной системы

Рассмотрим теперь возмущенное отображение T_ε , $\varepsilon \neq 0$. При малых ε отображение T_ε имеет гиперболическую неподвижную точку σ_ε , гладко зависящую от параметра ε , $\sigma_0 = \sigma$. Пусть $\Gamma_\varepsilon^{u\pm}$ и $\Gamma_\varepsilon^{s\pm}$ – сепаратрисные ветви σ_ε . Вообще говоря, они уже не совпадают при $\varepsilon \neq 0$. Для изучения динамики в окрестности сепаратрис удобным средством является сепаратрисное отображение. Ниже следует его определение.

Рассмотрим окрестность U_c сепаратрис: область $|F| < c$, c мало. Пусть Λ^+ и Λ^- – кривые, идущие от одной компоненты границы к другой трансверсально верхней и нижней сепаратрисной петле соответственно (например, фазовые линии градиентного потока функции F). Обозначим через $\Delta_\varepsilon^\pm$ подобласть в U_c , заключенную между кривыми $\Lambda^\pm$ и $T_\varepsilon(\Lambda^\pm)$ (см. рис. 3.2). Положим $\Delta_\varepsilon = \Delta_\varepsilon^+ \cup \Delta_\varepsilon^-$. Для достаточно малого c имеем $T_\varepsilon(\Delta_\varepsilon) \cap \Delta_\varepsilon = \emptyset$. Пусть $z \in \Delta_\varepsilon$, и пусть ³

$$n_r(z) = \min\{n \in \mathbb{N} : T_\varepsilon(z), \dots, T_\varepsilon^{n-1}(z) \in U_c, T_\varepsilon^n(z) \in \Delta_\varepsilon\},$$

$$\Delta_\varepsilon^r = \{z \in \Delta_\varepsilon : n_r(z) \text{ – определено и конечно}\}.$$

Сепаратрисное отображение $\mathcal{SM}_\varepsilon$ определяется следующим образом:

$$\mathcal{SM}_\varepsilon : \Delta_\varepsilon^r \rightarrow \Delta_\varepsilon, \quad \mathcal{SM}_\varepsilon(z) = T_\varepsilon^{n_r}(z).$$

Обозначим $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm = \Delta^\pm \cup \Lambda^\pm \cup T_\varepsilon(\Lambda^\pm)$. Заметим, что $\mathcal{SM}_\varepsilon$ по непрерывности продолжается на $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm$ так, что $\mathcal{SM}_\varepsilon(z) = \mathcal{SM}_\varepsilon(T_\varepsilon(z))$, $z \in \Lambda^\pm$. Поэтому естественно считать, что сепаратрисное отображение определено на подмножестве цилиндров $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm / \sim$, где факторизация $\sim$ обозначает отождествление точек $z \in \Lambda^\pm$ и $T_\varepsilon(z) \in T_\varepsilon(\Lambda^\pm)$.

Рассмотрение сепаратрисного отображения $\mathcal{SM}_\varepsilon$ вместо T_ε удобно для исследования динамики в окрестности сепаратрис, потому что автоматически

³Индекс r в n_r и Δ_ε^r взят от слова return (возвращение).

Рис. 3.2. Определение сепаратрисного отображения. Левая часть рисунка представлена в координатах (z_1, z_2) , а правая в координатах (x, y, s)

пропускаются “неинтересные участки” траекторий, проходящие рядом с точкой σ . Важным обстоятельством является тот факт, что при малых значениях ε в удобных координатах $\mathcal{SM}_\varepsilon$ допускают простые формулы. А именно, верна следующая теорема.

ТЕОРЕМА 3.1. Пусть выполнены условия I–IV. Тогда на $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm / \sim$ существуют гладко зависящие от ε координаты $x \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{R}$, $s \in \{\pm\}$ такие, что

- 1) $\overline{\Delta}_\varepsilon^+ / \sim = \{s = +\}$, $\overline{\Delta}_\varepsilon^- / \sim = \{s = -\}$, x – угловая координата на цилиндрах $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm / \sim$, а геометрический смысл переменной εy – расстояние (со знаком) до неустойчивой сепаратрисы;
- 2) симплектическая структура $dz_2 \wedge dz_1 = \varepsilon dy \wedge dx$;
- 3) существуют гладкие функции $\nu_\pm(x)$ и константы $\alpha_\pm$ такие, что сепаратрисное отображение имеет вид $(x^+, y^+, s^+) = \mathcal{SM}_\varepsilon(x, y, s)$,

$$\begin{cases} x^+ = x + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_s^2 \lambda} + \ln |y^+| \right), \\ y^+ = y + \lambda \nu_s(x) + O(\varepsilon), \\ s^+ = s \cdot \text{sign}(y^+), \end{cases} \quad (3.1)$$

причем $\Delta_\varepsilon^r = \{(x, y) \in \Delta_\varepsilon : y^+ \neq 0\}$;

- 4) $\{y = 0, s = \pm\} \subset \Gamma_\varepsilon^{u\pm}$, $\{y^+ = 0, s = \pm\} \subset \Gamma_\varepsilon^{s\pm}$.

Отметим некоторые свойства отображения (3.1). На окружностях $y^\pm(x, y, \pm) = 0$ сепаратрисное отображение не определено (соответственно, обратное к нему не определено на окружностях $y = 0$). Действительно, например, точки, лежащие на отрезках сепаратрис $\Gamma_\varepsilon^{s\pm}$, не возвращаются в $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm$, а стремятся

к σ_ε при итерациях отображения T_ε . Таким образом, динамика для отображения $\mathcal{M}_\varepsilon$ может рассматриваться лишь для точек, на траекториях которых переменная y никогда не обращается в нуль, иными словами, вне сепаратрис. Дополнение к указанному множеству точек (след сепаратрис в $\overline{\Delta}_\varepsilon^\pm$) состоит из счетного набора гладких кривых и поэтому имеет меру нуль.

Удивительным свойством сепаратрисного отображения является то, что в главном приближении его зависимость от $\ln \varepsilon$ оказывается периодической. Действительно, пренебрегая малыми слагаемыми $O(\varepsilon)$, получаем отображение, которое не меняется при замене ε на $\varepsilon \mu^n = \varepsilon e^{\lambda n}$ для любого целого n .

При больших значениях переменной y сепаратрисное отображение близко к интегрируемому. Действительно, полагая $y = y_0(1 + v)$, где $|y_0|$ – большой параметр, а переменная v мала, получаем:

$$\begin{aligned} x^+ &= x + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon y_0}{\alpha_s^2 \lambda} + \ln |1 + v^+| \right), \\ v^+ &= v + O(|y_0|^{-1} + |\varepsilon|), \\ s^+ &= s \cdot \text{sign}(y_0). \end{aligned}$$

При $\varepsilon = y_0^{-1} = 0$ это отображение имеет первый интеграл v .

С помощью сепаратрисного отображения легко получить утверждения о неинтегрируемости возмущенной системы. Действительно, предположим, что отображение T_ε аналитично и обладает вещественно-аналитическим первым интегралом. Несложно показать (см., например, [44]), что любой аналитический первый интеграл в нормальных координатах является функцией от y . Следовательно, любое интегрируемое отображение $\mathcal{M}_\varepsilon$ должно сохранять функцию y . Таким образом, согласно (3.1) необходимыми условиями интегрируемости возмущенного отображения T_ε являются равенства $\nu_\pm \equiv 0$ (ср. [45]).

1.2. Гамильтонова система с полутора степенями свободы. Рассмотрим гамильтонову систему с полутора степенями свободы в окрестности асимптотических поверхностей гиперболического периодического решения. В этом случае сепаратрисное отображение естественно определяется путем перехода к отображению за период, но может быть определено и непосредственно как отображение Пуанкаре в расширенном фазовом пространстве. А именно, рассмотрим гамильтонову систему

$$\dot{z}_1 = \partial H / \partial z_2, \quad \dot{z}_2 = -\partial H / \partial z_1, \quad H(z, t, \varepsilon) = H_0(z) + \varepsilon H_1(z, t, \varepsilon). \quad (3.2)$$

Здесь $z \in \mathbb{R}^2$, $t \in \mathbb{T}_t = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – время. При $\varepsilon = 0$ имеем систему с одной степенью свободы и гамильтонианом H_0 , которую будем называть невозмущенной. Предположим, что

- 1) невозмущенная система имеет гиперболическое положение равновесия σ , $dH_0|_{z=\sigma} = 0$;
- 2) сепаратрисы, выходящие из точки σ , образуют фигуру типа восьмерки, см. рис. 3.1.

Пусть $\lambda > 0$ – показатель Ляпунова гиперболического периодического решения $(z(t), t) = (\sigma, t)$ и $\Gamma_\pm(t)$ – сепаратрисные решения невозмущенной системы. Одну из петель восьмерки будем условно называть верхней, а другую –

нижней. Пусть $\Lambda^+, \Lambda^- \subset \mathbb{R}_z^2$ – кривые, трансверсальные верхней и нижней сепаратрисной петле соответственно. Пусть $g_\varepsilon^t: \mathbb{R}_z^2 \times \mathbb{T}_t \hookrightarrow$ – фазовый поток системы (3.2). Сепаратрисное отображение есть отображение Пуанкаре поверхности $\Delta = (\Lambda^+ \times \mathbb{T}_t) \cup (\Lambda^- \times \mathbb{T}_t)$ в расширенном фазовом пространстве $D \times \mathbb{T}_t$. Точнее, для любой точки $(z, t) \in \Delta$ положим

$$t_r(z) = \min\{t > 0 : g_\varepsilon^t(z) \in \Delta\}, \quad \Delta_\varepsilon^r = \{(z, t) \in \Delta : t_r(z) < +\infty\}.$$

Тогда по определению

$$\mathcal{M}_\varepsilon: \Delta_\varepsilon^r \rightarrow \Delta, \quad \mathcal{M}_\varepsilon(z) = g_\varepsilon^{t_r}(z).$$

Без ограничения общности можно считать, что сепаратрисная петля – нулевой уровень гамильтониана H_0 .

ТЕОРЕМА 3.2. *На поверхности Δ существуют координаты $(h, t, s) \in \mathbb{R} \times \mathbb{T} \times \mathbb{Z}_2$ такие, что*

- 1) $\Lambda^+ \times \mathbb{T}_t = \{s = +\}, \Lambda^- \times \mathbb{T}_t = \{s = -\}$;
- 2) $H_0(z) = \varepsilon h + O_2(\varepsilon)$;
- 3) t – время;
- 4) сепаратрисное отображение имеет вид $(h^+, t^+, s^+) = \mathcal{M}_\varepsilon(h, t, s)$,

$$\begin{cases} h^+ = h + I_s(t) + O(\varepsilon), \\ t^+ = t + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_s^2 \lambda} + \ln |h^+| \right), \\ s^+ = s \cdot \text{sign}(h^+), \end{cases} \quad (3.3)$$

где $\alpha_\pm > 0$ – константы, функции I_+ и I_- периодические и выражаются через интеграл Пуанкаре–Мельникова:

$$I_s(t) = - \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1\} \left(\Gamma_s \left(t - \frac{\ln \alpha_\pm}{\lambda} + \tau \right), \tau \right) d\tau.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.3. Теоремы 3.1 и 3.2 фактически равносильны друг другу. В самом деле, теорема 3.2 может быть получена, если применить теорему 3.1 к отображению за период $g_\varepsilon^t|_{t=1}$. Это сделано в §6 этой главы. Благодаря возможности вложения изотопного тождественному $2n$ -мерного симплектического отображения в поток гамильтоновой системы с $n + \frac{1}{2}$ степенями свободы (см. [46], где рассмотрен вещественно-аналитический случай; гладкий случай существенно проще) можно, наоборот, свести теорему 3.1 к теореме 3.2.

§ 2. Отображение склейки: определение

С этого пункта мы начинаем доказательство теоремы 3.1. Главным инструментом является отображение склейки. Ниже следует его определение.

Пусть $(q, p) = (q_\varepsilon, p_\varepsilon)$ – нормальные координаты отображения T_ε , определенные в теореме 2.1. В них отображение имеет вид

$$\mathcal{T}_\varepsilon(q, p) = (q \mathcal{M}_\varepsilon(pq), p / \mathcal{M}_\varepsilon(pq)), \quad (3.4)$$

где, как уже отмечалось ранее, $\sigma_\varepsilon = (0, 0)$ и $\mu_\varepsilon = \mathcal{M}_\varepsilon(0) > 1$.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.4. Далее мы считаем, что нормальные координаты выбраны таким образом, что внутри верхней петли “восьмерки” $q > 0$ и $p > 0$, см. рис. 3.3.

Нормальные координаты, первоначально определенные лишь в малой окрестности гиперболической точки, можно продолжить вдоль сепаратрис с помощью следующей индуктивной процедуры. Пусть координаты точки $z \in D$ известны и равны (q, p) . Тогда координаты точек $T(z)$ и $T^{-1}(z)$ определим как $\mathcal{T}(q, p)$ и $\mathcal{T}^{-1}(q, p)$ соответственно. Вдали от гиперболической точки σ_ε получаем, по крайней мере, два различных продолжения нормальных координат – вдоль устойчивой и неустойчивой сепаратрисы. Возникающее отождествление координат называется отображением склейки. Более формально эта конструкция выглядит следующим образом.

Рис. 3.3. Отображение склейки

Пусть $\mathcal{U}_\varepsilon$ – окрестность, в которой определены нормальные координаты (q, p) . Обозначим через $\mathcal{N}_\varepsilon: U_\varepsilon \rightarrow \mathcal{U}_\varepsilon$ отображение, задающее нормальные координаты, $U_\varepsilon \subset \mathbb{R}_{q,p}^2$. Зафиксируем положительные целые числа n_u и n_s . Пусть

$$U_\varepsilon^{n_s, n_u} = \bigcup_{-n_s \leq n \leq n_u} \mathcal{T}_\varepsilon^n(U), \quad \mathcal{U}_\varepsilon^{n_s, n_u} = \bigcup_{-n_s \leq n \leq n_u} T_\varepsilon^n(\mathcal{U}). \quad (3.5)$$

Продолжим отображение $\mathcal{N}$ на $U_\varepsilon^{n_s, n_u}$ так, что следующая диаграмма коммутативна:

$$\begin{array}{ccc} U_\varepsilon & \xrightarrow{\mathcal{T}_\varepsilon^n} & \mathcal{T}_\varepsilon^n(U_\varepsilon) \\ \mathcal{N}_\varepsilon \downarrow & & \downarrow \mathcal{N}_\varepsilon \\ \mathcal{U}_\varepsilon & \xrightarrow{T_\varepsilon^n} & T_\varepsilon^n(\mathcal{U}_\varepsilon) \end{array} \quad (3.6)$$

Это продолжение корректно определено, поскольку $\mathcal{N}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_\varepsilon = T_\varepsilon \circ \mathcal{N}_\varepsilon$ в U_ε .

При больших n_s и n_u отображение $\mathcal{N}_\varepsilon$ перестает быть инъективным. Выберем n_s и n_u так, чтобы отображение $\mathcal{N}_\varepsilon$ задавало двулистное накрытие фундаментальных областей $\Delta_\varepsilon^\pm$.

Обозначим через $\Delta_\varepsilon^{u\pm}$ и $\Delta_\varepsilon^{s\pm}$ прообразы областей $\Delta_\varepsilon^\pm$, лежащие в окрестности неустойчивых и устойчивых сепаратрис соответственно:

$$\begin{aligned}\Delta_\varepsilon^{u\pm} &\subset \{(q, p) : c < \pm q < c^{-1}, \text{ } p \text{ мало}\}, \\ \Delta_\varepsilon^{s\pm} &\subset \{(q, p) : q \text{ мало}, \text{ } c < \pm p < c^{-1}\}.\end{aligned}$$

Тогда определение отображения склейки имеет следующий вид:

$$\mathcal{G}_\varepsilon^\pm : \Delta_\varepsilon^{u\pm} \rightarrow \Delta_\varepsilon^{s\pm}, \quad \mathcal{G}_\varepsilon^\pm = (\mathcal{N}_\varepsilon|_{\Delta_\varepsilon^{s\pm}})^{-1} \circ \mathcal{N}_\varepsilon|_{\Delta_\varepsilon^{u\pm}}.$$

Если обозначить (q_u, p_u) и (q_s, p_s) нормальные координаты точки $z \in \Delta_\varepsilon^\pm$, полученные продолжением вдоль неустойчивой и устойчивой сепаратрисы соответственно: $\mathcal{N}_\varepsilon(q_u, p_u) = z$, $(q_u, p_u) \in \Delta_\varepsilon^{u\pm}$ и $\mathcal{N}_\varepsilon(q_s, p_s) = z$, $(q_s, p_s) \in \Delta_\varepsilon^{s\pm}$, то они отождествляются отображением склейки $\mathcal{G}_\varepsilon^\pm(q_u, p_u) = (q_s, p_s)$.

Имея явные формулы для $\mathcal{G}_\varepsilon^\pm$, динамику отображения T_ε в окрестности сепаратрис можно изучать в нормальных координатах. Действительно, нормальные координаты осуществляют гладкое отображение крестообразной области, изображенной слева на рис. 3.3, на окрестность сепаратрис симплектоморфизма T_ε . Пусть начальные условия заданы в нормальных координатах. Для построения траектории системы можно сначала применить несколько раз гиперболический поворот $\mathcal{T}_\varepsilon$. При этом итерации точки начнут удаляться вдоль “северо-восточного” или “юго-западного” рукава креста и в конце концов попадут в область определения одного из отображений склейки. После применения отображения $\mathcal{G}_\varepsilon^+$ или $\mathcal{G}_\varepsilon^-$ опять можно применять отображение $\mathcal{T}_\varepsilon$ и т.д. При этом ясно, что почти вся информация о динамике содержится в отображениях склейки, так как формулы для гиперболического поворота для различных систем имеют несущественные различия.

§ 3. Отображение склейки: формулы

ЛЕММА 3.5. Пусть C^4 -гладкая функция $F(q, p)$ – первый интеграл гиперболического поворота $\mathcal{T}(q, p) = (q\mathcal{M}(pq), p/\mathcal{M}(pq))$. Тогда

$$F(q, p) = F_0 + F_1 qp + O_2(qp), \quad F_0, F_1 = \text{const.} \quad (3.7)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.6. Если F – аналитическая функция переменных (q, p) , то, более того, $F(q, p) = \mathcal{F}(qp)$ [42].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 3.5. Очевидно, что $F = F_0 = \text{const}$ на сепаратрисах $q = 0$ и $p = 0$. Поэтому $F = F_0 + O(qp) = F_0 + qpG$. Поскольку F и qp – интегралы отображения $\mathcal{T}$, то G тоже первый интеграл. Поэтому $G = F_1 + O(qp)$. Отсюда следует (3.7).

Отображения склейки, соответствующие интегрируемым системам, выглядят довольно просто. А именно, справедливо следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.7. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда отображения склейки для отображения T_0 имеют вид $(q_s, p_s) = \mathcal{G}^\pm(q_u, p_u)$,

$$\begin{cases} q_s = \frac{q_u^2 p_u}{\alpha_\pm^2} + O_2(q_u p_u), \\ p_s = \frac{\alpha_\pm^2}{q_u} + O(q_u p_u), \end{cases} \quad (3.8)$$

где $\alpha_\pm$ – положительные постоянные.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\mathcal{G}^+(q_u, p_u) = (q_s, p_s)$. Тогда

$$F(q_s, p_s) = F(q_u, p_u), \quad dp_s \wedge dq_s = dp_u \wedge dq_u. \quad (3.9)$$

Из условия IV теоремы 3.1 следует, что $F_1 \neq 0$. Тогда

$$q_s p_s = q_u p_u + O_2(q_u p_u). \quad (3.10)$$

Подставляя равенство $q_s = \frac{1}{p_s}(q_u p_u + O_2(q_u p_u))$ в (3.9), получаем следующее уравнение в частных производных:

$$p_u \frac{\partial p_s}{\partial p_u} - q_u \frac{\partial p_s}{\partial q_u} = p_s(1 + O(q_u p_u)).$$

Решения $p_s = p_s(q_u, p_u)$, гладкие при $p_u = 0$, имеют вид $p_s = q_u^{-1}(a_0 + O(q_u p_u))$. Неравенство $a_0 > 0$ следует из принятого в замечании 3.4 соглашения о выборе нормальных координат, откуда получаем второе равенство (3.8). Первое равенство (3.8) теперь следует из (3.10). Предложение 3.7 доказано.

Отображения склейки для возмущенного отображения T_ε получается возмущением отображения (3.8).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.8. Пусть выполнены условия теоремы 3.1. Тогда отображения склейки отображения T_ε имеют вид $(q_s, p_s) = \mathcal{G}_\varepsilon^\pm(q_u, p_u)$,

$$\begin{cases} q_s = q_u \frac{q_u p_u + \varepsilon \nu_\pm(\ln |q_u| / \ln \mu)}{\alpha_\pm^2} + O_2(q_u p_u, \varepsilon), \\ p_s = \frac{\alpha_\pm^2}{q_u} + O(q_u p_u, \varepsilon), \end{cases} \quad (3.11)$$

где $\nu_\pm$ – периодические функции с периодом 1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, имеем

$$\mathcal{G}_\varepsilon^\pm(q_u, p_u) = \mathcal{G}_0^\pm(q_u, p_u) + \varepsilon(f_\pm(q_u, p_u, \varepsilon), g_\pm(q_u, p_u, \varepsilon)),$$

где $f_\pm, g_\pm$ – гладкие функции. Согласно (3.6) имеем $f_\pm(\mu q_u, 0, 0) = \mu f_\pm(q_u, 0, 0)$, где $\mu = \mathcal{M}_0(0)$. Положим

$$f_\pm(q_u, 0, 0) = q_u \frac{1}{\alpha_\pm^2} \nu_\pm(\ln |q_u| / \ln \mu).$$

Функции $\nu_{\pm}$ гладкие и периодические с периодом 1. Тогда

$$\begin{aligned}\mathcal{G}_{\varepsilon}^{\pm}(q_u, p_u) &= \mathcal{G}_0^{\pm}(q_u, p_u) + \varepsilon \left(q_u \frac{\nu_{\pm}(\ln |q_u| / \ln \mu)}{\alpha_{\pm}^2} + O(p_u), g_{\pm}(q_u, p_u, \varepsilon) \right) \\ &= \left(q_u \frac{q_u p_u + \varepsilon \nu_{\pm}(\ln |q_u| / \ln \mu)}{\alpha_{\pm}^2}, \frac{\alpha_{\pm}^2}{q_u} \right) + (O_2(q_u p_u, \varepsilon), O(q_u p_u, \varepsilon)).\end{aligned}$$

Предложение 3.8 доказано.

§ 4. Сепаратрисное отображение

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.1. На областях $\Delta_{\varepsilon}^{\pm}$ имеются две системы координат (q_s, p_s) и (q_u, p_u) , заданные отображениями $\mathcal{N}_{\varepsilon}|_{\Delta_{\varepsilon}^{s\pm}}$ и $\mathcal{N}_{\varepsilon}|_{\Delta_{\varepsilon}^{u\pm}}$ соответственно. В последней системе координат сепаратрисное отображение имеет вид

$$\mathcal{SM}_{\varepsilon} = \mathcal{T}_{\varepsilon}^{n_r} \circ \mathcal{G}_{\varepsilon}, \quad (3.12)$$

где, напомним, $n_r(z)$ – количество итераций точки $z \in \Delta_{\varepsilon}^r$ при отображении T_{ε} до первого возвращения в Δ_{ε} . В нормальных координатах $n_r(q, p)$, где $(q, p) \in \Delta_{\varepsilon}^{s\pm}$, это количество итераций отображения $\mathcal{T}_{\varepsilon}$ до попадания точки в области $\Delta_{\varepsilon}^{u\pm}$.

Вне устойчивой сепаратрисы $\{q = 0\}$ определены следующие переменные:

$$\begin{aligned}x &= \frac{\ln |q|}{\ln \mathcal{M}_{\varepsilon}(qp)} = \frac{\ln |q|}{\lambda} (1 + O(qp, \varepsilon)), \\ y &= \varepsilon^{-1} \int_0^{qp} \ln \mathcal{M}_{\varepsilon}(\xi) d\xi = \varepsilon^{-1} qp (\lambda + O(qp, \varepsilon)).\end{aligned} \quad (3.13)$$

Легко проверить, что $dy \wedge dx = \varepsilon^{-1} dp \wedge dq$. В переменных (x, y) гиперболический поворот $\mathcal{T}_{\varepsilon}$ имеет вид

$$\mathcal{T}_{\varepsilon}(x, y) = (x + 1, y). \quad (3.14)$$

Поэтому отображение $\mathcal{N}_{\varepsilon}|_{\Delta_{\varepsilon}^{u\pm}}(x, y)$ задает гладкие координаты $(x \bmod 1, y)$ на цилиндрах $\overline{\Delta}_{\varepsilon}^{\pm}/\sim$. Чтобы восстановить информацию о знаке переменной q (утраченную в (3.13)), добавим знак $s = \text{sign}(q)$ к системе координат (x, y) . При этом если $s = +$ (соответственно $s = -$), то $(x, y) \in \Delta_{\varepsilon}^{u+}$ (соответственно $(x, y) \in \Delta_{\varepsilon}^{u-}$). Сепаратрисное отображение записывается в координатах $(x \bmod 1, y, s)$.

Считая x определенным по модулю 1, из (3.12) и (3.14) получаем, что $\mathcal{SM}_{\varepsilon}$ определяется только отображением склейки $\mathcal{G}_{\varepsilon}$. Остается записать отображение склейки в переменных (x, y) .

Обращая равенства (3.13), имеем:

$$qp = \varepsilon y \left(\frac{1}{\lambda} + O(\varepsilon) \right), \quad q = s e^{\lambda x (1 + O(\varepsilon))}.$$

Пусть $(x_u, y_u) \in \overline{\Delta}_\varepsilon^{u\pm}$ и $(x_s, y_s) = \mathcal{G}_\varepsilon^\pm(x_u, y_u)$. Из предложения (3.11) последовательно получаем:

$$\begin{aligned} q_s p_s &= q_u p_u + \varepsilon \nu_\pm (\ln |q_u| / \ln \mu) + O_2(q_u p_u, \varepsilon) = \frac{1}{\lambda} \varepsilon y_u + \varepsilon \nu_\pm(x_u) + O_2(\varepsilon), \\ y_s &= \varepsilon^{-1} q_s p_s (\lambda + O(q_s p_s, \varepsilon)) = y_u + \lambda \nu_\pm(x_u) + O(\varepsilon), \\ x_s &= \frac{\ln |q_s p_s / p_s|}{\lambda} (1 + O(q_s p_s, \varepsilon)) = \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln |q_u| + \ln \frac{\varepsilon}{\alpha_\pm^2 \lambda} + \ln(1 + O(\varepsilon)) \right) \\ &= x_u + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_\pm^2 \lambda} + \ln |y_s| + O(\varepsilon) \right). \end{aligned}$$

Также заметим, что $\text{sign}(q_s) = \text{sign}(y_s) \cdot \text{sign}(q_u)$. Окончательно, обозначая $\mathcal{M}_\varepsilon(x, y, s) = (x^+, y^+, s^+)$, получаем

$$\begin{cases} x^+ = x + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_s^2 \lambda} + \ln |y^+| \right), \\ y^+ = y + \lambda \nu_s(x) + O(\varepsilon), \\ s^+ = s \cdot \text{sign}(y^+). \end{cases} \quad (3.15)$$

Теорема 3.1 доказана.

§ 5. Интеграл Пуанкаре–Мельникова

В этом параграфе мы покажем, как найти в явном виде сепаратрисное отображение в главном приближении. Точнее, мы получим формулы для параметров $\alpha_\pm$ и функций $\nu_\pm$. Доказательства имеются в [47], см. также [44].

Пусть F – первый интеграл отображения T_0 , $F(\sigma) = 0$ и критическая точка σ функции F невырождена. Пусть $\Gamma^\pm: \mathbb{R} \rightarrow \{z \in D : F(z) = 0\}$ – верхняя и нижняя петли невозмущенной сепаратрисы, параметризованные естественным образом:

$$T_0 \circ \Gamma^\pm(t) = \Gamma^\pm(t + 1). \quad (3.16)$$

В примерах часто функции $\Gamma^\pm$ удается выписать в явном виде.

В окрестности точки σ можно ввести симплектические координаты (u, v) такие, что кривые $\Gamma^\pm(t)$ удовлетворяют соотношениям

$$\begin{aligned} (u, v) &= (c_u^\pm \mu^t + O(\mu^{2t}), O(\mu^{2t})) \quad \text{при } t \rightarrow -\infty, \\ (u, v) &= (O(\mu^{-2t}), c_s^\pm \mu^{-t} + O(\mu^{-2t})) \quad \text{при } t \rightarrow +\infty, \end{aligned} \quad (3.17)$$

где $c_{s,u}^+ > 0$ и $c_{s,u}^- < 0$. Эти координаты можно получить линейной заменой из любых симплектических координат, определенных в окрестности неподвижной точки σ . Постоянные $c_{s,u}^\pm$ определены неоднозначно, но только одна из них может быть выбрана произвольным образом.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.9. (а) Величины $c_s^+ c_u^+$, $c_s^- c_u^-$, c_s^+ / c_s^- не зависят от выбора переменных (u, v) .

(б) Величины $c_s^+ c_u^+$, $c_s^- c_u^-$ сохраняются при заменах параметризаций $t \mapsto t + \widehat{c}^\pm$ на кривых $\Gamma^\pm$.

(в) $\alpha_\pm^2 = c_s^\pm c_u^\pm$.

СЛЕДСТВИЕ 3.10. *Величины $\alpha_{\pm}$ вычисляются, если известна естественная параметризация невозмущенной сепаратрисы.*

Функции $\nu_{\pm}$ можно получить из дискретного аналога интеграла Пуанкаре–Мельникова. Положим

$$w(T_0(z)) = \frac{d}{d\varepsilon} \Big|_{\varepsilon=0} T_{\varepsilon}(z), \quad \nu_{\pm}^*(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} dF \cdot w(\Gamma^{\pm}(t+n)), \quad (3.18)$$

где выражение $dF \cdot w(A)$ обозначает применение ковектора dF к вектору w в точке $A \in D$.

Так как критическая точка σ невырождена, выполняется равенство

$$F(u, v) = F_0 uv + O_3(u, v), \quad F_0 \neq 0.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.11. *Справедливы следующие соотношения:*

$$\nu_{\pm}(t) = F_0^{-1} \nu_{\pm}^*(t - \ln \alpha_{\pm} / \ln \mu).$$

§ 6. Гамильтонова система

Здесь мы выведем теорему 3.2 из теоремы 3.1.

Пусть симплектоморфизм T_{ε} есть отображение за период гамильтоновой системы с гамильтонианом $H(z, t, \varepsilon)$. Нормальные координаты $(q, p) = (q_{\varepsilon}, p_{\varepsilon})$ отображения T_{ε} из теоремы 2.1 порождают нормальные координаты для гамильтоновой системы (см. теорему 2.3). Действительно, достаточно положить нормальные координаты точки $g_{\varepsilon}^t(z)$ равными $(q \mathcal{M}_{\varepsilon}^t, p \mathcal{M}_{\varepsilon}^{-t})$, где (q, p) – нормальные координаты точки z , g_{ε}^t – фазовый поток гамильтоновой системы. В нормальных координатах фазовый поток имеет вид

$$g_{\varepsilon}^t(q, p) = (q e^{\mathcal{H}_{\varepsilon}'(pq)t}, p e^{-\mathcal{H}_{\varepsilon}'(pq)t}). \quad (3.19)$$

Сравнивая $g_{\varepsilon}^t|_{t=1}$ и (2.1), получим, что функции $\mathcal{M}_{\varepsilon}(pq)$ и $\mathcal{H}_{\varepsilon}(pq)$ из теорем 2.1 и 2.3 связаны равенством

$$\frac{d\mathcal{H}_{\varepsilon}(\xi)}{d\xi} = \ln \mathcal{M}_{\varepsilon}(\xi). \quad (3.20)$$

Поскольку невозмущенный гамильтониан H_0 не зависит от времени, то зависимость от времени в нормализующей замене координат присутствует только в членах порядка ε . Поэтому новый гамильтониан $\mathcal{H}_{\varepsilon} = H_{\varepsilon} + O(\varepsilon)$.

Вне устойчивой сепаратрисы $\{q = 0\}$ на $\mathbb{R}_{q,p}^2$ введем координаты “энергия–время” (h, t) . Положим $t = 0$ при $q = \pm 1$. Считая $\mathcal{H}_{\varepsilon}(0) = 0$, из (3.20) и (3.19) имеем:

$$t = \frac{\ln |q_{\varepsilon}|}{\ln \mathcal{M}_{\varepsilon}}, \quad h = \varepsilon^{-1} \mathcal{H}_{\varepsilon} = \varepsilon^{-1} \int_0^{q_{\varepsilon} p_{\varepsilon}} \ln \mathcal{M}_{\varepsilon}(\xi) d\xi.$$

Таким образом, координаты (h, t) совпадают с координатами (y, x) (см. (3.13)). Поэтому из (3.15) получаем $\mathcal{M}_{\varepsilon}(h, t, s) = (h^+, t^+, s^+)$:

$$\begin{cases} h^+ = h + \lambda \nu_s(t) + O(\varepsilon), \\ t^+ = t + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_s^2 \lambda} + \ln |h^+| \right), \\ s^+ = s \cdot \text{sign}(h^+). \end{cases}$$

Из предложения 3.11 получаем следующее

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 3.12.

$$\nu_{\pm}(t) = \frac{1}{\lambda} \nu_{\pm}^*(t - \ln \alpha_{\pm} / \ln \mu),$$

а функции $\nu_{\pm}^*$ можно представить в виде интеграла Пуанкаре–Мельникова:

$$-\nu_{\pm}^*(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{H_0, H_1|_{\varepsilon=0}\}(\Gamma^{\pm}(t + \xi), \xi) d\xi. \quad (3.21)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $z_{\varepsilon}(t) = z_0(t) + \varepsilon z'(t) + O(\varepsilon^2)$ – решение системы с гамильтонианом H и начальными условиями $z_{\varepsilon}(0) = (u, v)$. Тогда

$$T_{\varepsilon}(u, v) = z_{\varepsilon}(1). \quad (3.22)$$

Ниже будем считать, что точка (u, v) не зависит от ε . Тогда, дифференцируя (3.22) по ε в точке $\varepsilon = 0$, получаем:

$$w(T_0(u, v)) = z'(t_0). \quad (3.23)$$

Дифференцируя тождество $\frac{d}{dt} H_0(z_{\varepsilon}(t)) = \{H_1, H_0\}(z_{\varepsilon}(t), t, \varepsilon)$ по ε и полагая $\varepsilon = 0$, получаем следующее равенство:

$$\frac{d}{dt} (dH_0(z_0(t)) \cdot z'(t)) = \varepsilon \{H_1, H_0\}(z_0(t)). \quad (3.24)$$

Положим $z_0(t) = \Gamma^+(t_0 + t)$. Интегрируя (3.24), имеем:

$$\begin{aligned} dH_0(\Gamma^+(t_0 + 1)) \cdot z'(1) - dH_0(\Gamma^+(t_0)) \cdot z'(0) \\ = \int_0^1 \{H_1, H_0\}(\Gamma^+(t_0 + t), t) dt. \end{aligned}$$

Пользуясь равенством (3.23) и тем, что $z'(0) = 0$, получаем:

$$dH_0 \cdot w(\Gamma^+(t_0 + 1)) = \int_0^1 \{H_1, H_0\}(\Gamma^+(t_0 + \xi), \xi) d\xi.$$

Соответствующее равенство для Γ^- находится аналогично. Из этих равенств и определения функции $\nu_{\pm}^*$ (3.18) следует предложение 3.12.

§ 7. Сепаратрисное отображение для маятника

Рассмотрим в качестве примера маятник, точка подвеса которого периодически колеблется вдоль вертикали. Гамильтониан системы имеет вид

$$H(\hat{u}, \hat{v}, t, \varepsilon) = \hat{v}^2/2 + \Omega^2 \cos \hat{u} + \varepsilon \theta(\omega t) \cos \hat{u}. \quad (3.25)$$

Здесь $\hat{u} = \hat{u} \bmod 2\pi$ – угол между маятником и вертикалью, $\hat{v}$ – соответствующий импульс, $\Omega > 0$ – “внутренняя частота” системы (Ω^2 равна ускорению силы

тяжести, деленному на длину маятника), ω – частота колебаний точки подвеса и параметр ε пропорционален амплитуде колебаний, умноженной на ω^2 . Закон колебаний точки подвеса определяется 2π -периодической функцией θ . Предположим, что параметр ε мал, а другие параметры в системе – порядка единицы.

Симплектической заменой переменных сделаем систему 1-периодической. Пусть новое время $\tau = \omega t / (2\pi)$ и новый гамильтониан $\mathcal{H} = 2\pi H / \omega$. Отображение Пуанкаре в этой системе имеет гиперболическую неподвижную точку $\hat{u} = \hat{v} = 0$. Несложно вычислить мультипликатор: $\mu = e^{2\pi\Omega/\omega}$. Тогда $\lambda = \ln \mu = 2\pi\Omega/\omega$. Сепаратрисы $\Gamma^\pm$ имеют вид:

$$(\hat{u}, \hat{v}) = (4 \operatorname{arctg} e^{\pm 2\pi\Omega\tau/\omega}, \pm 2\Omega / \operatorname{ch}(2\pi\Omega\tau/\omega)).$$

Переменные (u, v) (см. (3.17)) – следующие:

$$u = \hat{u}\sqrt{\Omega/2} + \hat{v}/\sqrt{2\Omega}, \quad v = -\hat{u}\sqrt{\Omega/2} + \hat{v}/\sqrt{2\Omega}.$$

Получаем: $c_s^+ = c_u^+ = 4\sqrt{2\Omega}$ и $c_s^- = c_u^- = -4\sqrt{2\Omega}$. Следовательно, согласно предложению 3.9, $\alpha_\pm^2 = 32\Omega$.

С помощью предложения 3.12 получаем:

$$\nu_\pm^*(\tau) = \left(\frac{2\pi}{\omega}\right)^2 \int_{-\infty}^{+\infty} \theta(2\pi\xi) (\hat{v} \sin \hat{u})|_{\Gamma^\pm(\tau+\xi)} d\xi.$$

Прямые вычисления приводят к равенству

$$\nu_\pm^*(\tau) = -\frac{4\pi^2 i \omega}{\Omega^2} \sum_{m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{m^2 \theta_m}{\operatorname{sh}(\pi m \omega / (2\Omega))} e^{-2\pi i m \tau}, \quad (3.26)$$

где разложение Фурье функции θ имеет вид

$$\theta(s) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \theta_m e^{ims}.$$

В частности, $\nu_\pm^* \not\equiv \text{const}$ при $\theta \not\equiv \text{const}$ и, следовательно, при $\theta \not\equiv \text{const}$ возмущенная система не имеет аналитического первого интеграла для любого малого $\varepsilon \neq 0$.

§ 8. Сепаратрисное отображение в общем случае

Целью настоящего параграфа является указание единой схемы для построения сепаратрисного отображения в системах, рассмотренных в § 1 этой главы и в тех системах T_ε , где T_0 является тождественным отображением и поэтому при $\varepsilon = 0$ гиперболическая неподвижная точка отсутствует. Стандартный пример систем второго типа рассмотрен во введении (§ 1), где речь идет о разрушении резонансной кривой интегрируемого отображения. Другим примером является маятник с быстро колеблющейся точкой подвеса.

В системах второго типа мультипликатор μ_ε гиперболической неподвижной точки σ_ε стремится к нулю при $\varepsilon \searrow 0$, а расщепление сепаратрис экспоненциально мало по ε . Методами теории усреднения (см. [48]) возмущенную систему удастся приблизить интегрируемым отображением, которое также имеет

гиперболическую неподвижную точку. Причем в случае аналитических симплектоморфизмов разность между этими системами можно сделать экспоненциально малой по ε . Далее эта разность характеризуется параметром $\delta = \delta_\varepsilon$. Следовательно, если рассматривать возмущенную систему как деформацию интегрируемой по параметру δ , то конструкция сепаратрисного отображения аналогична изложенному выше случаю.

Пусть T_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, – гладкое семейство двумерных симплектоморфизмов, близких к интегрируемому T_0 . Предположим, что

(А) существует гладкое семейство интегрируемых отображений $\tilde{T}_\varepsilon$, $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, для которых выполнены условия теоремы 3.1, и таких, что $|T_\varepsilon - \tilde{T}_\varepsilon| \leq \delta_\varepsilon$, где $\delta_\varepsilon \rightarrow 0$ при $\varepsilon \rightarrow 0$.

Если само отображение T_0 удовлетворяет условиям теоремы 3.1, то можно взять $\tilde{T}_\varepsilon \equiv T_0$ и $\delta_\varepsilon = \varepsilon$.

Поскольку отображения $\tilde{T}_\varepsilon$ удовлетворяют условиям теоремы 3.1, то отображения склейки для них имеют вид (3.8), где $\alpha_\pm = \alpha_\pm(\varepsilon)$. Тогда отображения склейки для T_ε имеют вид:

$$\begin{cases} q_s = \frac{q_u p_u}{\alpha_\pm^2(\varepsilon)} + \delta_\varepsilon q_u f_\pm(q_u, p_u, \varepsilon) + O_2(q_u p_u), \\ p_s = \frac{\alpha_\pm^2(\varepsilon)}{q_u} + \delta_\varepsilon p_u g_\pm(q_u, p_u, \varepsilon) + O_1(q_u p_u). \end{cases} \quad (3.27)$$

Здесь $(q, p) = (q(\varepsilon), p(\varepsilon))$ – нормальные координаты отображений T_ε в окрестности гиперболической неподвижной точки σ_ε , (q_u, p_u) и (q_s, p_s) – продолженные координаты вдоль неустойчивой и устойчивой сепаратрис σ_ε соответственно.

Пусть $\mu_\varepsilon = \mathcal{M}_\varepsilon(0)$ – мультипликатор гиперболической неподвижной точки σ_ε отображения T_ε , $\mathcal{M}_\varepsilon(qp)$ – функция, задающая T_ε в нормальных координатах (см. теорему 2.1). Положим

$$f_\pm(q, 0, \varepsilon) = \alpha_\pm^{-2} \hat{\nu}_\pm(\ln |q| / \ln \mu_\varepsilon, \varepsilon). \quad (3.28)$$

Функции $\hat{\nu}_\pm$ периодичны по первому аргументу с периодом единица.

Далее мы предполагаем, что выполнено следующее условие.

$$(B) \lim_{\varepsilon \searrow 0} \frac{\delta_\varepsilon}{\ln \mu_\varepsilon} = 0.$$

Вводя симплектические координаты (x, y) :

$$\begin{aligned} x &= \frac{\ln |q|}{\ln \mathcal{M}_\varepsilon(qp)} = \frac{\ln |q|}{\ln \mu_\varepsilon} (1 + O_1(qp)), \\ y &= \delta_\varepsilon^{-1} \int_0^{qp} \mathcal{M}_\varepsilon(\xi) d\xi = \delta_\varepsilon^{-1} qp \ln \mu_\varepsilon (1 + O_1(qp)), \end{aligned} \quad (3.29)$$

и добавляя к ним индекс $s = \text{sign}(q)$, получаем следующие формулы для сепаратрисного отображения: $\mathcal{S}_\varepsilon(x, y, s) = (x^+, y^+, s^+)$,

$$\begin{cases} x^+ = x + \frac{1}{\ln \mu_\varepsilon} \left[\ln \frac{\delta_\varepsilon}{\alpha_s^2 \ln \mu_\varepsilon} + \ln |y^+ + \delta_\varepsilon \ln \mu_\varepsilon \cdot O(1 + y / \ln \mu_\varepsilon)^2| \right], \\ y^+ = y + \ln \mu_\varepsilon \cdot \hat{\nu}_s(x, \varepsilon) + \delta_\varepsilon \ln \mu_\varepsilon \cdot O(1 + y / \ln \mu_\varepsilon)^2, \\ s^+ = s \text{sign}(y^+). \end{cases} \quad (3.30)$$

Также мы предположим, что

(C) функции $\hat{\nu}_{\pm}$ имеют вид

$$\hat{\nu}_{\pm}(\xi, \varepsilon) = \nu_{\pm}(\xi) + o(1) \quad \text{при} \quad \varepsilon \rightarrow 0, \quad (3.31)$$

где функции $\nu_{\pm}$ не обращаются тождественно в нуль.

Неравенство $\nu_{\pm} \neq 0$ является условием общего положения. Как и следовало ожидать, формулы (3.30) в “стандартной” ситуации $\mu_0 > 1$, $\delta_{\varepsilon} = \varepsilon$, $y \sim 1$ совпадают с (3.1).

Глава 4. Сепаратрисное отображение Шильникова

В этой главе мы получим формулы сепаратрисного отображения Шильникова. Это отображение определяет динамику отображения двумерной области с гиперболической неподвижной точкой только в окрестности одной гомоклинической траектории, но при этом не требуется какой-либо близости отображения к интегрируемому. Впервые подобное отображение появилось в [2], где оно использовалось для построения бесконечного множества периодических решений для произвольных двумерных отображений с гиперболической неподвижной точкой в окрестности гомоклинической траектории. Имеется ряд обобщений на многомерный случай. В главе 5 обсуждается сепаратрисное отображение в задаче Мезера, являющееся обобщением сепаратрисного отображения Шильникова.

Здесь мы рассмотрим только консервативный случай, т.е. случай симплектических диффеоморфизмов двумерной области. Нетрудно заметить, что аналогичная конструкция проходит и в общей ситуации.

§ 1. Формулы

Рассмотрим гладкий симплектоморфизм $T: D \rightarrow D$, $D \subset \mathbb{R}^2$, удовлетворяющий следующим условиям:

- 1) T имеет гиперболическую неподвижную точку σ ,
- 2) сепаратрисы Γ^u и Γ^s точки σ пересекаются в точке γ .

Таким образом, система имеет гомоклиническое решение $\{T^n(\gamma)\}_{n \in \mathbb{Z}}$, $T^n(\gamma) \rightarrow \sigma$ при $n \rightarrow \pm\infty$. Это гомоклиническое решение называется трансверсальным, если сепаратрисы Γ^u и Γ^s пересекаются трансверсально в точке γ . Пусть $\mu > 0$ – мультипликатор неподвижной точки σ и $\lambda = \ln \mu$.

Пусть Δ – малая окрестность точки γ такая, что $T(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$. Сепаратрисное отображение в рассматриваемом случае мы определим как отображение первого возвращения для области Δ . Однако формулы для него удастся записать лишь для меньшей области Δ_1 , в которой все точки имеют одинаковый тип возвращения в Δ . А именно, точки из этой области, выходя из области Δ , движутся вдоль устойчивой сепаратрисы, попадают в окрестность неподвижной точки σ и движутся вдоль неустойчивой сепаратрисы, пока снова не попадут в Δ (см. рис. 4.1).

Положим

$$n_r(z) = \min\{n > 0 : T^n(z) \in \Delta\} \quad \text{и} \quad \Delta_r = \{z \in \Delta : n_r < +\infty\},$$

т.е. множество Δ_r состоит из точек окрестности Δ , которые под действием T возвращаются в эту окрестность. Сепаратрисное отображение имеет вид:

$$\mathcal{M}: \Delta_r \rightarrow \Delta, \quad \mathcal{M}(z) = T^{n_r}(z).$$

ТЕОРЕМА 4.1. *Существуют (достаточно малая) окрестность Δ точки γ и симплектические координаты (x, y) такие, что*

- 1) $\Delta = \{(x, y) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R} : x, y \text{ малы}\}$ ⁴;
- 2) $\gamma = (x = 0, y = 0)$, $\{y = 0\} \subset \Gamma^u \cap \Delta$;
- 3) *существует гладкое отображение $(x, y) \mapsto (x^+, y^+)$ ⁵,*

$$\begin{cases} x^+ = x + x_0 + \frac{1}{\lambda} \ln y^+ + O_1(y^+ \ln y^+) + O_1(x, y), \\ y^+ = ax + by + O_2(x, y), \end{cases} \quad (4.1)$$

которое совпадает с сепаратрисным отображением $\mathcal{M}$ на счетном наборе Δ_1 областей, накапливающихся к кривой $\{y^+ = 0\} \subset \Gamma^s \cap \Delta$:

$$\Delta_1 = \{(x, y) \in \Delta : (x^+, y^+) \in \Delta, y^+ > 0\}, \quad \mathcal{M}|_{\Delta_1} = (4.1)|_{\Delta_1};$$

здесь x_0, a, b – некоторые константы;

- 4) сепаратрисы Γ^u и Γ^s пересекаются трансверсально в точке γ тогда и только тогда, когда $a \neq 0$;
- 5) для $z = (x, y) \in \Delta_1$ количество итераций до первого возвращения в Δ

$$n_r(z) = \left\lceil -x_0 - \frac{1}{\lambda} \ln y^+ \right\rceil,$$

где $[X]$ обозначает округление числа X до целого ⁶.

Рис. 4.1. Сепаратрисное отображение Шильникова

⁴Переменная x – угловая, выражение: “ x мало” следует понимать как близость к точке $x = 0$ на окружности.

⁵Функция $x^+(x, y)$ определена при $y^+(x, y) > 0$. Величины x и $O_1(x, y)$ в правой части первого уравнения (4.1) имеют одинаковый порядок малости. Такой вид уравнения удобен, если считать, что $x \in \mathbb{R}$ и близок к целым числам.

⁶ $[X] = [X - \frac{1}{2}]$, где справа квадратные скобки обозначают обычную целую часть числа.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. (1) В случае если T близко к интегрируемому, сепаратрисное отображение (4.1) совпадает с сепаратрисным отображением Заславского (3.1) в окрестности гомоклинической точки $\{(x, y) : y = 0, y^+ = 0\}$.

(2) Множество Δ_1 не инвариантно относительно сепаратрисного отображения и, вообще говоря, не содержит инвариантных подобластей. Траектории, описываемые отображением (4.1), определены лишь на канторовом множестве $\bigcap_{n \in \mathbb{Z}} \mathcal{LM}^n(\Delta_1)$ меры нуль.

§ 2. Доказательство

Согласно теореме 2.1, в малой окрестности гиперболической неподвижной точки можно ввести нормальные координаты (q, p) , в которых T имеет вид

$$\mathcal{T} : (q, p) \mapsto (q \cdot \mathcal{M}(pq), p / \mathcal{M}(pq)) \quad (4.2)$$

и $\sigma = (q = 0, p = 0)$. Как и в § 2 главы 3, эти координаты можно продолжить вдоль сепаратрис, так что в продолженных координатах T также имеет вид (4.2). Тогда в окрестности точки γ имеется, по крайней мере, две системы координат (q_u, p_u) и (q_s, p_s) , полученные продолжением нормальных координат вдоль неустойчивой Γ^u и устойчивой Γ^s сепаратрис соответственно. Пусть

$$\gamma = (q_u = q_0, p_u = 0) = (q_s = 0, p_s = p_0), \quad q_0, p_0 = \text{const.}$$

Без ограничения общности можно считать $q_0, p_0 > 0$. Эти координаты отождествляются отображением склейки $\mathcal{G}$:

$$\mathcal{G} : \{(q_u, p_u) : q_u - q_0, p_u \text{ малы}\} \rightarrow \{(q_s, p_s) : q_s, p_s - p_0 \text{ малы}\}. \quad (4.3)$$

Имеем $\mathcal{G}(q_u = q_0, p_u = 0) = (q_s = 0, p_s = p_0)$, следовательно,

$$\begin{aligned} (q_s, p_s) &= \mathcal{G}(q_u, p_u), \\ \begin{cases} q_s = O_1(q_u - q_0, p_u) = \hat{a}(q_u - q_0) + \hat{b}p_u + O_2(q_u - q_0, p_u), \\ p_s = p_0 + O_1(q_u - q_0, p_u), \end{cases} \end{aligned} \quad (4.4)$$

где $\hat{a}$ и $\hat{b}$ – некоторые константы.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 4.3. *Сепаратрисы Γ^u и Γ^s пересекаются трансверсально в точке γ тогда и только тогда, когда $\hat{a} \neq 0$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим в окрестности точки γ отрезки сепаратрис Γ^s и Γ^u , на которых лежит эта точка. Тогда в координатах (q_s, p_s) первый задается равенством $q_s = 0$, а второй ($p_u = 0$) задается параметрически:

$$q_s = \hat{a}(q_u - q_0) + O_2(q_u - q_0), \quad p_s = p_0 + O_1(q_u - q_0).$$

Следовательно, касательные к этим кривым не совпадают тогда и только тогда, когда $\hat{a} \neq 0$.

Сепаратрисное отображение получается из отображения склейки (4.4) если в $\mathbb{R}_{q,p}^2$ отождествить координаты точек (q_s, p_s) и (q_u, p_u) , связанные соотношениями

$$q_u = \mathcal{M}^{n_r} q_s, \quad p_u = \mathcal{M}^{-n_r} p_s. \quad (4.5)$$

Введем следующие симплектические координаты:

$$\begin{aligned} y &= \int_0^{qp} \ln \mathcal{M}(\xi) d\xi = \lambda qp + O_2(qp), \\ x &= \frac{\ln(q/q_0)}{\ln \mathcal{M}} = \frac{\ln(q/q_0)}{\lambda} (1 + O_1(qp)). \end{aligned} \quad (4.6)$$

Будем обозначать (x_u, y_u) и (x_s, y_s) координаты, соответствующие координатам (q_u, p_u) и (q_s, p_s) . Сепаратрисное отображение записывается в координатах (x_u, y_u) , в которых $\Delta = \{(x_u, y_u) : x_u, y_u \text{ малы}\}$.

В переменных (x, y) отождествление (4.5) принимает вид $x_u = x_s \bmod 1$. Для доказательства теоремы 4.1 остается записать отображение склейки в переменных (x, y) и затем положить x определенным по модулю 1.

Обращая равенства (4.6), имеем:

$$qp = \frac{1}{\lambda} y + O_2(y), \quad q = q_0 e^{\lambda x (1 + O_1(y))}.$$

Пусть $(x_s, y_s) = \mathcal{G}(x_u, y_u)$, $(x_u, y_u) \in \{q_u - q_0, p_u \text{ малы}\}$. Тогда, используя (4.4), последовательно получаем

$$\begin{aligned} q_u - q_0 &= \lambda q_0 x_u + O_2(x_u, y_u), & p_u &= \frac{1}{\lambda q_0} y_u + O_2(x_u, y_u), \\ p_s &= p_0 + O_1(x_u, y_u), & q_s &= \frac{1}{\lambda p_0} y_s (1 + O_1(x_u, y_u)), \\ y_s &= a x_u + b y_u + O_2(x_u, y_u), & x_s &= \frac{\ln(q_s/q_0)}{\lambda} (1 + O_1(y_s)), \end{aligned}$$

где $a = \lambda^2 p_0 q_0 \hat{a} \neq 0$, $b = \lambda p_0 \hat{b}/q_0$. Имеем:

$$\begin{aligned} x_s &= x_0 + \frac{1}{\lambda} \ln y_s + O(y_s \ln y_s) + O_1(x_u, y_u), \\ y_s &= a x_u + b y_u + O_2(x_u, y_u), \end{aligned}$$

где $x_0 = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{1}{\lambda p_0 q_0}$.

Количество итераций точки с координатами (x_u, y_u) до первого возвращения в Δ определяется из условия: $x_s + n_r$ — мало. Отсюда получим $n_r(x_u, y_u) = \left[-x_0 - \frac{1}{\lambda} \ln y_s \right]$.

Теперь, рассматривая x как угловую переменную по модулю 1, окончательно получаем $(x^+, y^+) = \mathcal{SM}(x, y)$,

$$\begin{cases} x^+ = x + a_0 + \frac{1}{\lambda} \ln y^+ + O(y^+ \ln y^+) + O_1(x, y), \\ y^+ = a x + b y + O_2(x, y). \end{cases}$$

Теорема 4.1 доказана.

Глава 5. Сепаратрисное отображение в задаче Мезера

В этой главе мы получим формулы для сепаратрисного отображения задачи Мезера (см. § 4 главы 1). В главе 9 мы воспользуемся этими формулами для доказательства теоремы 1.5.

§ 1. Определение

Рассмотрим гамильтонову систему $(\mathcal{M}, \Omega, \mathcal{H})$ с двумя с половиной степенями свободы, где $\mathcal{M}$ – гладкое симплектическое многообразие, $\dim \mathcal{M} = 4$, Ω – симплектическая структура, гамильтониан $\mathcal{H} \in C^{r+1}(\mathcal{M} \times \mathbb{T})$, $r \geq 13$, имеет вид:

$$\mathcal{H}(\mathcal{Z}, t) = \mathcal{H}_0(\mathcal{Z}) + \mathcal{H}_1(\mathcal{Z}, t), \quad \mathcal{Z} \in \mathcal{M}, \quad t \in \mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}. \quad (5.1)$$

Пусть $\mathcal{G}^\mu: \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ – однопараметрическая группа диффеоморфизмов фазового пространства. Предположим, что

$$\mathcal{H}_0 \circ \mathcal{G}^\mu = e^{2\mu} \mathcal{H}_0, \quad \mathcal{H}_1 \circ \mathcal{G}^\mu = \mathcal{H}_1, \quad (\mathcal{G}^\mu)^* \Omega = e^\mu \Omega. \quad (5.2)$$

Ниже предполагаем, что $\{\mathcal{H}_0 = 1\} \neq \emptyset$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.1. Функцию $\mathcal{F}: \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{R}$ будем называть $\mathcal{G}^\mu$ -однородной степени k , если

$$\mathcal{F} \circ \mathcal{G}^\mu = e^{k\mu} \mathcal{F}.$$

Таким образом, функции $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ являются $\mathcal{G}^\mu$ -однородными степени 2 и 0 соответственно. В задаче Мезера функции $\mathcal{H}_0$ и $\mathcal{H}_1$ – кинетическая и потенциальная энергии соответственно, а группа $\mathcal{G}^\mu$ – гомотетия по импульсам:

$$\mathcal{G}^\mu(q, p) = (q, e^\mu p), \quad \mathcal{Z} = (q, p).$$

Автономную гамильтонову систему с гамильтонианом $\mathcal{H}_0$ будем называть невозмущенной, а исходную – возмущенной.

Предположим, что невозмущенная система имеет гиперболическую периодическую траекторию $\sigma \subset \mathcal{M}$ и гомоклиническое к ней решение $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$.

Поверхности уровня гамильтониана $\mathcal{H}_0$ инвариантны относительно фазового потока Φ_0^t невозмущенной системы. Обозначим их

$$\mathcal{M}_\mu = \{\mathcal{Z} \in \mathcal{M} : \mathcal{H}_0(\mathcal{Z}) = e^{2\mu}\}. \quad (5.3)$$

Будем считать, что гиперболическая траектория σ , а значит, и ее гомоклиника γ лежат на единичном уровне $\mathcal{M}_0$.

Динамика невозмущенной системы “одинакова” на каждом уровне гамильтониана $\mathcal{H}_0$. Точнее, имеет место следующая лемма.

ЛЕММА 5.2.

$$\Phi_0^t \circ \mathcal{G}^\mu = \mathcal{G}^\mu \circ \Phi_0^{e^\mu t}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Каждый уровень гамильтониана инвариантен относительно фазового потока и

$$\mathcal{G}^{\mu*}(\Omega - d\mathcal{H}_0 \wedge dt) = e^\mu \Omega - e^{2\mu} d\mathcal{H}_0 \wedge dt = e^\mu (\Omega - d\mathcal{H}_0 \wedge de^\mu t).$$

Таким образом, получим семейство гиперболических решений и гомоклинических к ним решений

$$\sigma_\mu(t) = \mathcal{G}^\mu \sigma(e^\mu t), \quad \gamma_\mu(t) = \mathcal{G}^\mu \gamma(e^\mu t).$$

Мы будем исследовать динамику в окрестности этого семейства гомоклинических решений для достаточно больших $\mu > 0$. В расширенном фазовом пространстве $\mathcal{M} \times \mathbb{T}_t$ выберем гиперповерхность $\mathcal{Q}$, трансверсальную гамильтонову векторному полю $v_{\mathcal{H}} + \partial_t$ и содержащую двумерное многообразие

$$\{(\gamma_\mu(0), t) \in \mathcal{M} \times \mathbb{R}_t : \mu^{-1} \text{ мало}\}. \quad (5.4)$$

Сепаратрисное отображение $\mathcal{SM}$ определим как отображение Пуанкаре этой четырехмерной поверхности $\mathcal{Q}$. Точнее, выберем произвольную точку $\mathcal{Z}$ на этой поверхности. Пусть

$$t_r(\mathcal{Z}) = \min\{t > 0 : \Phi^t \mathcal{Z} \in \mathcal{Q}\} \quad \text{и} \quad \mathcal{Q}_r = \{\mathcal{Z} \in \mathcal{Q} : t_r < +\infty\},$$

т.е. множество $\mathcal{Q}_r$ состоит из точек на поверхности $\mathcal{Q}$, которые под действием фазового потока возвращаются на эту поверхность. Тогда определение сепаратрисного отображения выглядит следующим образом:

$$\mathcal{SM} : \mathcal{Q}_r \rightarrow \mathcal{Q}, \quad \mathcal{SM}(\mathcal{Z}) = \Phi^{t_r} \mathcal{Z}.$$

Ниже мы используем вместо $\mathcal{Q}_r$ меньшую область $\mathcal{Q}_*$, которая лежит в окрестности множества (5.4) и ограничение $\mathcal{SM}$ на которую является гладким отображением.

§ 2. Формулы

Без ограничения общности предполагаем, что среднее функции $\mathcal{H}_1(\cdot, t)$ на гиперболической траектории нулевое для любого $t \in \mathbb{T}$, т.е.

$$\int_0^l \mathcal{H}_1(\sigma(\tau), t) d\tau = 0, \quad (5.5)$$

где l – период $\sigma(t)$: $\sigma(t) = \sigma(t + l)$. Существуют числа $t^{u,s} \bmod l$ такие, что $\gamma(t) \rightarrow \sigma(t + t^u)$ при $t \rightarrow -\infty$ и $\gamma(t) \rightarrow \sigma(t + t^s)$ при $t \rightarrow +\infty$. Поскольку $\gamma(t)$ экспоненциально стремится к σ при $t \rightarrow \pm\infty$, то следующий предел

$$I(t) = \lim_{T \rightarrow +\infty} \left[\int_{-T}^T \mathcal{H}_1(\gamma(\tau), t) d\tau - \int_{-T+t^u}^{T+t^s} \mathcal{H}_1(\sigma(\tau), t) d\tau \right] \quad (5.6)$$

существует и не зависит от выбора чисел $t^{u,s}$. Периодическая функция $I(t)$ называется интегралом Пуанкаре–Мельникова. Также обозначим

$$I'(t) = \frac{d}{dt} I(t). \quad (5.7)$$

Пусть $\nu = 1/l$ – частота и λ – положительный показатель Ляпунова решения $\sigma(t)$. Положим $x_0 = \nu(t^s - t^u)$. Число x_0 определено по модулю 1 и не зависит от выбранных параметризаций решений.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5.3. Пусть D – область в $\mathbb{R}^n(x_1, \dots, x_n)$. Пусть $R, r_1, \dots, r_m: D \rightarrow \mathbb{R}$ – гладкие функции на ней. Будем говорить, что

$$R = \mathbf{O}_1(r_1, \dots, r_m) \quad \text{на области } D \text{ в координатах } (x_1, \dots, x_n),$$

если R представляется в виде:

$$R = \sum_j a_j r_j, \quad |a_j| < C, \quad \left| \frac{\partial a_j}{\partial x_k} \right| < L, \quad j = 1, \dots, m, \quad k = 1, \dots, n,$$

т.е. гладкие функции $a_j: D \rightarrow \mathbb{R}$ имеют конечные C^1 -нормы на D . Аналогичным образом определим символ $\mathbf{O}_2(r_1, \dots, r_m)$:

$$R = \mathbf{O}_2(r_1, \dots, r_m) \Leftrightarrow R = \sum_{i,j} a_{ij} r_i r_j, \quad |a_{ij}| < C, \quad \left| \frac{\partial a_{ij}}{\partial x_k} \right| < L.$$

Рис. 5.1. Сепаратрисное отображение в задаче Мезера

ТЕОРЕМА 5.4 [25]. На поверхности $\mathcal{Q}$ существуют координаты (x, y, t, h) :

$$\mathcal{Q} = \{(x, y, t, h) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3 : y, h^{-1} - \text{малы}\}$$

такие, что

- 1) t совпадает с исходным временем;
- 2) $\mathcal{H}_0 = h + \mathbf{O}(1)$ на $\mathcal{Q}$;
- 3) на области $\left\{ \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < y; x, y \text{ малы} \right\} \subset \mathcal{Q}$ существует гладкая функция

$$Y(x, y, t, h) = ax + by + \mathbf{O}_2(x, y), \quad a, b - \text{константы}, \quad (5.8)$$

такая, что

$$\mathcal{Q}_* = \left\{ (x, y, t, h) \in \mathcal{Q} : \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < y, \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < Y; x, y \text{ малы} \right\}$$

⁷Переменная x – угловая и выражение “ x мало” следует понимать как близость к точке $x = 0$ на окружности.

и сепаратрисное отображение имеет вид

$$\mathcal{SM}: \mathcal{Q}_* \rightarrow \mathcal{Q}, \quad \mathcal{SM}(x, y, t, h) = (x^+, \rho^+, t^+, h^+),$$

$$\begin{cases} x^+ = x + x_0 - \frac{\nu}{\lambda} \ln Y + \mathbf{O}_1, \\ y^+ = Y + Y \mathbf{O}_1, \\ t^+ = t - \frac{1}{\lambda \sqrt{h}} \ln Y + \frac{1}{\sqrt{h}} \mathbf{O}_1, \\ h^+ = h + \frac{1}{\sqrt{h}} I'(t) + \frac{1}{\sqrt{h}} \mathbf{O}_1, \end{cases} \quad (5.9)$$

где $\mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_1(Y \ln Y) + \mathbf{O}_1(x, y)$ на $\mathcal{Q}_*$;

- 4) гомоклиническое решение невозмущенной системы $\gamma(t)$ трансверсально тогда и только тогда, когда $a \neq 0$.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.5. Для сравнения приведем формулы сепаратрисного отображения для невозмущенной системы $(\mathcal{M}, \mathcal{H}_0, \Omega)$.

На самом деле координаты (x, y, t, h) из теоремы 5.4 являются малой деформацией при $h \rightarrow +\infty$ координат $(\tilde{x}, \tilde{y}, t, \tilde{h})$ таких, что $\mathcal{Q} \subset \tilde{\mathcal{Q}} = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, t, \tilde{h}) \in \mathbb{T} \times \mathbb{R}^3 : \tilde{y} \text{ мало}\}$ и выполнены следующие свойства:

- 1) t – время;
- 2) $\mathcal{H}_0 = \tilde{h}$;
- 3) $(\gamma_\mu(0), t) = (\tilde{x} = 0, \tilde{y} = 0, t, \tilde{h} = e^{2\mu})$;
- 4) на множестве $\{\tilde{x}, \tilde{y} \text{ малы}\} \subset \tilde{\mathcal{Q}}$ существует функция $\tilde{Y}(\tilde{x}, \tilde{y}, t, \tilde{h}) = a\tilde{x} + b\tilde{y} + \mathbf{O}_2(\tilde{x}, \tilde{y})$ такая, что

$$\tilde{\mathcal{Q}}_* = \{(\tilde{x}, \tilde{y}, t, \tilde{h}) \in \tilde{\mathcal{Q}} : \tilde{Y} > 0; \tilde{x}, \tilde{y} \text{ малы}\}$$

и сепаратрисное отображение невозмущенной системы имеет вид

$$\mathcal{SM}_0: \tilde{\mathcal{Q}}_* \rightarrow \tilde{\mathcal{Q}}, \quad \mathcal{SM}_0(\tilde{x}, \tilde{y}, t, \tilde{h}) = (x^+, y^+, t^+, h^+),$$

$$\begin{cases} x^+ = \tilde{x} + x_0 - \frac{\nu}{\lambda} \ln \tilde{Y} + \mathbf{O}_1, \\ y^+ = \tilde{Y} + \tilde{Y} \mathbf{O}_1, \\ t^+ = t - \frac{1}{\lambda \sqrt{\tilde{h}}} \ln \tilde{Y} + \frac{1}{\sqrt{\tilde{h}}} \mathbf{O}_1, \\ h^+ = \tilde{h}, \end{cases} \quad (5.10)$$

где $\mathbf{O}_1 = \mathbf{O}_1(\tilde{Y} \ln \tilde{Y}) + \mathbf{O}_1(x, y)$ на $\tilde{\mathcal{Q}}_*$ и не зависят от t и $\tilde{h}$.

Таким образом, первые два уравнения системы (5.10) отделяются. Нетрудно видеть, что эти уравнения совпадают с уравнениями сепаратрисного отображения Шильникова (теорема 4.1).

Глава 6. Сепаратрисное отображение в априори неустойчивых системах

§ 1. Описание конструкции

Начнем с конструкции сепаратрисного отображения. Далее мы пользуемся обозначениями, введенными в § 5 главы 1. Тор (1.12) инвариантен относительно невозмущенной системы и называется гиперболическим [49], [50] (правильнее говорить – частично гиперболическим). Имеется два асимптотических многообразия

$$\begin{aligned}\widehat{\Gamma}^+(y^0), \widehat{\Gamma}^-(y^0) &\subset \{(y, x, v, u, t) : y = y^0, H_0(y^0, v, u) = H_0(y^0, 0, 0)\}, \\ \widehat{\Gamma}^\pm(y^0) &= \{y^0\} \times \mathbb{T}^n \times \widehat{\gamma}^\pm(y^0) \times \mathbb{T}.\end{aligned}$$

Многообразия $\widehat{\Gamma}^\pm(y^0)$ состоят из невозмущенных решений, стремящихся к $N(y^0)$ при $t \rightarrow \pm\infty$.

Пусть $\mathcal{D} \subset \mathcal{D}_0$ – открытая связная область с компактным замыканием $\overline{\mathcal{D}}$. Далее мы рассматриваем динамику в возмущенной системе в окрестности множества

$$\widehat{\Gamma} = \bigcup_{y \in \overline{\mathcal{D}}} (\widehat{\Gamma}^+(y) \cup \widehat{\Gamma}^-(y)).$$

В этой окрестности содержится наиболее интересная часть возмущенной динамики. Удобно перейти к отображению за единичное время T_ε , переводящему точку (y, x, v, u) в точку $(y(1), x(1), v(1), u(1))$, где $(y(t), x(t), v(t), u(t))$ – решение системы (1.11) с начальными условиями $(y(0), x(0), v(0), u(0)) = (y, x, v, u)$.

Отображение T_0 имеет n -мерные гиперболические торы $L(y) = \text{pr}(N(y))$, где $\text{pr}: (y, x, v, u, t) \mapsto (y, x, v, u)$ – проекция. Пусть $\Sigma^\pm(y) = \text{pr}(\widehat{\Gamma}^\pm(y))$ – асимптотические многообразия. Определим сепаратрисное отображение $\mathcal{SM}_\varepsilon$, соответствующее T_ε в окрестности множества

$$\Sigma = \bigcup_{y \in \overline{\mathcal{D}}} (\Sigma^+(y) \cup \Sigma^-(y)) = \text{pr}(\widehat{\Gamma}).$$

Пусть U – малая окрестность множества $\bigcup_{y \in \overline{\mathcal{D}}} L(y)$ и $\mathbf{U}$ – окрестность Σ (см. рис. 1.3 на с. 15, где Σ изображено в случае $n = 0$). Если $\mathbf{U}$ достаточно мала, то $\mathbf{U} \setminus U$ состоит из двух компонент связности $\mathbf{U}^+$ и $\mathbf{U}^-$, так что $\Sigma^\pm \subset \mathbf{U}^\pm \cup U$.

Рассмотрим точку $z \in \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. Пусть $k_1 = k_1(z)$ – минимальное натуральное число такое, что $T_\varepsilon^{k_1}(z) \notin \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$, и пусть $k_2 = k_2(z)$ – минимальное натуральное число такое, что $k_2 > k_1$ и $T_\varepsilon^{k_2}(z) \in \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. При $k = k_1$ траектория $T_\varepsilon^k(z)$ покидает $\mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. При $k = k_2$ траектория возвращается в $\mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. Назовем точку z хорошей, если $k_2 < \infty$ и $T_\varepsilon^{k_1}(z), \dots, T_\varepsilon^{k_2-1}(z) \in U$. Полагая

$$\mathbf{U}_\varepsilon = \{z \in \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^- : z \text{ – хорошая}\},$$

получаем отображения

$$\mathcal{SM}_\varepsilon(\cdot, k_2(\cdot) + k): \mathbf{U}_\varepsilon \rightarrow \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-, \quad \mathcal{SM}_\varepsilon(z, k_2(z) + k) = T_\varepsilon^{k_2(z)+k}(z).$$

Здесь $k \in \{0, 1, \dots\}$ – параметр и предполагается, что $T_\varepsilon^{k_2+1}(z), \dots, T_\varepsilon^{k_2+k}(z) \in \mathbf{U}^+ \cup \mathbf{U}^-$. Далее положим $t_+ = k_2(z) + k$.

§ 2. Формулы для сепаратрисного отображения

Положим $E(y) = H_0(y, 0, 0)$, $\nu = E_y: \mathcal{D}_0 \rightarrow \mathbb{R}^n$. Тогда $(\nu(y), 1) \in \mathbb{R}^{n+1}$ – вектор частот на невозмущенном торе $N(y)$. Функцию $H_1(y, x, 0, 0, t)$ можно разложить в ряд Фурье:

$$H_1(y, x, 0, 0, t) = \sum_{(k, k_0) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}} H_1^{k, k_0}(y) e^{2\pi i(\langle k, x \rangle + k_0 t)}.$$

Рис. 6.1. Функция $\phi(r)$

Пусть $\phi: \mathbb{R} \rightarrow [0, 1]$ – C^∞ -гладкая функция такая, что $\phi(r) = 0$ для любого $|r| \geq 1$ и $\phi(r) = 1$ для любого $|r| \leq 1/2$ (см. рис. 6.1). Положим

$$\bar{\mathbf{H}}(y, x, t) = \sum_{(k, k_0) \in \mathbb{Z}^n \times \mathbb{Z}} \phi\left(\frac{\langle k, \nu(y) \rangle + k_0}{\varepsilon^{1/4}}\right) H_1^{k, k_0}(y) e^{2\pi i(\langle k, x \rangle + k_0 t)}, \quad (6.1)$$

$$\mathbf{H}(y, x) = \bar{\mathbf{H}}(y, x, 0). \quad (6.2)$$

Функция $\bar{\mathbf{H}}$ – сглаженное среднее от $H_1(y, x, 0, 0, t)$ вдоль невозмущенных траекторий на торах $N(y)$. Она поточечно стремится к обычному среднему

$$\sum_{\langle k, \nu(y) \rangle + k_0 = 0} H_1^{k, k_0}(y) e^{2\pi i(\langle k, x \rangle + k_0 t)} = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T H_1(y, x + \nu(y)s, 0, 0, t + s) ds \quad (6.3)$$

при $\varepsilon \rightarrow 0$. Мы предпочитаем иметь дело с $\mathbf{H}$ и $\bar{\mathbf{H}}$, так как функция (6.3) разрывна в резонансных y .

Пусть K – компакт. Определим следующие нормы в пространствах $C^{\mathbf{r}}(\bar{\mathcal{D}} \times K)$. При $f \in C^{\mathbf{r}}(\bar{\mathcal{D}} \times K)$

$$\|f(y, z)\|_{\mathbf{r}}^{(b)} = \max_{0 \leq l' + l'' \leq \mathbf{r}} b^{l'} \left| \frac{\partial^{l' + l''} f}{\partial y_1^{l'_1} \dots \partial y_n^{l'_n} \partial z_1^{l''_1} \dots \partial z_m^{l''_m}} \right|, \quad (6.4)$$

где $l' = l'_1 + \dots + l'_n$ и $l'' = l''_1 + \dots + l''_m$. Считается, что f может принимать значения в $\mathbb{R}^s$, где s – произвольное натуральное число. Нормы $\|\cdot\|_{\mathbf{r}}^{(b)}$ анизотропны: переменные y играют для них особую роль, так как производным по y в (6.4) соответствуют дополнительные множители b . Очевидно, $\|\cdot\|_{\mathbf{r}}^{(1)}$ – обычная $C^{\mathbf{r}}$ -норма.

При $f \in C^{\mathbf{r}}(\bar{\mathcal{D}} \times K)$ и $g \in C^0(\bar{\mathcal{D}} \times K)$ скажем, что

$$f = O_k^{(b)}(g), \quad \text{если} \quad \|f\|_{\mathbf{r}}^{(b)} \leq C|g|^k, \quad (6.5)$$

где C не зависит от b . Обозначим для краткости

$$\| \cdot \|_{\mathbf{r}}^* = \| \cdot \|_{\mathbf{r}}^{(\varepsilon^{1/4})}, \quad O^{(b)} = O_1^{(b)} \quad \text{и} \quad O_k^* = O_k^{(\varepsilon^{1/4})}.$$

Далее в зависимости от контекста роль “особой” переменной y в $\| \cdot \|_{\mathbf{r}}^*$ и O_k^* может играть y^+ , η или η^+ .

Согласно (6.2) и условию **H₀₁** (с. 15), имеем: $\mathbf{H} = O^*(1)$.

Функция $\bar{\mathbf{H}}$ обладает следующим свойством:

$$\bar{\mathbf{H}}(y, x + \nu(y)t, t_0 + t) = \bar{\mathbf{H}}(y, x, t_0) + O^*(\varepsilon^{1/4}t).$$

Полагая $t_0, t \in \mathbb{Z}$, получаем:

$$\mathbf{H}(y, x + \nu(y)l) = \mathbf{H}(y, x) + O^*(\varepsilon^{1/4}l), \quad l \in \mathbb{Z}.$$

В частности, $\mathbf{H}(y, x + \nu\tau)$ периодична по x и приближенно периодична по τ .

ТЕОРЕМА 6.1. *Предположим, что выполнены условия **H₀₁**–**H₀₄**. Тогда существуют гладкие функции*

$$\lambda, \kappa^\pm: \bar{\mathcal{D}} \rightarrow \mathbb{R}, \quad \Theta^\pm: \bar{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$$

и координаты (η, ξ, h, τ) такие, что выполнены следующие условия:

$$1) \quad \omega = d\eta \wedge d\xi + dh \wedge d\tau,$$

2) $\eta = y + O^*(\varepsilon^{3/4}, H_0 - E(y))$, $\xi + \nu(\eta)\tau = x + f$, где функция f зависит только от (y, u, v, ε) и такова, что $f(y, 0, 0, 0) = 0$, $h = H_0 + O^*(\varepsilon^{3/4}, H_0 - E(y))$, $H_0 = H_0(y, u, v)$.

Положим

$$w = h^+ - E(\eta^+) - \varepsilon \mathbf{H}(\eta^+, \xi + \nu(\eta^+)\tau). \quad (6.6)$$

3) Для любых (η^+, ξ, h^+, τ) таких, что

$$\begin{aligned} c^{-1}\varepsilon^{5/4}|\ln \varepsilon| &< |w| < c\varepsilon^{7/8}, \\ |\tau| &< c^{-1}, \quad c < |w|e^{\lambda(\eta^+)\tau} < c^{-1}, \end{aligned} \quad (6.7)$$

отображение за время t^+ $g_\varepsilon^{t^+} \equiv T_\varepsilon^{t^+} = \mathcal{SM}_\varepsilon$ задается следующим образом:
 $\mathcal{SM}_\varepsilon(\eta, \xi, h, \tau, s, t^+) = (\eta^+, \xi^+, h^+, \tau^+, s^+)$,

$$\begin{aligned} \eta^+ &= \eta - \varepsilon \Theta_\xi^s(\eta^+, \xi, \tau) - \frac{w_\xi}{\lambda} \ln \left| \frac{\kappa^s w}{\lambda} \right| + \mathbf{O}_2, \\ \xi^+ &= \xi + \varepsilon \Theta_{\eta^+}^s(\eta^+, \xi, \tau) + \frac{w_{\eta^+}}{\lambda} \ln \left| \frac{\kappa^s w}{\lambda} \right| + \mathbf{O}_1, \\ h^+ &= h - \varepsilon \Theta_\tau^s(\eta^+, \xi, \tau) - \frac{w_\tau}{\lambda} \ln \left| \frac{\kappa^s w}{\lambda} \right| + \mathbf{O}_2, \\ \tau^+ &= \tau + t^+ + \frac{w_{h^+}}{\lambda} \ln \left| \frac{\kappa^s w}{\lambda} \right| + \mathbf{O}_1, \\ s^+ &= s \cdot \text{sign}(w). \end{aligned} \quad (6.8)$$

Здесь λ, ν, κ^s – функции от η^+ ; t^+ – целое число такое, что

$$\left| \tau + t^+ + \frac{w_{h^+}}{\lambda} \ln \left| \frac{\kappa^s w}{\lambda} \right| \right| < c^{-1}; \quad (6.9)$$

$$\mathbf{O}_1 = O^*(\varepsilon^{7/8}) \ln^2 \varepsilon, \quad \mathbf{O}_2 = O^*(\varepsilon^{5/4}) \ln^2 \varepsilon. \quad (6.10)$$

Индекс s фиксирует сепаратрисную петлю, проходящую траекторией.

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. 1) В [31] получены формулы для сепаратрисного отображения в более общей ситуации (без предположения **Н₀4** о разделении переменных в невозмущенной системе).

2) Отображение за единичное время в переменных (η, ξ, h, τ, s) имеет вид

$$(\eta, \xi, h, \tau, s) \mapsto (\eta, \xi, h, \tau + 1, s) + (\varepsilon, 1, \varepsilon, 1, 0) O^*(\varepsilon^{3/4}, h - E(\eta)). \quad (6.11)$$

3) При t^+ , удовлетворяющем (6.9), сепаратрисное отображение задается равенствами

$$\begin{aligned} \eta &= \mathcal{S}_\xi, \quad \xi^+ = \mathcal{S}_{\eta^+}, \quad h = \mathcal{S}_\tau, \quad \tau^+ = t^+ + \mathcal{S}_{h^+}, \quad s^+ = s \cdot \text{sign}(w), \\ \mathcal{S}(\eta^+, \xi, h^+, \tau, s, t^+) &= \langle \eta^+, \xi \rangle + h^+ \tau + \varepsilon \Theta^s(\eta^+, \xi, \tau) + \frac{w}{\lambda} \ln \left| \frac{\kappa^s w}{\lambda e} \right| + O^*(\varepsilon^{9/8}) \ln^2 \varepsilon. \end{aligned}$$

Отметим, что $\mathcal{S}$ зависит от параметра t^+ лишь через последнее слагаемое.

4) Если $n = 0$, то переменные (η, ξ) отсутствуют и получается обычное сепаратрисное отображение (3.3).

Функции $\lambda > 0$ и $\kappa^\pm > 0$ определяются по невозмущенной системе, а $\Theta^\pm$ оказываются некоторыми интегралами типа Пуанкаре–Мельникова.

Явные формулы для $\lambda, \kappa^\pm$ и $\Theta^\pm$. Согласно **Н₀2** собственные значения матрицы

$$\Lambda(y) = \begin{pmatrix} -(H_0)_{uv}(y, 0, 0), & -(H_0)_{uu}(y, 0, 0) \\ (H_0)_{vv}(y, 0, 0), & (H_0)_{vu}(y, 0, 0) \end{pmatrix} \quad (6.12)$$

вещественны. Их сумма равна $\text{tr } \Lambda = 0$. Функция $\lambda = \lambda(y)$ – положительное собственное значение Λ .

Пусть $\gamma^\pm(y, \cdot): \mathbb{R} \rightarrow \{(v, u) : H_0(y, v, u) = H_0(y, 0, 0)\}$ – естественные параметризации сепаратрисных петель $\hat{\gamma}^\pm(y)$:

$$\dot{\gamma}^\pm(y, t) = (-(H_0)_u(y, \gamma^\pm(t)), (H_0)_v(y, \gamma^\pm(t))), \quad (6.13)$$

и $a_\pm = a_\pm(y)$ – левые собственные векторы матрицы Λ :

$$a_+ \Lambda = \lambda a_+, \quad a_- \Lambda = -\lambda a_- \quad (6.14)$$

такие, что (2×2) -матрица со строками a_+ и a_- имеет единичный определитель.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.3.

$$(\kappa^\pm)^{-1}(y) = \lim_{t \rightarrow +\infty} (\langle a_+(y), \gamma^\pm(y, -t) \rangle \langle a_-(y), \gamma^\pm(y, t) \rangle e^{2\lambda t}).$$

Естественные параметризации на $\widehat{\gamma}^\pm$ определены с точностью до сдвига времени: $t \mapsto t + \varphi_\pm(y)$. Назовем естественные параметризации согласованными, если они гладко зависят от y и

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \frac{\langle a_+(y), \gamma^+(y, t) \rangle}{\langle a_+(y), \gamma^-(y, t) \rangle} = -1.$$

Согласованные параметризации определены с точностью до одновременного сдвига: если $\gamma^+(y, t^+(y, t))$, $\gamma^-(y, t^-(y, t))$ – другая пара согласованных параметризаций, то $t^+(y, t) = t^-(y, t) = t - t_0(y)$ с гладкой функцией t_0 .

Любое решение невозмущенной системы, лежащее на $\widehat{\Gamma}^\pm(y)$, имеет вид

$$(y, x, v, u)(t) = \Gamma^s(y, \xi, \tau + t), \quad \xi \in \mathbb{T}^n, \quad \tau \in \mathbb{R}, \quad s \in \{+, -\}, \quad (6.15)$$

$$\Gamma^s(y, \xi, \tau) = (y, \xi + \nu(y)\tau, \gamma^s(y, \tau)). \quad (6.16)$$

Положим

$$H_*^s(y, \xi, \tau, t) = H_1(\Gamma^s(y, \xi, t), t - \tau) - H_1(y, \xi + \nu t, 0, 0, t - \tau). \quad (6.17)$$

Функции $H_*^s(y, \xi, \tau, t)$ экспоненциально стремятся к нулю при $t \rightarrow \pm\infty$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6.4. *Предположим, что параметризации $\gamma^\pm$ согласованы. Тогда*

$$\Theta^s(y, \xi, \tau) = - \int_{-\infty}^{+\infty} H_*^s(y, \xi, \tau, t) dt. \quad (6.18)$$

Функции Θ^s называются потенциалами расщепления. Они 1-периодичны по ξ и τ . В случае $y = \text{const}$ аналогичные функции были введены в [51] для $n = 1$ и в [52] для произвольного n и диофантова вектора частот $\nu(y^0)$.

Доказательства теоремы 6.1, а также предложений 6.3 и 6.4 имеются в [31].

Глава 7. Размер стохастического слоя

В этой главе мы используем сепаратрисное отображение Заславского для изучения стохастического слоя, возникающего в окрестности сепаратрис системы, близкой к интегрируемой. Описание основных результатов настоящей главы имеется в §1 главы 1.

Предположим, что отображение T принадлежит гладкому семейству T_ε , $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, гладких симплектоморфизмов, для которых выполнены условия (A)–(C) из §8 главы 3. В частности, для них справедливы формулы (3.30).

Ниже нам иногда потребуется дополнительное условие симметрии.

(S) Отображение $\mathcal{M}_\varepsilon$ коммутирует с “центральной симметрией” $(x, y, s) \mapsto (x, y, -s)$.

§ 1. Теоремы о величине стохастического слоя

Теоремы 7.2, 7.6 и 7.9, а также лемма 7.1, сформулированные в этом параграфе, будут доказаны в §3.

Стохастическим слоем назовем область $\mathcal{S}L(\varepsilon) \subset D$, ограниченную непрерывными инвариантными кривыми $\gamma_{\pm}$ и γ_0 (см. рис. 1.1), ближайшими к гиперболической точке $\hat{z}(\varepsilon)$. Ширина области $\mathcal{S}L(\varepsilon)$ будет измеряться в терминах функции qp , где, как обычно, $(q, p) = (q(\varepsilon), p(\varepsilon))$ – нормальные координаты, соответствующие гиперболической неподвижной точке σ_{ε} . Точнее, определим следующие величины:

$$\underline{w}_* = \min_{(q,p) \in \gamma_*} |qp|, \quad \bar{w}_* = \max_{(q,p) \in \gamma_*} |qp|,$$

где звездочка $*$ обозначает любой из символов $+$, $-$ или 0 . Естественно считать, что ширина w стохастического слоя изменяется внутри интервала $(\underline{w}_{\bullet} + \underline{w}_0, \bar{w}_{\bullet} + \bar{w}_0)$, где

$$\underline{w}_{\bullet} = \min\{\underline{w}_+, \underline{w}_-\}, \quad \bar{w}_{\bullet} = \max\{\bar{w}_+, \bar{w}_-\}.$$

Ширина d области $\mathcal{D}$ (см. рис. 1.1) определяется равенством

$$d = \max_{\mathcal{D}} qp - \min_{\mathcal{D}} qp. \quad (7.1)$$

Так как функция qp не зависит от выбора нормальных координат, величины $\underline{w}_*$, $\bar{w}_*$ и d корректно определены. Напомним, что $\mathcal{A} = \mathcal{A}(\varepsilon)$ – симплектическая площадь области $\mathcal{S}L(\varepsilon)$.

ЛЕММА 7.1. *Верны следующие соотношения:*

- 1) $d \sim \delta$, $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} \sim \lambda \delta$;
- 2) если область $\mathcal{D}$ расположена на верхней (нижней) петле и $\nu_+(\xi) = a \sin(2\pi(\xi - \xi_+))$ (соответственно $\nu_-(\xi) = a \sin(2\pi(\xi - \xi_-))$), где a и $\xi_{\pm}$ – постоянные, то $d = \delta(a + o(1))$ и $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \lambda \delta(a/\pi + o(1))$ при $\varepsilon \rightarrow 0$;
- 3) $\underline{\mathcal{A}} \leq \mathcal{A} \leq \bar{\mathcal{A}}$, где

$$\begin{aligned} \underline{\mathcal{A}} &= 2|\underline{w}_0 \ln \underline{w}_0^{-1} + O(\underline{w}_0)| + \sum_{* \in \{+, -\}} |\underline{w}_* \ln \underline{w}_*^{-1} + O(\underline{w}_*)|, \\ \bar{\mathcal{A}} &= 2|\bar{w}_0 \ln \bar{w}_0^{-1} + O(\bar{w}_0)| + \sum_{* \in \{+, -\}} |\bar{w}_* \ln \bar{w}_*^{-1} + O(\bar{w}_*)|. \end{aligned}$$

ТЕОРЕМА 7.2. *Предположим, что семейство отображений T_{ε} удовлетворяет предположениям (A)–(C). Тогда при малых $\varepsilon > 0$ верны следующие оценки:*

$$\begin{aligned} c_1 \delta_{\varepsilon} / \ln \mu_{\varepsilon} &\leq \underline{w}_{\pm} \leq \bar{w}_{\pm} \leq c_2 \delta_{\varepsilon} / \ln \mu_{\varepsilon}, \\ \underline{w}_0 &\leq \bar{w}_0 \leq c_2 \delta_{\varepsilon} / \ln \mu_{\varepsilon} \end{aligned}$$

с некоторыми постоянными c_1 и c_2 .

Более того, если семейство T_{ε} удовлетворяет условию (S), то

$$\underline{w}_0 \geq c_1 \delta_{\varepsilon} / \ln \mu_{\varepsilon}. \quad (7.2)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Согласно теореме 7.2, при выполнении условий (A)–(C) ширина стохастического слоя меняется в интервале $[c_1 \delta / \ln \mu, 2c_2 \delta / \ln \mu]$. Так как согласно лемме 7.1 ширина d области $\mathcal{D}$, измеренная функцией qp , имеет тот же порядок малости, что и δ , получаем оценку (1.1).

ГИПОТЕЗА 7.4. Оценка (7.2) остается верной и без условия (S).

ЗАМЕЧАНИЕ 7.5. Согласно лемме 7.1 и теореме 7.2, для некоторых положительных постоянных $\tilde{c}_1$ и $\tilde{c}_2$

$$\frac{\tilde{c}_1 \delta_\varepsilon}{\ln \mu_\varepsilon} \ln \frac{\ln \mu_\varepsilon}{\delta_\varepsilon} \leq \mathcal{A} \leq \frac{\tilde{c}_2 \delta_\varepsilon}{\ln \mu_\varepsilon} \ln \frac{\ln \mu_\varepsilon}{\delta_\varepsilon}.$$

Теперь рассмотрим подробнее случай $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon = 1$. Указанное равенство имеет место в случае, когда $T_0 = \text{id}$. Вычисление функций $\nu_\pm$ в указанной ситуации весьма сложно. Однако анализ сепаратрисного отображения оказывается более простым в силу следующих двух причин. Во-первых, появляется новый малый параметр: $\ln \mu$. Во-вторых, изучение явления экспоненциально малого расщепления сепаратрис в конкретных задачах (в стандартном отображении, в маятнике с быстро колеблющейся точкой подвеса и в некоторых других [53]–[59]) показывает, что в главном приближении 1-периодические функции $\nu_\pm$ содержат лишь младшие гармоники, т.е.

$$\hat{\nu}_\pm(\xi, \varepsilon) = \nu_\pm(\xi) + O(\varepsilon), \quad \nu_\pm(\xi) = a_\pm \sin(2\pi(\xi - \xi_\pm)), \quad (7.3)$$

где $a_\pm > 0$ и $\xi_\pm \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ – постоянные.⁸

ТЕОРЕМА 7.6. Предположим, что выполнены условия (A)–(C) и справедливы равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon / \ln^2 \mu_\varepsilon = 0.$$

Тогда

$$\bar{w}_* - \underline{w}_* = O(\delta_\varepsilon), \quad * \in \{+, -\}.$$

Более того, если выполняется условие (S), то $\bar{w}_0 - \underline{w}_0 = O(\delta)$.

СЛЕДСТВИЕ 7.7. Если все условия (включая и условие (S)) теоремы 7.6 выполнены, то, согласно теореме 7.2, $\bar{w}_*, \underline{w}_* \sim O(\delta / \ln \mu)$, и, следовательно, справедливы равенства $\bar{w}_* / \underline{w}_* = 1 + O(1 / \ln \mu)$, $* \in \{+, -, 0\}$.

Ниже нам потребуются следующие определения. Пусть $C_{a, \omega, \lambda}$ – следующее симплектическое отображение цилиндра $(x \bmod 1, y)$ на себя:

$$C_{a, \omega, \lambda}(x, y) = (x^+, y^+) = (x + \omega + y^+, y + \lambda^{-1} a \sin(2\pi x)).$$

Отображение $C_{1, 0, \varepsilon^{-1}}$ совпадает со стандартным (см. § 1 введения).

Назовем замкнутую кривую на цилиндре топологически горизонтальной (ТГ-кривой), если она гомотопна окружности $\{y = 0\}$ ⁹. Замкнутую кривую γ , инвариантную относительно симплектического отображения Q цилиндра в себя, назовем жесткой, если любое близкое к Q гладкое симплектическое отображение имеет инвариантную кривую, близкую к γ . Определим три функции

$$\bar{m}(a, \omega), \quad \underline{m}(a, \omega), \quad \bar{m}_0(a', a'', \omega', \omega'')$$

⁸Есть большие основания ожидать, что равенства (7.3) выполняются для систем общего положения с экспоненциально малым расщеплением сепаратрис.

⁹Слово “горизонтальный” здесь выбрано по той причине, что цилиндр можно представлять себе вложенным в пространство $\mathbb{R}^3$ так, что его образующие – вертикальные прямые. Тогда окружность $\{y = 0\}$ лежит в горизонтальной плоскости.

следующим образом:

$$\begin{aligned}\overline{m} &= \inf\{\lambda_0 > 0 : \text{для любого } \lambda \geq \lambda_0 \text{ отображение } C_{a,\omega,\lambda} \\ &\quad \text{имеет инвариантную жесткую ТГ-кривую}\}, \\ \underline{m} &= \sup\{\lambda_0 > 0 : \text{для любого } 0 < \lambda < \lambda_0 \text{ отображение } C_{a,\omega,\lambda} \\ &\quad \text{не имеет инвариантной ТГ-кривой}\}, \\ \overline{m}_0 &= \inf\{\lambda_0 > 0 : \text{для любого } \lambda \geq \lambda_0 \text{ отображение} \\ &\quad C_{a',\omega',\lambda} \circ C_{a'',\omega'',\lambda} \text{ имеет инвариантную} \\ &\quad \text{жесткую ТГ-кривую}\}.\end{aligned}$$

Опишем простейшие свойства этих функций. Начнем с $\underline{m}$ и $\overline{m}$. Так как ω легко исключается из $C_{a,\omega,\lambda}$ с помощью замены переменной y , функции $\underline{m}$ и $\overline{m}$ не зависят от ω . Более того, очевидно,

$$\underline{m} = \underline{c}a, \quad \overline{m} = \overline{c}a$$

для некоторых постоянных $0 < \underline{c} \leq \overline{c}$.

Значение постоянной $\underline{c}$ вычислялось в ряде работ (см., например, [60], [3], [61], [4], [62], [5]). Наиболее точные оценки получены численно [3], [61], [5]. В наших обозначениях результат следующий:

$$\underline{c} = 2\pi/0.971635 \dots$$

Более того, хорошо известна следующая гипотеза.

ГИПОТЕЗА 7.8. *Постоянные $\underline{c}$ и $\overline{c}$ совпадают.*

Гипотеза 7.8 подтверждается численными экспериментами.

Функция $\overline{m}_0$ также зависит от своих аргументов специальным образом. Несложно проверить следующие утверждения.

- 1) *Выполняются неравенства $0 < \overline{m}_0 < \infty$.*
- 2) *Для любых a и ω имеем $\overline{m}_0(a, a, \omega, \omega) = \overline{c}a$.*
- 3) *Функция $\overline{m}_0$ может быть представлена в виде*

$$\begin{aligned}\overline{m}_0(a', a'', \omega', \omega'') &= a\overline{f}(\eta, \omega' - \omega''), \\ a' &= a \cos(2\pi\eta), \quad a'' = a \sin(2\pi\eta),\end{aligned}$$

где функция $\overline{f}$ 1-периодична по обоим аргументам и удовлетворяет тождествам

$$\overline{f}(\eta, \omega) = \overline{f}(-\eta, \omega) = \overline{f}(1/2 - \eta, \omega) = \overline{f}(1/4 - \eta, -\omega), \quad \eta, \omega \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}.$$

ТЕОРЕМА 7.9. *Предположим, что выполнены условия (A)–(C),*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \mu_\varepsilon = 1, \quad \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta_\varepsilon / \ln^2 \mu_\varepsilon = 0$$

и верны равенства (7.3). Тогда справедливы следующие оценки:

а) величины $\underline{w}_\pm$ и $\bar{w}_\pm$ удовлетворяют неравенствам

$$a_\pm \underline{c}(1 + o(1)) \leq \ln \mu \cdot \underline{w}_\pm / \delta \leq \ln \mu \cdot \bar{w}_\pm / \delta \leq a_\pm \bar{c}(1 + o(1)); \quad (7.4)$$

б) в случае $\alpha_+ \neq \alpha_-$

$$\ln \mu \cdot \underline{w}_0 / \delta \leq \ln \mu \cdot \bar{w}_0 / \delta \leq \sup_{\omega', \omega''} \bar{m}_0(a_+, a_-, \omega', \omega'')(1 + o(1));$$

в) если $\alpha_+ = \alpha_-$, то

$$\ln \mu \cdot \underline{w}_0 / \delta \leq \ln \mu \cdot \bar{w}_0 / \delta \leq \bar{m}_0(a_+, a_-, 2\xi_+, 2\xi_-)(1 + o(1));$$

г) если условие **(S)** выполнено, то $\underline{w}_0$ и $\bar{w}_0$ могут быть оценены аналогично величинам $\underline{w}_\pm$ и $\bar{w}_\pm$:

$$a_+ \underline{c}(1 + o(1)) \leq \ln \mu \cdot \underline{w}_0 / \delta \leq \ln \mu \cdot \bar{w}_0 / \delta \leq a_+ \bar{c}(1 + o(1)). \quad (7.5)$$

СЛЕДСТВИЕ 7.10. Если все условия (включая **(S)**) теоремы 7.6 выполнены, то верхняя $\bar{w}$ и нижняя $\underline{w}$ оценки ширины стохастического слоя

$$\bar{w} = \max\{\bar{w}_+ + \bar{w}_0, \bar{w}_- + \bar{w}_0\}, \quad \underline{w} = \min\{\underline{w}_+ + \underline{w}_0, \underline{w}_- + \underline{w}_0\}$$

удовлетворяют неравенствам

$$2a_+ \delta \underline{c}(1 + o(1)) \leq \underline{w} \ln \mu \leq \bar{w} \ln \mu \leq 2a_+ \delta \bar{c}(1 + o(1)). \quad (7.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.11. Если верна гипотеза 7.8, то из соотношений (7.4) и (7.5) следуют равенства

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (\ln \mu \cdot w_*/\delta) = a_+ \underline{c} = a_+ \bar{c}, \quad * \in \{+, -, 0\}. \quad (7.7)$$

Из оценок (7.6), (7.7) вытекает формула (1.3). Действительно, величины $w(\varepsilon)$ и $d(\varepsilon)$, измеренные в терминах qr , имеют следующий вид:

$$w(\varepsilon) \approx \underline{w} \approx \bar{w}, \quad d(\varepsilon) = \delta a_+ = \delta a_-.$$

Последние два равенства следуют из леммы 7.1. С помощью леммы 7.1 легко получаются также оценки, содержащиеся в следующем замечании.

ЗАМЕЧАНИЕ 7.12. Если все условия теоремы 7.6 выполнены и верна гипотеза 7.8, то площадь стохастического слоя удовлетворяет соотношению

$$\mathcal{A} = \frac{4\underline{c}a_+\delta_\varepsilon}{\ln \mu_\varepsilon} \ln \delta^{-1}(\varepsilon)(1 + o(1)). \quad (7.8)$$

Площадь области $\mathcal{D}$, ограниченной сепаратрисами (см. рис. 1.1), равна

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \frac{a_+\delta_\varepsilon \ln \mu_\varepsilon}{\pi} (1 + o(1)). \quad (7.9)$$

Оценка (1.5) следует из равенств (7.8), (7.9).

В случае $\alpha_+ \neq \alpha_-$ величины $\ln \mu \cdot \underline{w}_0 / \delta$ и $\ln \mu \cdot \bar{w}_0 / \delta$, по-видимому, не имеют предела при $\varepsilon \rightarrow 0$, а осциллируют между двумя положительными постоянными.

§ 2. Стохастический слой в маятнике с колеблющейся точкой подвеса

Рассмотрим еще раз отображение Пуанкаре для маятника с периодически колеблющейся точкой подвеса. Величины $\alpha_{\pm}$ и $\nu_{\pm}$ вычислены в § 7 главы 3. Рассматриваемое сепаратрисное отображение удовлетворяет условию симметрии **(S)**, так как инволюция $(\hat{u}, \hat{v}) \mapsto (-\hat{u}, -\hat{v})$ сохраняет гамильтониан (3.25) (см. § 7). Согласно теореме 7.2 ширина стохастического слоя в окрестности сепаратрисной восьмерки с центром в точке $\hat{u} = \hat{v} = 0$ имеет порядок ε при условии, что $\theta, \Omega, \omega \sim 1$ и θ не постоянна. При тех же предположениях площадь $\mathcal{A}$ стохастического слоя имеет порядок $\varepsilon \ln \varepsilon^{-1}$.

Равенство (3.26) справедливо в случае отношения частот $\omega/\Omega \sim 1$. В случае $\omega/\Omega \sim \varepsilon^{-1}$ стандартная теория Пуанкаре–Мельникова перестает работать и приходится применять другие методы, годящиеся для исследования экспоненциально малых эффектов.

Первые нетривиальные строгие результаты, количественно описывающие экспоненциально малое расщепление сепаратрис, получены в работе [54] (см. также [57]). К настоящему времени имеется по крайней мере две параллельные теории, эффективно работающие при анализе широкого круга задач такого типа. Первая из них создана В. Ф. Лазуткиным с соавторами [54]–[56], [63]. Вторая была развита в [58], [59].

Рассмотрим систему с гамильтонианом (3.25) (§ 7 главы 3) при следующих предположениях¹⁰:

$$\Omega = 1, \quad \omega = 1/\varepsilon, \quad \theta(s) = 2\varepsilon^{-1}B \cos s. \quad (7.10)$$

Старший мультипликатор гиперболической неподвижной точки $\hat{u} = \hat{v} = 0$ соответствующего отображения Пуанкаре имеет вид $\mu = e^{2\pi\varepsilon + O(\varepsilon^2)}$.

Сепаратрисное отображение удовлетворяет условию **(S)**. Следуя [59], можно показать, что существует симплектическая замена координат $\hat{u}, \hat{v} \mapsto \tilde{u}, \tilde{v}$ которая

- i) близка к тождественной,
- ii) периодична по времени,
- iii) вещественно-аналитична в комплексной окрестности сепаратрис $\Gamma^{\pm}$ системы с гамильтонианом $H_0 = \tilde{v}^2/2 + \cos \tilde{u}$,
- iv) такая, что новая функция Гамильтона принимает вид:

$$\tilde{H}(\tilde{u}, \tilde{v}, t, \varepsilon) = H_0(\tilde{u}, \tilde{v}) + \varepsilon \tilde{H}_1(\tilde{u}, \tilde{v}, \varepsilon) + \exp(-\tilde{c}/\varepsilon) \tilde{H}_2(\tilde{u}, \tilde{v}, t, \varepsilon).$$

Здесь $H_0 = \tilde{v}^2/2 + \cos \tilde{u}$, постоянная $\tilde{c} \in [0, \pi/2)$ произвольна, функции $\tilde{H}_1, \tilde{H}_2$ вещественно-аналитичны по $\tilde{u}, \tilde{v}$ в окрестности $\Gamma^{\pm}$, гладкие по $\varepsilon > 0$ и функция $\tilde{H}_2$ 2π -периодична по t .

При любом положительном $\tilde{c} \in (\pi/4, \pi/2)$ обычные методы теории Пуанкаре–Мельникова, примененные к этой системе, дают правильную асимптотику расщепления сепаратрис. В частности, удается получить:

$$\nu_{\pm}(t) = -2\pi\varepsilon^{-2}e^{-\pi\varepsilon^{-1}/2}Bf(B^2)\sin(2\pi t),$$

¹⁰Равенства (7.10) означают, что амплитуда колебаний точки подвеса имеет порядок ε^{-2} .

где f – целая вещественно-аналитическая функция, $f(0) = 2$.

Согласно теореме 7.9 ширина стохастического слоя возле сепаратрис $\Gamma^\pm$ удовлетворяет оценке (7.6) с

$$a_+ \delta = 2\pi \varepsilon^{-2} e^{-\pi \varepsilon^{-1}/2} Bf(B^2), \quad \ln \mu = 2\pi \varepsilon.$$

Площадь стохастического слоя оценивается следующим образом:

$$\frac{2\pi \underline{c}}{\varepsilon^4} e^{-\pi \varepsilon^{-1}/2} Bf(B^2)(1 + o(1)) \leq \mathcal{A} \leq \frac{2\pi \bar{c}}{\varepsilon^4} e^{-\pi \varepsilon^{-1}/2} Bf(B^2)(1 + o(1)).$$

(Напомним, что гипотеза 7.8 утверждает, что $\underline{c} = \bar{c}$.)

§ 3. Теория КАМ и теорема Биркгофа

В этом параграфе мы доказываем теоремы 7.2, 7.6 и лемму 7.1.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 7.1. Согласно (3.30) неустойчивая сепаратриса задается уравнением $y = 0$, а устойчивая – уравнением $y_+ = y_+(x, y) = 0$. Последнее равенство приводится к виду

$$y = -\ln \mu (\widehat{\nu}_s(x, \varepsilon) + O(\delta)) = -\ln \mu (\nu_s(x) + o(1)) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0.$$

Таким образом, гомоклинические точки соответствуют нулям функций $\nu_\pm(x)$. Область $\mathcal{D}$ определяется двумя соседними нулями x_1, x_2 функции ν_s .

Пусть x_1 и x_2 определяют область $\mathcal{D}$. Функция ν_s сохраняет знак на интервале (x_1, x_2) . Из (7.1) и (3.29) получаем формулу для ширины области $\mathcal{D}$:

$$d = \delta \left(\max_{x_1 \leq x \leq x_2} \nu_s(x) + o(1) \right) \quad \text{при } \varepsilon \rightarrow 0. \quad (7.11)$$

Площадь $\mathcal{A}_{\mathcal{D}} = \mathcal{A}_{\mathcal{D}}^s$, $s = \pm$, определяется как абсолютная величина интеграла $\int_{\mathcal{D}} dp \wedge dq = \delta \int_{\mathcal{D}} dy \wedge dx$. Следовательно, имеем:

$$\mathcal{A}_{\mathcal{D}}^s = \delta \ln \mu \left| \int_{x_1}^{x_2} \nu_s(x) dx + o(1) \right|. \quad (7.12)$$

Из равенств (7.11), (7.12) вытекают утверждения 1), 2) леммы 7.1.

Докажем утверждение 3). В нормальных координатах q, p стохастический слой занимает область $\mathcal{L}$ такую, что $\underline{\mathcal{D}} \subset \mathcal{L} \subset \overline{\mathcal{D}}$, где

$$\underline{\mathcal{D}} = \left\{ (q, p) : q^2 + p^2 < \underline{r}^2, \quad |qp| < \begin{cases} \underline{w}_+, & \text{если } q > 0 \text{ и } p > 0, \\ \underline{w}_-, & \text{если } q < 0 \text{ и } p < 0, \\ \underline{w}_0, & \text{если } qp < 0 \end{cases} \right\},$$

$$\overline{\mathcal{D}} = \left\{ (q, p) : q^2 + p^2 < \bar{r}^2, \quad |qp| < \begin{cases} \bar{w}_+, & \text{если } q > 0 \text{ и } p > 0, \\ \bar{w}_-, & \text{если } q < 0 \text{ и } p < 0, \\ \bar{w}_0, & \text{если } qp < 0 \end{cases} \right\}$$

и $0 < \underline{r} \leq \bar{r}$ – постоянные. Требуемая оценка для $\mathcal{A}$ вытекает из неравенств

$$\text{area}(\underline{\mathcal{D}}) \geq \underline{\mathcal{A}}, \quad \text{area}(\overline{\mathcal{D}}) \leq \overline{\mathcal{A}}.$$

Лемма 7.1 доказана.

С учетом равенств (3.29) теоремы 7.2 и 7.6 вытекают из следующего утверждения.

ТЕОРЕМА 7.13. *Предположим, что $\varepsilon > 0$ достаточно мал, $1 < \mu < \mu_0$ и*

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \delta(\varepsilon) / \ln^2 \mu(\varepsilon) = 0.$$

Тогда существуют две постоянные $0 < y_{\min} < y_{\max}$ (зависящие только от функций $\nu_{\pm}$) такие, что при малых ε справедливы следующие утверждения.

- 1) *На инвариантных кривых $\gamma_{\pm}$, γ_0 выполняется неравенство $|y| < y_{\max}$.*
- 2) *Кривые γ_+ и γ_- не имеют общих точек с областью $|y| \leq y_{\min}$.*
- 3) *Выполняется оценка $y_{\max} - y_{\min} < 2y_{\min}\mu^2 \ln \mu$.*
- 4) *Если условие (S) выполнено, то кривая γ_0 также не имеет общих точек с областью $|y| \leq y_{\min}$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 7.13. 1. Кривые γ_+ , γ_- и γ_0 расположены в областях $y > 0$, $s > 0$; $y > 0$, $s < 0$; и $y < 0$ соответственно. Анализ удобнее проводить в новых переменных u , u_+ , определенных формулами

$$y = y_0(1 + u \ln \mu), \quad y_+ = y_0(1 + u_+ \ln \mu), \quad y_0 = \text{const}.$$

Сепаратрисное отображение (3.30) переписывается в виде

$$\begin{aligned} x_+ &= x + \omega_s + \frac{1}{\ln \mu} \ln |1 + u_+ \ln \mu + y_0^{-1} \delta \ln \mu \cdot O(1 + y_0 / \ln \mu)^2|, \\ u_+ &= u + I_0^{-1} \hat{\nu}_s(x, \varepsilon) + y_0^{-1} \delta \cdot O(1 + y_0 / \ln \mu)^2, \\ s_+ &= s \cdot \text{sign}(y_0) \cdot \text{sign}(1 + u_+ \ln \mu + y_0^{-1} \delta \ln \mu \cdot O(1 + y_0 / \ln \mu)^2), \end{aligned} \quad (7.13)$$

где величины ω_s имеют вид

$$\omega_s = \frac{1}{\ln \mu} \ln \frac{|y_0| \delta}{\alpha_s^2 \ln \mu}.$$

Основными параметрами в системе (7.13) являются δ и y_0^{-1} . Первый из них мал. Параметр y_0 (“невозмущенное действие”) отвечает за тип динамики (регулярный или хаотический). Положив формально $y_0^{-1} = \delta \ln \mu \cdot O(1 + y / \ln \mu) = 0$, получаем интегрируемое отображение

$$\begin{aligned} x_+ &= x + \omega_s + \frac{1}{\ln \mu} \ln |1 + u_+ \ln \mu|, \\ u_+ &= u, \\ s_+ &= s \cdot \text{sign}(I_0). \end{aligned}$$

Это отображение невырождено, так как $\partial x_+(x, u) / \partial u = (1 + u \ln \mu)^{-1} \neq 0$.

Предположим, что справедливы следующие неравенства:

$$|y_0^{-1}| \leq \hat{c}_1^{-1} \ll 1, \quad \delta \leq \hat{c}_2^{-1} \ll \frac{\hat{c}_1}{\ln \mu \cdot (1 + \hat{c}_1 / \ln \mu)^2}.$$

Тогда согласно теории КАМ сепаратрисное отображение (7.13) имеет инвариантную кривую $u = u(x) = u_0 + O(y_0^{-1})$, где значение u_0 таково, что “невозмущенная” частота $\omega_s + (\ln \mu)^{-1} \ln |1 + u \ln \mu|$ диофантова. (Очевидно, можно

взять $|u_0| < 1/(2 \ln \mu)$.) Напомним, что при $y_0 > 0$ инвариантная кривая гомотопна γ_s , а при $y_0 < 0$ инвариантная кривая гомотопна γ_0 . Утверждение 1) теоремы 7.13 доказано, так как можно положить $y_{\max} = \max_x |y_0|(1 + u(x) \ln \mu)$.

2. Мы докажем утверждение 2) лишь для кривой γ_+ . Случай кривой γ_- аналогичен. Во-первых, заметим, что при малых значениях $\varepsilon > 0$ отображение (7.13) закручивающее. Это означает, что $\partial x_+(x, y)/\partial y > 0$. Следуя идее Лазуткина [10], мы используем следующий результат Биркгофа [64] (см. также [65]).

ЛЕММА 7.14. *Пусть γ – непрерывная инвариантная кривая закручивающего симплектического отображения. Если γ гомотопна кривой $\{y = \text{const}\}$, то γ является графиком липшицевой функции $y = r(x)$.*

Липшицева константа функции $r(x)$ может быть оценена следующим образом. Пусть $Q = \partial(x_+, y_+)/\partial(x, y)$ – матрица Якоби отображения T_ε . Так как T_ε – закручивающее отображение, существуют постоянные $\eta_1, \eta_2 > 0$ такие, что для любой точки (x, y) на кривой выполняются неравенства

$$(1, 0)Q \begin{pmatrix} -1 \\ \eta_1 \end{pmatrix} > 0, \quad (1, 0)Q^{-1} \begin{pmatrix} 1 \\ \eta_2 \end{pmatrix} < 0.$$

Следующая лемма фактически содержится в [65].

ЛЕММА 7.15. *Для любых двух точек x_1, x_2 таких, что $0 \leq x_2 - x_1 < 1/2$, функция $r(x)$ удовлетворяет неравенствам*

$$-\eta_1(x_2 - x_1) \leq r(x_2) - r(x_1) \leq \eta_2(x_2 - x_1). \quad (7.14)$$

Лемма 7.15 является следствием леммы 7.14. Действительно, предположив, что по крайней мере одно из неравенств (7.14) не выполняется для некоторой пары $x_1 < x_2$, где x_1 и x_2 близки, получаем, что для образов $(\tilde{x}_1, r(\tilde{x}_1))$, $(\tilde{x}_2, r(\tilde{x}_2))$ точек $(x_1, r(x_1))$, $(x_2, r(x_2))$ при отображении T_ε (или T_ε^{-1}) справедливо неравенство $\tilde{x}_2 < \tilde{x}_1$, что противоречит лемме 7.14.

Пусть кривая γ_+ задается параметризацией $(x, y) = (x, r_+(x))$. Ниже мы покажем, что

$$r_{\max} = \max_x r_+(x)$$

оценивается снизу положительной постоянной (предложение 7.16), а затем что $r_+(x) > r_{\max} e^{-2 \ln \mu}$ (предложение 7.17).

Из предложений 7.16, 7.17 следует утверждение 2) теоремы 7.13 для кривой γ_+ . Утверждение 3) также вытекает из предложения 7.17. Действительно, имеем неравенство $y_{\max} < y_{\min} \mu^2$. Пользуясь простым соотношением

$$\mu^2 < 1 + 2\mu^2 \ln \mu, \quad \mu > 1,$$

получаем требуемую оценку.

Функция r_+ – положительная, 1-периодичная и липшицева. Оценим липшицеву константу для малых значений параметра ε с помощью леммы 7.15.

Сначала положим $\varepsilon = 0$ (при этом автоматически получим $\delta = 0$). Матрица Якоби Q принимает вид

$$Q = \begin{pmatrix} 1 + x_+^{-1} \nu'_+(x) & (x_+ \ln \mu)^{-1} \\ \ln \mu \cdot \nu'_+(x) & 1 \end{pmatrix},$$

где $x_+ = r_+(x) + \ln \mu \cdot \nu'_+(x) = r_+(x_+)$ и $\nu'_+ = d\nu_+/dx$. В результате прямых вычислений получаем: $\eta_2 \geq r_{\max} \ln \mu$. При малых ненулевых значениях δ оценка слегка слабее. Можно положить

$$\eta_2 = 2r_{\max} \ln \mu. \quad (7.15)$$

Определим постоянную $\nu'_{\min+}$ следующим образом:

$$\nu'_{\min+} = \min_x d\nu_+/dx.$$

Так как согласно предположению **(В)** функция ν_+ периодична и непостоянна, имеем $\nu'_{\min+} < 0$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.16. *Предположим, что параметр $\varepsilon > 0$ достаточно мал. Тогда*

$$r_{\max} \geq -\nu'_{\min+}/7. \quad (7.16)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.16. Сначала положим $\varepsilon = 0$. Пусть отображение (7.13) преобразует точки $(x_j, r_+(x_j))$, $j = 1, 2$, в $(\tilde{x}_j, r_+(\tilde{x}_j))$.

Предположим, что точки x_1, x_2 близки и $x_1 < x_2$. Тогда точки $\tilde{x}_1, \tilde{x}_2$ также близки друг к другу и $\tilde{x}_1 < \tilde{x}_2$. Используя равенства (7.13), имеем:

$$\Delta \tilde{x} = \Delta x + \frac{1}{\ln \mu} \ln \left(1 + \frac{\Delta r_+ + \ln \mu \cdot \Delta \nu_+}{r_+(x_1) + \ln \mu \cdot \nu_+(x_1)} \right), \quad (7.17)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x} &= \tilde{x}_2 - \tilde{x}_1, & \Delta x &= x_2 - x_1 > 0, \\ \Delta r_+ &= r_+(x_2) - r_+(x_1), & \Delta \nu_+ &= \nu_+(x_2) - \nu_+(x_1). \end{aligned}$$

Возьмем x_1 таким, что $\nu'_+(x_1) = \nu'_{\min+}$. Для малых положительных Δx имеем оценки:

$$\Delta r_+ \leq \eta_2 \Delta x \leq 2r_{\max} \ln \mu \cdot \Delta x, \quad \Delta \nu_+ \leq \nu'_{\min+} \Delta x / 2 < 0.$$

Здесь мы использовали соотношения (7.14), (7.15). Теперь предположим, что $r_{\max} < -\nu'_{\min+}/6$. Тогда из равенства (7.17) следует оценка

$$\begin{aligned} \Delta \tilde{x} &< \Delta x + \frac{1}{\ln \mu} \ln \left(1 + \frac{2r_{\max} + \nu'_{\min+}/2}{r_{\max}} \Delta x \ln \mu \right) \\ &< \Delta x + \frac{(2r_{\max} + \nu'_{\min+}/2) \Delta x}{r_{\max}} < \frac{(3r_{\max} + \nu'_{\min+}/2)}{\Delta x / r_{\max}} < 0. \end{aligned}$$

Это противоречит неравенству $\Delta \tilde{x} > 0$. При малых значениях ε оценки сохраняются (возможно, со слегка измененными постоянными). Поэтому мы взяли в (7.16) $\nu'_{\min+}/7$ вместо $\nu'_{\min+}/6$. Предложение 7.16 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7.17. Для любого $x \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ имеем $r_{\max}/r(x) < \mu^2$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 7.17. Положим $\varepsilon = 0$ и допустим, что существует точка $\hat{x} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ такая, что $r_{\max} \geq r(\hat{x})\mu$. Можно считать, что $0 < \hat{x} - x_0 < 1$, где точка x_0 удовлетворяет равенству $r(x_0) = r_{\max}$. Возьмем пару точек $\theta_0, \hat{\theta} \in \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ такую, что $(7.13)|_{\varepsilon=0}$ отображает точки $(\theta_0, r(\theta_0))$, $(r(\hat{\theta}), \hat{\theta})$ соответственно в $(r(x_0), x_0)$, $(r(\hat{x}), \hat{x})$.

Покажем, что $\hat{\theta} - \theta_0 > 1$ в том смысле, что образ отрезка

$$\{(y, x) : y = r(x), \hat{\theta} \leq x \leq \theta_0\}$$

накрывает всю окружность при естественной проекции на $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$: $(y, x) \mapsto x$. Доказав этот факт, мы получим противоречие с леммой 7.14, результатом которого и будет доказательство предложения 7.17.

Величина $\hat{\theta} - \theta_0$ оценивается с помощью равенств $(7.13)|_{\varepsilon=0}$:

$$\hat{x} - x_0 = \hat{\theta} - \theta_0 + \frac{1}{\ln \mu} \ln \frac{r(\hat{x})}{r(x_0)}.$$

Следовательно, имеем:

$$\hat{\theta} - \theta_0 = \hat{x} - x_0 - \frac{1}{\ln \mu} \frac{r(\hat{x})}{r_{\max}} > 1.$$

В случае малых ненулевых ε оценки несколько слабее. Из-за этого в предложении 7.17 мы предполагаем, что $r_{\max}/r(x) < \mu^2$. Предложение 7.17 доказано.

Условие (S) позволяет аналогично доказать утверждение 4) теоремы 7.13.

Глава 8. Островки устойчивости в сепаратрисных лунках

В этой главе мы докажем теоремы 1.1 и 1.3 о существовании островков устойчивости в сепаратрисных лунках для симплектических отображений близких к интегрируемым. Основные результаты и обозначения даны в §2 введения. При доказательстве основным инструментом является сепаратрисное отображение Заславского (глава 3).

§ 1. Следствия из обратимости

Начнем с теоремы 1.3. Рассмотрим семейство двумерных I_ε -обратимых симплектических отображений T_ε , близких к интегрируемому.

ЛЕММА 8.1. Пусть гиперболический поворот $\mathcal{T}(q, p) = (q \cdot \mathcal{M}(pq), p \cdot \mathcal{M}(pq))$ обратим относительно инволюции $\mathcal{J}$, сохраняющей I и III четверти $\mathbb{R}_{q,p}^2$. Тогда существуют нормальные координаты $(\tilde{p}, \tilde{q})$, в которых

$$\mathcal{J}(\tilde{q}, \tilde{p}) = (\tilde{p}(1 + O(\tilde{q}\tilde{p})), \tilde{q}(1 + O(\tilde{q}\tilde{p}))). \quad (8.1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассмотрим функцию $\Phi(p, q) = qr$. Сначала покажем, что

$$\Phi \circ \mathcal{J} = \Phi + O(\Phi^2). \quad (8.2)$$

Действительно, из определения обратимости имеем:

$$\mathcal{J} \circ \mathcal{T} = \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{J}. \quad (8.3)$$

Поскольку Φ – первый интеграл $\mathcal{T}$:

$$\Phi \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{T} = \Phi \circ \mathcal{T}^{-1} \circ \mathcal{J} = \Phi \circ \mathcal{J}.$$

Отсюда $\Phi \circ \mathcal{J}$ также первый интеграл $\mathcal{T}$. Из предложения 3.5 $\Phi \circ \mathcal{J} = c_0 + c_1 \Phi + O(\Phi^2)$. Более того, $c_0 = 0$, поскольку $\mathcal{J}(0) = 0$. Далее имеем:

$$\Phi = \Phi \circ \mathcal{J} \circ \mathcal{J} = c_1 \Phi \circ \mathcal{J} + O(\Phi \circ \mathcal{J})^2 = c_1^2 \Phi + O(\Phi^2).$$

Следовательно, $c_1 = \pm 1$. На самом деле, $c_1 = 1$, поскольку $\mathcal{J}$ сохраняет I и III четверти $\mathbb{R}_{q,p}^2$. Отсюда получаем (8.2).

Пусть $\mathcal{J}^{(q)}$ и $\mathcal{J}^{(p)}$ – первая и вторая компонента образа $\mathcal{J}$. Поскольку $\mathcal{J}$ меняет местами устойчивую и неустойчивую сепаратрисы, имеем:

$$\mathcal{J}^{(q)}(q, 0) = 0, \quad \mathcal{J}^{(p)}(0, p) = 0.$$

Следовательно, мы можем положить

$$\mathcal{J}^{(q)}(q, p) = pa(p, q), \quad \mathcal{J}^{(p)}(q, p) = qb(p, q), \quad (8.4)$$

где a и b – гладкие функции. Используя (8.3) и (8.2), получаем:

$$a(q\mu, p/\mu) = a(p, q) + O(qp), \quad b(q\mu, p/\mu) = b(p, q) + O(qp).$$

Следовательно,

$$a(q, p) = a(0, 0) + O(qp), \quad b(q, p) = b(0, 0) + O(qp).$$

Согласно (8.2) имеем $a(0, 0)b(0, 0) = 1$. Поскольку инволюция $\mathcal{J}$ сохраняет I и III четверти, то $a(0, 0) > 0$. Полагая $p = \tilde{p}\sqrt{a(0, 0)}$, $q = \tilde{q}/\sqrt{a(0, 0)}$ (см. пункт 3) замечания 2.2), получаем (8.1).

Пусть T_ε – I_ε -обратимы, где I_ε – семейство инволюций, сохраняющих петли. Тогда из леммы 8.1 и замечания 3.4 следует, что в окрестности гиперболической неподвижной точки σ_ε существуют нормальные координаты $(q, p) = (q_\varepsilon, p_\varepsilon)$, в которых I_ε имеет вид (8.1).

Ниже удобно заменить переменную x , определенную в (3.13), на $x - (\ln \alpha_\pm)/\lambda$. В новых координатах сепаратрисное отображение (3.1) имеет вид:

$$\mathcal{SM}_\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^+ \\ y^+ \\ s^+ \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_s^2 \lambda} + \ln |y^+| \right) \\ y + \lambda \nu_s (x - (\ln \alpha_s)/\lambda) + O(\varepsilon) \\ s \cdot \text{sign}(y^+) \end{pmatrix}. \quad (8.5)$$

Также запишем формулы для обратного отображения $\mathcal{SM}_\varepsilon^{-1}$:

$$\mathcal{SM}_\varepsilon^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^- \\ y^- \\ s^- \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - \frac{1 + O(\varepsilon)}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_{s^-}^2 \lambda} + \ln |y| \right) \\ y - \lambda \nu_{s^-} (x^- - (\ln \alpha_{s^-})/\lambda) + O(\varepsilon) \\ s \cdot \text{sign}(y) \end{pmatrix}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.2. *Обратимость отображения T_ε порождает обратимость сепаратрисного отображения. Соответствующая инволюция в координатах $(x \bmod 1, y, s)$ имеет вид*

$$I_\varepsilon \begin{pmatrix} x \\ y \\ s \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -x + 2(\ln \alpha_s)/\lambda + O(\varepsilon) \\ y - \lambda \nu_s(-x + (\ln \alpha_s)/\lambda) + O(\varepsilon) \\ s \end{pmatrix}. \quad (8.6)$$

Функции $\nu_\pm$ являются нечетными: $\nu_\pm(x) = -\nu_\pm(-x)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. В нормальных координатах сепаратрисное отображение имеет вид (3.12), поэтому имеем:

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\varepsilon^{-1} &= \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{T}_\varepsilon^{-n_r} = \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{I}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_\varepsilon^{n_r} \circ \mathcal{I}_\varepsilon \\ &= \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{I}_\varepsilon \circ \mathcal{T}_\varepsilon^{n_r} \circ \mathcal{G}_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{I}_\varepsilon = \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{I}_\varepsilon \circ \mathcal{M}_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} \circ \mathcal{I}_\varepsilon. \end{aligned}$$

Поскольку $\mathcal{I}_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{-1} = \mathcal{G}_\varepsilon \circ \mathcal{I}_\varepsilon$, получаем, что в нормальных координатах $\mathcal{M}_\varepsilon$ обратимо относительно инволюции $\mathcal{I}_\varepsilon \circ \mathcal{G}_\varepsilon^{-1}$.

Используя (3.11) и (8.1), получаем:

$$(\mathcal{G}_\varepsilon)^{-1} \circ \mathcal{I}_\varepsilon \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_s^2/q + O(\varepsilon, p) \\ pq^2\alpha_s^{-2} - \varepsilon q\nu_s(\ln |q|/\lambda) + O_2(\varepsilon, p) \end{pmatrix}. \quad (8.7)$$

Записывая эту систему в координатах $(x \bmod 1, y, s)$, получим (8.6). Нечетность функций $\nu_\pm(x)$ следует из тождества $I_\varepsilon^2 = \text{id}$.

§ 2. Симметричные траектории периода 3

Чтобы использовать обратимость, мы будем искать ЭПЛ-траектории, симметричные относительно инволюций I_ε . Пусть $z_0 = (x_0, y_0, -1)$ – начальное условие для периодической траектории отображения $\mathcal{M}_\varepsilon$ периода 3. Предположим, что z_0 лежит на оси симметрии, т.е. $I_\varepsilon(z_0) = z_0$. Тогда согласно (8.6) имеем: $x_0 = \lambda^{-1} \ln \alpha_- + O(\varepsilon)$.

Запишем условие периодичности в виде $\mathcal{M}_\varepsilon^{-1}(z_0) = \mathcal{M}_\varepsilon^2(z_0)$:

$$\begin{cases} \frac{\ln \alpha_+}{\lambda} - \gamma + O(\varepsilon) = \gamma + \frac{1}{\lambda} \left(\ln \frac{\varepsilon}{\alpha_+ \lambda} + \ln(y_0 + \lambda \nu_+(\gamma)) \right) + O(\varepsilon) - m, \\ y_0 - \lambda \nu_+(-\gamma) + O(\varepsilon) = y_0 + \lambda \nu_+(\gamma) + O(\varepsilon), \\ 0 < -\text{sign}(y_0) = -\text{sign}(y_0) \text{sign}(y_0 + \alpha_+^2 \nu_+(\gamma)), \end{cases}$$

Здесь натуральное число m – период траектории отображения T_ε с начальным условием z_0 и

$$\gamma = \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon |y_0|}{\alpha_- \alpha_+ \lambda}.$$

Из обратимости отображения и симметрии траектории следует, что первые два уравнения зависимы. Они эквивалентны следующему:

$$1 + \mu^{\kappa-m-3\sigma} = \mu^r \nu_+(\sigma) + O(\varepsilon), \quad (8.8)$$

где мы положили

$$y_0 = -\lambda \mu^{-r}, \quad \varepsilon = \alpha_+^2 \mu^{\sigma-r+\kappa}, \quad \alpha_+/\alpha_- = \mu^\kappa. \quad (8.9)$$

§ 3. Условия устойчивости

В этом параграфе мы вычисляем след матрицы монодромии M , соответствующей рассматриваемой периодической траектории. Условие эллиптичности имеет вид $|\operatorname{tr} M| < 2$.

Матрица M является дифференциалом отображения $\mathcal{SM}_\varepsilon^3$ в точке z_0 . Пренебрегая членами вида $O(\varepsilon)$, положим:

$$z_1 = \mathcal{SM}_\varepsilon(z_0) = \begin{pmatrix} \frac{1}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon|y_0|}{\alpha_- \lambda} \\ y_0 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad (8.10)$$

$$z_2 = \mathcal{SM}_\varepsilon^2(z_0) = \mathcal{SM}_\varepsilon^{-1}(z_0) = \begin{pmatrix} -\frac{1}{\lambda} \ln \frac{\varepsilon|y_0|}{\alpha_- \alpha_+^2 \lambda} \\ y_0 + \lambda \nu_+(\gamma) \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (8.11)$$

Дифференциал отображения $\mathcal{SM}_\varepsilon$ имеет вид

$$D\mathcal{SM}_\varepsilon(z) = \begin{pmatrix} 1 + \lambda \nu'_s(x - \ln \alpha_s / \lambda) / y^+ & 1 / y^+ \\ \lambda \nu'_s(x - \ln \alpha_s / \lambda) & 1 \end{pmatrix}, \quad (8.12)$$

где $z = (x, y, s)$, $y^+ = y + \lambda \nu_s(x - \ln \alpha_s / \lambda)$.

Величину $\operatorname{tr} M = \operatorname{tr}(D\mathcal{SM}_\varepsilon(z_2)D\mathcal{SM}_\varepsilon(z_1)D\mathcal{SM}_\varepsilon(z_0))$ с помощью (8.8)–(8.12) можно представить в виде

$$\operatorname{tr} M = -2 + \delta\Lambda + O(\varepsilon), \quad (8.13)$$

$$\Lambda = \mu^{r-\kappa+m+3\sigma} \nu'_-(0) + (2 - \mu^r \nu'_-(0))(2 + \mu^{r-\kappa+m+3\sigma} \nu'_+(\sigma)),$$

$$\delta = 1 - \mu^r \nu'_+(\sigma).$$

§ 4. ЭПЛ-траектории существуют

Итак, условие существования симметричной ЭПЛ-траектории периода 3 имеет вид

$$1 + \mu^{\kappa-m-3\sigma} = \mu^r \nu_+(\sigma) + O(\varepsilon), \quad (8.14)$$

$$|-2 + \delta\Lambda + O(\varepsilon)| < 2. \quad (8.15)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.3. *Предположим, что переменные (m, r, σ) , $m \in \mathbf{N}$, удовлетворяют системе (8.14)–(8.15) с опущенными членами $O(\varepsilon)$. Тогда переменные $(m+3, r, \sigma-1)$ также удовлетворяют этой системе.*

СЛЕДСТВИЕ 8.4. *Множество значений параметра $\varepsilon > 0$, для которых существует ЭПЛ-траектория, задаваемая с помощью (8.14)–(8.15), асимптотически инвариантно при сжатии $\varepsilon \mapsto \varepsilon/\mu$.*

СЛЕДСТВИЕ 8.5. *Чтобы доказать теорему 1.3, достаточно установить существование одного решения системы (8.14)–(8.15) $\big|_{O(\varepsilon)=0}$.*

Следствие 8.4 очевидно. Чтобы доказать следствие 8.5, предположим, что система (8.14)–(8.15) $|_{O(\varepsilon)=0}$ имеет решение (m_0, r_0, σ_0) . Так как (8.15) – неравенство, система (8.14)–(8.15) $|_{O(\varepsilon)=0}$ имеет при $m = m_0$ криволинейный интервал решений на плоскости r, σ . В частности, существует интервал $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$, лежащий в J . Согласно следствию 8.4 множество J содержит большую часть (в смысле меры) точек множества $\bigcup_{n=0}^{\infty} (\mu^{-n}\varepsilon_1, \mu^{-n}\varepsilon_2)$. Отсюда следует теорема 1.3.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 8.6. Для любого $\kappa \in \mathbb{R}$ система (8.14)–(8.15) $|_{O(\varepsilon)=0}$ имеет решение.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем κ и положим в (8.14)–(8.15) $O(\varepsilon) = 0$. Напомним, что периодические функции $\nu_{\pm}$ имеют нулевое среднее. Так как сепаратрисы T_{ε} расщепляются в первом приближении по ε , то по крайней мере одна из функций $\nu_{\pm}$ не равна тождественному нулю. Мы предположим, что $\nu_{+} \neq 0$. (Иначе во всех предыдущих формулах поменяем местами $+$ и $-$.)

Для любого $m \in \mathbb{Z}$ на полосе $\{(\sigma, r) \in \mathbb{R}^2 : \sigma \in [0, 2\pi]\}$ имеется гладкая кривая Φ_m – решение уравнения (8.14). Кривые Φ_m можно считать ориентированными. Пусть ∂ – оператор дифференцирования вдоль Φ_m . Элементарно устанавливается, что

- (а) на каждой из кривых Φ_m имеется точка (σ_m, r_m) , в которой $\delta = 0$;
- (б) равенство $\Lambda(\sigma, r) = 0$ имеет место не более чем в конечном числе точек (σ_m, r_m) ;
- (с) равенство $\partial\delta(\sigma, r) = 0$ также имеет место не более чем в конечном числе точек (σ_m, r_m) .

Пусть $(\sigma_m, r_m) \in \Phi_m$ – точка, в которой $\Lambda \neq 0$ и $\partial\delta \neq 0$. Тогда согласно (8.15)

$$\mathrm{tr} M(\sigma_m, r_m) = -2, \quad \partial(\mathrm{tr} M)(\sigma_m, r_m) \neq 0.$$

Следовательно, в малой окрестности точки (σ_m, r_m) на Φ_m имеются точки, в которых $|\mathrm{tr} M| < 2$.

Доказательство теоремы 1.1. Отметим, что любое интегрируемое отображение T_0 обратимо относительно некоторой инволюции, сохраняющей петли. Включим T_0 в семейство T_{ε} , обратимое относительно инволюции, сохраняющей петли. Рассмотрим семейство симплектических отображений $\hat{T}_{\varepsilon}$ такое, что

$$T_0 = \hat{T}_0, \quad |dT_{\varepsilon}/d\varepsilon|_{\varepsilon=0} - d\hat{T}_{\varepsilon}/d\varepsilon|_{\varepsilon=0}| = \Delta$$

для некоторого малого $\Delta > 0$. Сепаратрисное отображение, соответствующее $\hat{T}_{\varepsilon}$, также имеет вид (8.5), но периодические функции $\hat{\nu}_{\pm}$, играющие роль функций $\nu_{\pm}$, вообще говоря, уже не являются нечетными. Однако они $O(\Delta)$ -близки к нечетным функциям $\nu_{\pm}$:

$$|\hat{\nu}_{+} - \nu_{+}| \sim \Delta, \quad |\hat{\nu}_{-} - \nu_{-}| \sim \Delta.$$

Если Δ мало, то ЭПЛ-траекторию в T_{ε} можно продолжить до ЭПЛ-траектории отображения $\hat{T}_{\varepsilon}$. Так как множество J для отображений T_{ε} состоит из интервалов, то существует интервал $(\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ такой, что для любого $\varepsilon \in (\hat{\varepsilon}_1, \hat{\varepsilon}_2)$ отображение $\hat{T}_{\varepsilon}$ имеет ЭПЛ-траекторию. Теперь теорема 1.1 вытекает из следующего простого утверждения.

Предположим, что отображение T_ε имеет ЭПЛ-траекторию для некоторого малого ε . Тогда $T_{\varepsilon/\mu}$ также имеет ЭПЛ-траекторию (большого периода).

Это утверждение аналогично следствию 8.4 и вытекает из уравнений (8.5).

§ 5. Площадь островка устойчивости

Площадь островка устойчивости вокруг ЭПЛ-траектории имеет тот же порядок малости, что и площадь сепаратрисной лунки, так как в переменных (x, y) обе оказываются порядка единицы.

Глава 9. Рост энергии в задаче Мезера

В этой главе метод сепаратрисного отображения применяется к задаче Мезера (§ 4 главы 1) для построения траекторий, на которых энергия в среднем растет линейно по времени.

§ 1. Формулировка результата

Предположим, что система (5.1)–(5.2) удовлетворяет следующим условиям Мезера.

Н₀. Невозмущенная система имеет периодическую гиперболическую траекторию $\sigma \subset \mathcal{M}$ и трансверсальное гомоклиническое к ней решение $\gamma: \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{M}$.

В частности, для системы (5.1)–(5.2) верна теорема 5.4.

Н₁. Интеграл Пуанкаре–Мельникова (5.6) – непостоянная функция.

ТЕОРЕМА 9.1. Пусть для системы (5.1)–(5.2) выполнены условия **Н₀** и **Н₁**. Тогда существует решение $\eta(t)$ этой системы такое, что при всех $t \geq 0$

$$\mathcal{H}(\eta(t), t) \geq A^- t + B^- \quad (9.1)$$

для некоторых постоянных $A^- > 0$ и B^- .

ЗАМЕЧАНИЕ 9.2. Пусть $\frac{\partial}{\partial t} \mathcal{H}_1(\mathcal{Z}, t) \leq A^+$. Например, это выполнено, когда поверхности уровня $\mathcal{H}_0$ компактны, что, конечно, имеет место в задаче Мезера. Тогда для любого решения $\eta(t)$ системы (5.1)

$$\frac{d\mathcal{H}(\eta(t), t)}{dt} = \frac{\partial \mathcal{H}_1(\eta(t), t)}{\partial t} \leq A^+,$$

и, следовательно,

$$\mathcal{H}(\eta(t), t) \leq A^+ t + B^+.$$

Таким образом, рост энергии более быстрый, чем линейный по времени, невозможен ни на каком решении. В этом смысле оценка (9.1) точна.

Мы докажем теорему 9.1, используя формулы для сепаратрисного отображения задачи Мезера (теорема 5.4), т.е. $\eta(t)$ ищется среди решений, которые

всегда остаются в окрестности семейства невозмущенных гомоклинических решений $\gamma_\mu(t)$ (см. главу 5). Для доказательства теоремы 9.1 достаточно построить траекторию сепаратрисного отображения

$$\{(x_n, y_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathcal{SM}(x_n, y_n, t_n, h_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}, h_{n+1}) \quad (9.2)$$

такую, что

$$h_n \geq A^- t_n + B,$$

для некоторой постоянной B .

§ 2. Символические траектории

В этом параграфе мы построим сжимающий оператор на пространстве последовательностей, неподвижными точками которого являются траектории сепаратрисного отображения. Эти траектории имеют хаотический характер в том смысле, что они допускают кодирование последовательностями целых чисел (предложение 9.5).

Обозначим через $[x]$ округление вещественного числа x до целого, $\{x\} = x - [x]$ – “расстояние со знаком” до ближайшего целого числа. Например, $[2.9] = 3$, $\{2.9\} = -0.1$.

Сепаратрисное отображение имеет естественное поднятие на накрывающую область

$$Q_* = \left\{ (x, y, t, h) \in \mathbb{R}^4 : \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < y, \frac{1}{\sqrt[4]{h}} < Y; \{x\}, y - \text{малы} \right\},$$

$$Y = a\{x\} + by + O_2(\{x\}, y).$$

Это отображение, которое мы снова обозначим $\mathcal{SM}$, также имеет вид (5.9), где $O_1 = O_1(Y \ln Y) + O_1(\{x\}, y)$ на Q_* и мы можем считать, что $x_0 \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.

ЛЕММА 9.3. Система $\mathcal{SM}(x, y, t, h) = (x^+, y^+, t^+, h^+)$ равносильна следующей:

$$\begin{cases} y^+ = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 + R^y)}, \\ a\{x\} = y^+ - by + R^x, \\ t^+ = t + \frac{1}{\nu\sqrt[4]{h}}(x^+ - x - x_0 + R^t), \\ h^+ = h + \frac{1}{\sqrt[4]{h}}(I'(t) + R^h), \end{cases} \quad (9.3)$$

$$Y(x, y, t, h) = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 + R^Y)}. \quad (9.4)$$

Здесь $R^{x,y,Y,t,h}(x, y, t, h)$ – гладкие функции на Q_* такие, что

$$R^{y,Y,t,h}(x, y, t, h) = O((x^+ - x)e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x)}) + O_1(\{x\}, y) \quad \text{на } Q_*,$$

$$R^x(x, y, t, h) = O((x^+ - x)e^{-\frac{2\lambda}{\nu}(x^+ - x)}) + O_2(\{x\}, y) \quad \text{на } Q_*.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Достаточно проверить (9.4). Из первого уравнения системы (5.9) следует, что

$$x^+ = x + x_0 - \frac{\nu}{\lambda}(1 + \mathcal{O}(Y)) \ln Y + \tilde{R}, \quad \tilde{R}(x, y, t, h) = \mathcal{O}_1(\{x\}, y).$$

Положим $\tilde{Y} = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 - \tilde{R})}$. Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\nu}{\lambda} \ln \tilde{Y} &= \frac{\nu}{\lambda}(1 + \mathcal{O}(Y)) \ln Y, \quad \tilde{Y} = Y + \mathcal{O}(Y^2 \ln Y), \\ Y &= \tilde{Y} + \mathcal{O}(\tilde{Y}^2 \ln \tilde{Y}) = \tilde{Y}(1 + \mathcal{O}(\tilde{Y} \ln \tilde{Y})) = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x^+ - x - x_0 + \tilde{R} + \mathcal{O}(\tilde{Y} \ln \tilde{Y}))}. \end{aligned}$$

Лемма 9.3 доказана.

Нам будет необходима следующая регуляризация сепаратрисного отображения. Для $E > 0$ положим

$$\mathcal{M}_E(x, y, t, h) = (x^+, y^+, t^+, h^+), \quad (9.5)$$

где

$$\begin{aligned} x^+ &= x_{\mathcal{M}}^+, \quad y^+ = y_{\mathcal{M}}^+, \quad t^+ = t_{\mathcal{M}}^+, \quad h^+ = \max\{E, h_{\mathcal{M}}^+\}, \\ (x_{\mathcal{M}}^+, y_{\mathcal{M}}^+, t_{\mathcal{M}}^+, h_{\mathcal{M}}^+) &= \mathcal{M}(x, y, t, h). \end{aligned} \quad (9.6)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 9.4. Пусть

$$\mathcal{M}_E(x_n, y_n, t_n, h_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}, h_{n+1}), \quad n \in \mathbb{Z},$$

и $h_n > E$ для всех $n \in \mathbb{Z}$. Тогда $\{(x_n, y_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ – траектория отображения $\mathcal{M}$.

Для числовых последовательностей $\mathbf{a}' = \{a'_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ и $\mathbf{a}'' = \{a''_n\}_{n \in \mathbb{Z}}$ определим

$$\text{dist}(\mathbf{a}', \mathbf{a}'') = \sup_{n \in \mathbb{Z}} \|a'_n - a''_n\|_{(n)},$$

где $\|a\|_{(n)} = 2^{-|n|}|a|$, $a \in \mathbb{R}$.

Обозначим

$$\begin{aligned} \mathbf{x} &= \{x_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{y} = \{y_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{t} = \{t_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad \mathbf{h} = \{h_n\}_{n \in \mathbb{Z}}, \\ \zeta &= (x, y, t, h), \quad \boldsymbol{\zeta} = \{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} = (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{h}), \\ \text{dist}_3(\boldsymbol{\zeta}', \boldsymbol{\zeta}'') &= \max\{\text{dist}(\mathbf{x}', \mathbf{x}''), \text{dist}(\mathbf{y}', \mathbf{y}''), \text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}''), \text{dist}(\mathbf{h}', \mathbf{h}'')\}. \end{aligned}$$

Пространство $\mathfrak{Z} = (\{\boldsymbol{\zeta}\}, \text{dist}_3)$ является полным метрическим пространством.

Для $K', K'' \in \mathbb{N}$, $K'' > K' + 1$ (на самом деле ниже K' и K'' достаточно велики и $K'' \gg K'$) определим пространство кодов

$$\begin{aligned} \mathcal{C}_{K', K''} &= \{\bar{\mathbf{x}} = \{\bar{x}_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : \bar{x}_n \in \mathbb{Z}, \quad K' < \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n < K''\}, \\ \text{dist}_C(\bar{\mathbf{x}}', \bar{\mathbf{x}}'') &= 2^{-N}, \quad N = \min\{|n| : \bar{x}'_n \neq \bar{x}''_n\}. \end{aligned}$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 9.5. Пусть ε достаточно мало и

$$\frac{1}{\sqrt[4]{E}} < e^{-\frac{\lambda}{\nu}K''}, \quad \left(\frac{1+|b|}{|a|} + 1 \right) e^{-\frac{\lambda}{\nu}K'} < \frac{1}{2}\varepsilon. \quad (9.7)$$

Тогда для любого кода $\bar{x} \in \mathcal{C}_{K',K''}$ и чисел $t_0, h_0 \in \mathbb{R}$, $h_0 \geq E$, существует единственная траектория $\zeta = \{(x_n, y_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}$ отображения $\mathcal{SM}_E$ такая, что

$$|x_n - \bar{x}_n| \leq \varepsilon, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq y_n \leq \varepsilon, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq Y_n \leq \varepsilon, \quad h_n \geq E. \quad (9.8)$$

При этом, если ζ' (соответственно ζ'') порождает траекторию $\bar{x}'$ (соответственно $\bar{x}''$) $\in \mathcal{C}_{K',K''}$, то

$$\text{dist}(t', t'') \leq 8\varepsilon \text{dist}_C(\bar{x}', \bar{x}''). \quad (9.9)$$

Таким образом, при фиксированных $t_0, h_0 > E$ получаем отображение из пространства кодов в пространство траекторий:

$$\mathcal{SM}: \bar{x} \in \mathcal{C}_{K',K''} \mapsto \zeta = \{(x_n, y_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \quad (9.10)$$

где $\mathcal{SM}_E(x_n, y_n, q_n, p_n) = (x_{n+1}, y_{n+1}, t_{n+1}, h_{n+1})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Зафиксируем произвольный код $\bar{x} \in \mathcal{C}_{K',K''}$ и выберем $t_0, h_0 \geq E$. В пространстве последовательностей $\mathfrak{Z}$ рассмотрим множество

$$B_{\varepsilon, E} = \left\{ \zeta = \{\zeta_n\}_{n \in \mathbb{Z}} : |x_n - \bar{x}_n| \leq \varepsilon, \quad \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq y_n \leq \varepsilon, \right. \\ \left. \frac{1}{\sqrt[4]{E}} \leq Y_n \leq \varepsilon, \quad h_n \geq E; \quad t_0, h_0 \text{ фиксированы} \right\}.$$

Для достаточно малого ε : $B_{\varepsilon, E} \neq \emptyset$ и все точки (x_n, y_n, t_n, h_n) лежат в области Q_* – области определения $\mathcal{SM}_E$. Поэтому на этом множестве определен оператор $C: B_{\varepsilon, E} \rightarrow \mathfrak{Z}$,

$$C: \zeta = \{(x_n, y_n, t_n, h_n)\}_{n \in \mathbb{Z}} \mapsto \tilde{\zeta} = \{(\tilde{x}_n, \tilde{y}_n, \tilde{t}_n, \tilde{h}_n)\}_{n \in \mathbb{Z}}, \\ [\tilde{x}_n] = \bar{x}_n, \quad \tilde{t}_0 = t_0, \quad \tilde{h}_0 = h_0, \\ a\{\tilde{x}_n\} = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_{n+1} - x_n - x_0 + R_n^y)} - b e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n - x_{n-1} - x_0 + R_{n-1}^y)} + R_n^x, \\ \tilde{y}_n = e^{-\frac{\lambda}{\nu}(x_n - x_{n-1} - x_0 + R_n^y)}, \\ \tilde{t}_n = \begin{cases} t_{n-1} + \frac{1}{\nu \sqrt{h_{n-1}}} (x_n - x_{n-1} - x_0 + R_{n-1}^t) & \text{при } n > 0, \\ t_{n+1} - \frac{1}{\nu \sqrt{h_n}} (x_{n+1} - x_n - x_0 + R_n^t) & \text{при } n < 0, \end{cases} \\ \tilde{h}_n = \begin{cases} \max \left\{ E, h_{n-1} + \frac{1}{\sqrt{h_{n-1}}} (I'(t_{n-1}) + R_{n-1}^h) \right\} & \text{при } n > 0, \\ \max \left\{ E, h_{n+1} - \frac{1}{\sqrt{h_{n+1}}} (I'(t_{n+1}) + R_n^h) \right\} & \text{при } n < 0. \end{cases}$$

Из (9.3) нетрудно видеть, что неподвижные точки этого отображения есть траектории отображения $\mathcal{SM}_E$.

ЛЕММА 9.6. а) $\mathbf{C}(B_{\varepsilon,E}) \subset B_{\varepsilon,E}$.

б) Оператор $\mathbf{C}$ сжимающий:

$$\text{dist}_3(\mathbf{C}\zeta', \mathbf{C}\zeta'') < \frac{3}{4} \text{dist}_3(\zeta', \zeta'').$$

Доказательство этой леммы имеется в [25]. Заметим, что оператор $\mathbf{C}$ вообще говоря не является сжимающим по норме равномерной сходимости.

Поскольку $B_{\varepsilon,E}$ – замкнутое подпространство полного пространства $\mathfrak{Z}$, то из принципа сжимающих отображений следует, что $\mathbf{C}$ имеет единственную неподвижную точку $\zeta \in B_{\varepsilon,E}$ – траекторию сепаратрисного отображения.

Докажем оценку (9.9). Пусть ζ' и ζ'' – траектории, соответствующие кодам $\bar{x}'$ и $\bar{x}'' \in \mathcal{C}_{K',K''}$ соответственно. Пусть $\text{dist}_C(\bar{x}', \bar{x}'') = 2^{-N}$. Возьмем в качестве нулевого приближения к траектории $\zeta'' = \{\zeta_n''\}_{n \in \mathbb{Z}}$ следующую последовательность $\zeta^{(0)} = \{\zeta_n^{(0)}\}_{n \in \mathbb{Z}}$:

$$x_n^{(0)} = \begin{cases} x'_n & \text{при } |n| < N, \\ \bar{x}''_n & \text{при } |n| \geq N, \end{cases} \quad y_n^{(0)} = y'_n, \quad t_n^{(0)} = t'_n, \quad h_n^{(0)} = h'_n.$$

Тогда, из определения оператора $\mathbf{C}$, первое приближение $\zeta^{(1)} = \mathbf{C}(\zeta^{(0)})$, имеет вид:

$$\begin{aligned} x_n^{(1)} &= x_n^{(0)} && \text{при } |n| < N-1, \\ |x_n^{(1)} - x_n^{(0)}| &\leq \varepsilon && \text{при } |n| \geq N-1, \\ y_n^{(1)} &= y_n^{(0)} && \text{при } |n| < N-1, \\ |y_n^{(1)} - y_n^{(0)}| &\leq \varepsilon && \text{при } |n| \geq N-1, \\ t_n^{(1)} &= t_n^{(0)} && \text{при } |n| < N, \\ |t_n^{(1)} - t_n^{(0)}| &\leq \frac{K''}{\nu\sqrt{E}} && \text{при } |n| \geq N, \\ h_n^{(1)} &= h_n^{(0)} && \text{при } |n| < N, \\ |h_n^{(1)} - h_n^{(0)}| &\leq \frac{1}{\nu\sqrt{E}} + \frac{K''C}{E} && \text{при } |n| \geq N. \end{aligned}$$

Поэтому, при необходимости уменьшая ε , получим:

$$\text{dist}(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}) \leq 2^{-N} 2\varepsilon.$$

Следовательно, из свойства сжимающего отображения,

$$\text{dist}(\zeta^{(0)}, \zeta'') \leq \frac{1}{1 - \frac{3}{4}} \text{dist}(\zeta^{(0)}, \zeta^{(1)}) \leq 8\varepsilon 2^{-N}.$$

Отсюда

$$\text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}'') \leq \text{dist}(\mathbf{t}', \mathbf{t}^{(0)}) + \text{dist}(\mathbf{t}^{(0)}, \mathbf{t}'') \leq 8\varepsilon 2^{-N} = 8\varepsilon \text{dist}_C(\bar{x}', \bar{x}'').$$

§ 3. Быстрые траектории Мезера

Траектории с быстрым ростом энергии ищем среди траекторий, построенных в предложении 9.5. Из (9.3) следует, что для траектории $(\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{h})$, порожденной кодом $\bar{\mathbf{x}}$, имеем

$$\delta h_n = \frac{\nu I'(t_n)}{\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n - x_0} \delta t_n + \text{малые ошибки},$$

где $\delta h_n = h_{n+1} - h_n$ и $\delta t_n = t_{n+1} - t_n$. Теперь, если мы выберем код такой, что разность $\bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n$ поменьше при $I'(t_n) > 0$ и побольше при $I'(t_n) < 0$, то в среднем последовательность h_n будет расти при $n \rightarrow \pm\infty$. Следующая лемма показывает, что такой код существует.

Обозначим $\Pi: (\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{t}, \mathbf{h}) \mapsto \mathbf{t}$ и $\mathcal{CM}_t = \Pi \circ \mathcal{CM}$. Пусть $\{\Theta_j\}_{j \in \mathbb{Z}}$ — монотонно возрастающая последовательность. Положим $\Delta_j = [\Theta_{2j}, \Theta_{2j+1})$ и $\Xi_j = [\Theta_{2j-1}, \Theta_{2j})$ (см. рис. 9.1).

Рис. 9.1. Разбиение $\mathbb{R}_t$

ЛЕММА 9.7. Пусть ¹¹ $|\Xi_j| \geq 8\varepsilon$ для всех $j \in \mathbb{Z}$. Тогда для любой последовательности $\{k_j\}$, $k_j \in \mathbb{N}$, $K' < k_j < K''$, существует код $\bar{\mathbf{x}} \in C_{K', K''}$, $\mathbf{t} = \mathcal{CM}_t(\bar{\mathbf{x}})$ такой, что

$$t_n \in \Delta_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = k_j & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = k_j & \text{при } n \leq 0. \end{cases} \quad (9.11)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Искомый код строится по индукции. Пусть

$$\bar{\Theta}_j = \frac{\Theta_{2j} + \Theta_{2j-1}}{2}, \quad \bar{\Delta}_j = [\bar{\Theta}_{j+1}, \bar{\Theta}_j).$$

На N -м шаге мы определяем точки $\bar{t}_N$ и $\bar{t}_{-N}$ такие, что у полученной в конце всей процедуры последовательности $\mathbf{t} = \{t_n\}$ члены t_N и t_{-N} будут лежать в 4ε -окрестности этих точек. Отсюда нетрудно видеть, что свойство (9.11) будет следовать из аналогичного свойства для последовательности $\{\bar{t}_n\}$ и интервалов $\bar{\Delta}_j$:

$$\bar{t}_n \in \bar{\Delta}_j \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = k_j & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = k_j & \text{при } n \leq 0. \end{cases} \quad (9.12)$$

Это свойство есть индуктивное определение кода. Действительно, получаем следующую процедуру.

На нулевом шаге мы берем произвольный код $\bar{\mathbf{x}}^{(0)} \in C_{K', K''}$ и полагаем $\bar{t}_0 = t_0$.

¹¹Здесь $|\Delta|$ — длина интервала Δ .

Опишем N -й шаг. Из $N - 1$ шага мы имеем код $\bar{\mathbf{x}}^{(N-1)}$ и соответствующую последовательность $\mathbf{t}^{(N-1)}$. Определяем

$$\bar{x}_n^{(N)} = \begin{cases} \bar{x}_n^{(N-1)} & \text{при } |n| < N, \\ \bar{x}_{N-1}^{(N-1)} + k_j & \text{при } n = N, \text{ если } t_{N-1}^{(N-1)} \in \bar{\Delta}_j, \\ \bar{x}_{-(N-1)}^{(N-1)} - k_j & \text{при } n = -N, \text{ если } t_{-(N-1)}^{(N-1)} \in \bar{\Delta}_j, \\ \text{произвольно} & \text{при } |n| > N, \end{cases}$$

$$\bar{t}_N = \mathbf{t}_N^{(N)}, \quad \bar{t}_{-N} = \mathbf{t}_{-N}^{(N)}, \quad \text{где } \mathbf{t}^{(N)} = \mathcal{C}\mathcal{M}_t(\mathbf{x}^{(N)}).$$

Таким образом, процедура описана.

Далее пусть $\bar{\mathbf{x}}$ – предел соответствующей процедуры и $\mathbf{t} = \mathcal{C}\mathcal{M}_t(\bar{\mathbf{x}})$. Имеем

$$\text{dist}(\mathbf{t}^{(N)}, \mathbf{t}) < 8\varepsilon \text{dist}_C(\bar{\mathbf{x}}^{(N)}, \bar{\mathbf{x}}) \leq 8\varepsilon 2^{-N-1}.$$

Следовательно,

$$|t_N - \bar{t}_N| = |t_N - t_N^{(N)}| < 8\varepsilon 2^N 2^{-N-1} = 4\varepsilon.$$

Лемма 9.7 доказана.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 9.1. Мы построим траекторию $\mathcal{SM}_E$ такую, что для постоянных $A^+ > 0$ и $B > E$

$$h_n > A^+|t_n| + B \quad \text{для любого } n \in \mathbb{Z},$$

и тем самым получим траекторию $\mathcal{SM}$ с линейным по времени ростом энергии.

Из условия **H**₁ теоремы 9.1 и равенства

$$\int_{\mathbb{T}(t)} I'(t) dt = 0$$

следует, что существует интервал $\Delta \subset \mathbb{T}(t)$, $|\Delta| > 0$, такой, что

$$\min_{t \in \Delta} I'(t) > m_+ > 0.$$

Рис. 9.2. Последовательность t_n для траектории с линейным ростом энергии

Положим

$$\min_{t \in \mathbb{T}} I'(t) = -m_-.$$

Пусть Δ'_j , $j \in \mathbb{Z}$, – прообразы Δ при естественном накрытии $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{T}$. Рассмотрим разбиение $\mathbb{R}(t)$:

$$\mathbb{R} = \cdots \sqcup \Delta'_{-1} \sqcup \Xi''_{-1} \sqcup \Delta''_{-1} \sqcup \Xi'_0 \sqcup \Delta'_0 \sqcup \Xi''_0 \sqcup \Delta''_0 \sqcup \Xi'_1 \sqcup \Delta'_1 \sqcup \Xi''_1 \sqcup \Delta''_1 \sqcup \cdots$$

такое, что $|\Xi'_j| = |\Xi''_j| = 8\varepsilon$ и $I'(t) > 0$ при $t \in \Xi'_j \cup \Delta'_j \cup \Xi''_j$. Это возможно, например, при

$$8\varepsilon < \frac{m_+}{m'},$$

где, напомним, $m' = \max I''(t)$. Теперь фиксируем ε , E , K' , K'' такие, что выполнены условия предложения 9.5, предыдущее условие, а также

$$K'' > 300 \frac{1 - |\Delta|}{|\Delta|} \frac{m_-}{m_+} K'. \quad (9.13)$$

Очевидно, при достаточно малом ε этого всегда можно добиться.

Рис. 9.3. Быстрая траектория Мезера и интеграл Пуанкаре–Мельникова

Теперь рассмотрим отображение $\mathcal{M}_E$. Фиксируем $t_0 = 0$, $h_0 = 2E$. Пользуясь предложением 9.5 и леммой 9.7, построим траекторию такую, что

$$\begin{aligned} t_n \in \Delta'_j &\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = K' + 1 & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = K' + 1 & \text{при } n \leq 0, \end{cases} \\ t_n \in \Delta''_j &\Rightarrow \begin{cases} \bar{x}_{n+1} - \bar{x}_n = K'' - 1 & \text{при } n \geq 0, \\ \bar{x}_n - \bar{x}_{n-1} = K'' - 1 & \text{при } n \leq 0. \end{cases} \end{aligned}$$

Оценим прирост “энергии” Δh_j “за время 1”: с момента последнего попадания в Ξ_{j-1} до первого попадания в Ξ_{j+1} . Обозначим h_+ , h_- – максимум и минимум h_n за этот период. Тогда имеем:

$$1 \leq \frac{h_+}{h_-} < 2.$$

Обозначим:

$$\begin{aligned}\delta t' &= \max_{t_n \in \Delta'_j} (t_{n+1} - t_n), & \delta t'' &= \min_{t_n \in \Delta''_j} (t_{n+1} - t_n), \\ \delta h' &= \min_{t_n \in \Delta'_j} (h_{n+1} - h_n), & \delta h'' &= \min_{t_n \in \Delta''_j} (h_{n+1} - h_n), \\ N' &= \min_j \# \{t_n : t_n \in \Delta'_j\}, & N'' &= \max_j \# \{t_n : t_n \in \Delta''_j\}.\end{aligned}$$

Имеем следующие оценки:

$$\begin{aligned}\delta t' &< \frac{2K'}{\nu\sqrt{h_-}}, & \delta t'' &> \frac{K''}{2\nu\sqrt{h_-}}, \\ \delta h' &> \frac{m_+}{2\sqrt{h_+}}, & \delta h'' &> -\frac{3m_-}{2\sqrt{h_-}}, \\ N' &> \frac{|\Delta|\nu\sqrt{h_-}}{4K'}, & N'' &< \frac{4(1-|\Delta|)\nu\sqrt{h_+}}{K''}.\end{aligned}$$

Тогда

$$\begin{aligned}\Delta h_j &> \frac{|\Delta|\nu\sqrt{h_-}}{4K'} \frac{m_+}{2\sqrt{h_+}} - \frac{4(1-|\Delta|)\nu\sqrt{h_+}}{K'} \frac{3m_-}{2\sqrt{h_-}} \\ &> \frac{|\Delta|\nu m_+}{16K'} - \frac{9(1-|\Delta|)\nu m_-}{K''} > \frac{|\Delta|\nu m_+}{32K'} = A^-.\end{aligned}$$

Из (9.13) следует, что $A^- > 0$. Теорема 9.1 доказана.

Глава 10. Траектории в окрестности асимптотических многообразий в априори неустойчивых системах

В этой главе мы используем многомерное сепаратрисное отображение Заславского (глава 6) для построения траекторий в априори неустойчивых гамильтоновых системах, близких к интегрируемым. Основным результатом главы является лемма 10.4, выступающая главным рабочим инструментом в главе 11 для построения диффузионных траекторий.

§ 1. Уравнения Рауса

Начнем с равенств (6.8), задающих отображение $\mathcal{SM}_\varepsilon$. Рассмотрим каноническую замену переменных $(\eta, \xi, \tau, h) \mapsto (\rho, \zeta, \tau, r)$,

$$\begin{aligned}\zeta &= \xi + \nu(\eta)\tau, & \rho &= \varepsilon^{-1}\eta, & r &= \varepsilon^{-1}(h - E(\eta)), \\ d\eta \wedge d\xi + dh \wedge d\tau &= \varepsilon(d\rho \wedge d\zeta + dr \wedge d\tau).\end{aligned}\tag{10.1}$$

Будем считать, что

$$c^{-1}\varepsilon^{1/8}|\ln \varepsilon| < |\widehat{w}| < c\varepsilon^{-1/8}, \quad \widehat{w}(\rho_+, r_+, \zeta) = r_+ - \mathbf{H}(\varepsilon\rho_+, \zeta)\tag{10.2}$$

(ср. (6.6), (6.7)). В новых координатах $\mathcal{SM}_\varepsilon$ (формулы (6.8)) выглядит следующим образом: $\mathcal{SM}_\varepsilon(\zeta, \rho, \tau, r, s; t_+) = (\zeta_+, \rho_+, \tau_+, r_+, s_+)$,

$$\begin{aligned}\rho_+ &= \rho - \widehat{\Theta}_\zeta^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) + \frac{\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta)}{\lambda} \ln \left| \frac{\varepsilon\kappa^s \widehat{w}}{\lambda} \right| + \widehat{\mathbf{O}}_2, \\ \zeta_+ &= \zeta + \nu(\varepsilon\rho_+)t_+ - \frac{\mathbf{H}_{\rho_+}(\varepsilon\rho_+, \zeta)}{\lambda} \ln \left| \frac{\varepsilon\kappa^s \widehat{w}}{\lambda} \right| + \widehat{\mathbf{O}}_1, \\ r_+ &= r - \widehat{\Theta}_\tau^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) + \widehat{\mathbf{O}}_2, \\ \tau_+ &= \tau + t_+ + \frac{1}{\lambda} \ln \left| \frac{\varepsilon\kappa^s \widehat{w}}{\lambda} \right| + \widehat{\mathbf{O}}_1, \\ s_+ &= s \operatorname{sign}(\widehat{w}).\end{aligned}\tag{10.3}$$

Потенциалы

$$\widehat{\Theta}^s(\eta_+, \zeta, \tau) = \Theta^s(\eta_+, \zeta - \nu(\eta_+)\tau, \tau)\tag{10.4}$$

периодичны по ζ и квазипериодичны по τ ,

$$\widehat{\mathbf{O}}_1 = O^\bullet(\varepsilon^{7/8}) \ln^2 \varepsilon, \quad \widehat{\mathbf{O}}_2 = O^\bullet(\varepsilon^{1/8}) \ln^2 \varepsilon,$$

где $O^\bullet = O(\varepsilon^{-3/4})$ (см. обозначение (6.5)) с особыми переменными ρ_+ .

Производящая функция отображения (10.3) имеет вид

$$\begin{aligned}\mathcal{W} &= \langle \rho_+, \zeta \rangle + r_+ \tau + \frac{\widehat{w}}{\lambda} \ln \left| \frac{\varepsilon\kappa^s \widehat{w}}{\lambda e} \right| + \widehat{\Theta}^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) + \widetilde{\mathcal{W}}, \\ \widetilde{\mathcal{W}}(\rho_+, \zeta, r_+, \tau, s, t_+, \varepsilon) &= O^\bullet(\varepsilon^{1/8}) \ln^2 \varepsilon, \\ \rho d\zeta + r d\tau + \zeta_+ d\rho_+ + (\tau_+ - t_+) dr_+ &= d\mathcal{W}.\end{aligned}$$

Полагая $\vartheta_+ = \operatorname{sign}(\widehat{w})$, рассмотрим другую производящую функцию:

$$\rho d\zeta + r d\tau + \zeta_+ d\rho_+ - r_+ d\tau_+ = d\mathcal{R}, \quad \mathcal{R} = \mathcal{R}(\rho_+, \zeta, \tau_+, \tau, \vartheta_+, s, t_+, \varepsilon).$$

Так как $\mathcal{R} = \mathcal{W} - r_+(\tau_+ - t_+)$, имеем

$$\begin{aligned}\mathcal{R} &= \langle \rho_+, \zeta + \nu(\varepsilon\rho_+)t_+ \rangle - \frac{\vartheta_+}{\varepsilon\kappa^s} e^{\lambda(\tau_+ - \tau - t_+)} \\ &\quad - (\tau_+ - \tau - t_+) \mathbf{H}(\varepsilon\rho_+, \zeta) + \widehat{\Theta}^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) + \widetilde{\mathcal{R}}, \\ \widetilde{\mathcal{R}}(\rho_+, \zeta, \tau_+, \tau, \vartheta_+, s, \varepsilon, t_+) &= O^\bullet(\varepsilon^{1/8}) \ln^2 \varepsilon.\end{aligned}$$

Из равенства $r_+ = -\mathcal{R}_{\tau_+}$ и соотношений (10.2) вытекает, что

$$\widehat{w} = \frac{\lambda\vartheta_+}{\varepsilon\kappa^s} e^{\lambda(\tau_+ - \tau - t_+)} + O^\bullet(\varepsilon^{1/8}) \ln^2 \varepsilon.\tag{10.5}$$

Далее считаем, что $|\tau| < 1$, $|\tau_+| < 1$ и при больших положительных $\overline{K}$, K_0

$$\frac{1}{9} \ln \varepsilon \leqslant -\overline{K} - K_0 \leqslant -\lambda t_+ - \ln \varepsilon \leqslant -K_0.\tag{10.6}$$

При малых $\varepsilon > 0$ ввиду (10.5) неравенства (10.6) сильнее, чем (10.2).

Теперь траекториями сепаратрисного отображения мы будем считать последовательности вида

$$(\rho_k, \zeta_k, \tau_k, \vartheta_k, s_k, t_k), \quad t_k \in \mathbb{N}, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Равенства (10.3) заменяются на следующие:

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \rho - \widehat{\Theta}_\zeta^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) + (\tau_+ - \tau - t_+) \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta) + \widehat{\mathbf{O}}_2, \\ \zeta_+ &= \zeta + \nu(\varepsilon\rho_+)t_+ - (\tau_+ - \tau - t_+) \mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho_+, \zeta) + \widehat{\mathbf{O}}_1, \\ \widehat{\Theta}_\tau^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) &= \frac{\lambda(\varepsilon\rho_+)}{\varepsilon} \left(\frac{\vartheta}{\kappa^{s-}} e^{\lambda(\varepsilon\rho_+)(\tau-\tau_--t)} - \frac{\vartheta_+}{\kappa^s} e^{\lambda(\varepsilon\rho_+)(\tau_+-\tau-t_+)} \right) + \widehat{\mathbf{O}}_2, \\ s_+ &= s\vartheta_+. \end{aligned} \tag{10.7}$$

Здесь мы опускаем индексы k , пишем “+” вместо $k+1$ и “-” вместо $k-1$. Уравнения (10.7) аналогичны уравнениям Рауса из классической механики. Они частично гамильтоновы (относительно ζ и ρ) и частично лагранжевы (относительно τ).

§ 2. Построение траектории

Положим

$$\bar{\nu} = \begin{pmatrix} \nu \\ -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n+1}, \quad \bar{\partial} = \langle \nu, \partial/\partial\xi \rangle - \partial/\partial\tau.$$

Таким образом, $\bar{\partial}$ – дифференцирование на $\mathbb{T}^{n+1} = \{\xi, \tau\}$ вдоль постоянного векторного поля $\bar{\nu}$. Рассмотрим множества

$$J_0^s = \{(\eta, \xi, \tau) \in \overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^{n+1} : \bar{\partial}\Theta^s(\eta, \xi, \tau) = 0, \bar{\partial}^2\Theta^s(\eta, \xi, \tau) \neq 0\}. \tag{10.8}$$

В общей ситуации для любого $\eta = \eta^0$ множество $J_0^s|_{\eta=\eta^0} \subset \mathbb{T}^{n+1}$ содержит непустой набор гиперповерхностей, трансверсальных векторному полю $\bar{\nu}$.

Множества J_0^s полезно записать в координатах (ρ, ζ, τ) . Положим

$$\mathcal{J}_0^s = \left\{ (\rho, \zeta, \tau) \in \varepsilon^{-1}\overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n \times (-1, 1) : \widehat{\Theta}_\tau^s(\varepsilon\rho, \zeta, \tau) = 0, \widehat{\Theta}_{\tau\tau}^s(\varepsilon\rho, \zeta, \tau) \neq 0 \right\}. \tag{10.9}$$

Пусть $\pi: \frac{1}{\varepsilon}\overline{\mathcal{D}} \times \mathbb{T}^n \times (-1, 1) \rightarrow D \times \mathbb{T}^{n+1}$,

$$\pi(\rho, \zeta, \tau \bmod 1) = (\eta, \xi, \tau \bmod 1) = (\varepsilon\rho, \zeta - \nu(\varepsilon\rho)\tau, \tau \bmod 1), \quad -1 < \tau < 1.$$

Тогда $J_0^s = \pi(\mathcal{J}_0^s)$.

Рассмотрим уравнение

$$\widehat{\Theta}_\tau^s(\varepsilon\rho, \zeta, \tau) = z, \quad \tau, z \in \mathbb{R}. \tag{10.10}$$

Его можно решить относительно τ при малых значениях $|z|$ около любой точки $(\rho_0, \zeta_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_0^s$. Решение является гладкой функцией $\Psi^{s, \rho_0, \zeta_0, \tau_0}(\varepsilon\rho, \zeta, z)$ со

значениями в $(-2, 2)$. Положим

$$\begin{aligned} \mathcal{J}_{c', c''}^s &= \{(\rho_0, \zeta_0, \tau_0) \in \mathcal{J}_0^s : \text{функция } \Psi = \Psi^{s, \rho_0, \zeta_0, \tau_0}(\varepsilon \rho, \zeta, z) \text{ гладкая} \\ &\quad \text{при } \varepsilon^{3/4} |\rho - \rho_0| < c', \quad |\zeta - \zeta_0| < c', \quad |z| < c', \\ &\quad \text{причем } |\Psi_\rho| < \varepsilon^{3/4}/c'', \quad |\Psi_\zeta| < 1/c'', \quad |\Psi_z| < 1/c''\}, \\ J_{c', c''}^s &= \{(\eta, \xi, \tau) \in J_0 : (\eta, \xi, \tau) = \pi(\rho, \zeta, \tau), \quad (\rho, \zeta, \tau) \in \mathcal{J}_{c', c''}^s\}. \end{aligned}$$

Очевидно,

$$\bigcup_{c' > 0, c'' > 0} \mathcal{J}_{c', c''}^s = \mathcal{J}_0^s, \quad \bigcup_{c' > 0, c'' > 0} J_{c', c''}^s = J_0^s.$$

Ниже мы фиксируем достаточно малые c', c'' .

Конструкция траекторий сепаратрисного отображения основана на некоторой индуктивной процедуре. Далее используем обозначение $\Omega = (\rho, \zeta, \tau, \vartheta, s, t)$. Конечная последовательность векторов Ω обозначается $\mathbb{O}$:

$$\mathbb{O} = (\Omega_{-k}, \dots, \Omega_k), \quad \Omega_j = (\rho_j, \zeta_j, \tau_j, \vartheta_j, s_j, t_j), \quad -k \leq j \leq k,$$

где всегда предполагается, что Ω_{-k} не содержит координату t , т.е. $\Omega_{-k} = (\rho_{-k}, \zeta_{-k}, \tau_{-k}, \vartheta_{-k}, s_{-k})$. Более того, для краткости мы по умолчанию считаем, что верхние и нижние индексы в $\mathbb{O}$ (в Ω) автоматически переносятся на соответствующую последовательность Ω (на соответствующий вектор $(\rho, \zeta, \tau, \vartheta, s, t)$). Например, $\widehat{\mathbb{O}}^{(l)} = (\widehat{\Omega}_{-k}^{(l)}, \dots, \widehat{\Omega}_k^{(l)})$ и $\Omega_1' = (\rho_1', \zeta_1', \tau_1', \vartheta_1', s_1', t_1')$.

Постоянные, введенные раньше и те, что появятся далее, удовлетворяют ряду неравенств. Эти неравенства собраны в §6.

Пусть b_ρ, b_ζ, b_τ – положительные постоянные. Далее мы считаем, что они удовлетворяют (10.25)–(10.27). Для любых двух последовательностей Ω', Ω'' определим

$$\text{dist}(\Omega', \Omega'') = \begin{cases} +\infty, & \text{если } s' \neq s'', \text{ или } \vartheta' \neq \vartheta'', \text{ или } t' \neq t'', \\ \max\{b_\rho |\rho' - \rho''|, b_\zeta |\zeta' - \zeta''|, b_\tau |\tau' - \tau''|\}, & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Здесь $|\rho' - \rho''|$, $|\zeta' - \zeta''|$ и $|\tau' - \tau''|$ берутся относительно стандартной метрики в $\mathbb{R}^n$, $\mathbb{T}^n$ и $\mathbb{R}$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.1. Последовательность $\overline{\mathbb{O}} = (\overline{\Omega}_{-k}, \overline{\Omega}_{-k+1}, \dots, \overline{\Omega}_k)$, $k \geq 0$, называется квазитраекторией, если

- (i) $(\overline{\rho}_j, \overline{\zeta}_j, \overline{\tau}_j) \in \mathcal{J}_{c', c''}^{\overline{s}_j}$, $-k \leq j \leq k$,
- (ii) $\overline{t}_j \in \mathbb{N}$, $|\overline{\tau}_j| < 1$, $-k \leq j \leq k$,
- (iii) $K_0 \leq \lambda \overline{t}_j + \ln \varepsilon \leq K_0 + \overline{K}$, $-k < j \leq k$,
- (iv) $\overline{s}_{j+1} = \overline{s}_j \overline{\vartheta}_{j+1}$, $-k \leq j < k$.

В частности, $\overline{\mathbb{O}}$ – квазитраектория с $k = 0$, если

$$\overline{\mathbb{O}} = \overline{\Omega}_0 = (\overline{\rho}_0, \overline{\zeta}_0, \overline{\tau}_0, \overline{\vartheta}_0, \overline{s}_0), \quad (\overline{\rho}_0, \overline{\zeta}_0, \overline{\tau}_0) \in \mathcal{J}_{c', c''}^{\overline{s}_0}, \quad |\overline{\tau}_0| < 1.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.2. Пусть $b \in (0, 1)$ – постоянная. Тректория $\mathbb{O}$ системы (10.7) называется допустимой, если существует квазитраектория (код) $\overline{\mathbb{O}}$ такая, что

$$\text{dist}(\Omega_j, \overline{\Omega}_j) < b(2 - b^{1+k-|j|}) \quad \text{для любого целого } j \in [-k, k], \quad (10.11)$$

$$(\rho_{\pm k}, \zeta_{\pm k}, \tau_{\pm k}) \in \mathcal{J}_{c', c''}^{s_{\pm k}}. \quad (10.12)$$

Далее мы считаем, что $2b < c'$. Поэтому условия (10.12) можно заменить на равенства

$$\tau_{\pm k} = \Psi^{s_{\pm k}, \bar{\rho}_{\pm k}, \bar{\zeta}_{\pm k}, \bar{\tau}_{\pm k}}(\varepsilon \rho_{\pm k}, \zeta_{\pm k}, 0).$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 10.3. Пусть $\mathbb{O}$ – допустимая траектория с кодом $\overline{\mathbb{O}}$. Скажем, что квазитраектория (Ω_+^*, Ω_+) совместна с $\mathbb{O}$ справа, если

$$\begin{aligned} \rho_+^* &= \bar{\rho}_k, \quad \zeta_+^* = \bar{\zeta}_k, \quad \tau_+^* = \bar{\tau}_k, \quad s_+^* = \bar{s}_k, \quad \vartheta_+^* = \bar{\vartheta}_k, \quad s_+ = s_k \vartheta_+, \\ |\rho_+ - \rho_k + \hat{\Theta}_{\zeta}^{s_k}(\varepsilon \rho_+, \zeta_k, \tau_k) - (\tau_+ - \tau_k - t_+) \mathbf{H}_{\zeta}(\varepsilon \rho_+, \zeta_k)| &< \frac{b^2}{2b_{\rho}}, \\ |\zeta_+ - \zeta_k - \nu(\varepsilon \rho_+) t_+ + (\tau_+ - \tau_k - t_+) \mathbf{H}_{\rho}(\varepsilon \rho_+, \zeta_k)| &< \frac{b^2}{2b_{\zeta}}. \end{aligned} \quad (10.13)$$

Квазитраектория (Ω_-, Ω_-^*) совместна с $\mathbb{O}$ слева, если

$$\begin{aligned} \rho_-^* &= \bar{\rho}_{-k}, \quad \zeta_-^* = \bar{\zeta}_{-k}, \quad \tau_-^* = \bar{\tau}_{-k}, \quad s_-^* = \bar{s}_{-k}, \quad \vartheta_-^* = \bar{\vartheta}_{-k}, \quad s_{-k} = s_- \vartheta_{-k}, \\ |\rho_{-k} - \rho_- + \hat{\Theta}_{\zeta}^{s_-}(\varepsilon \rho_{-k}, \zeta_-, \tau_-) - (\tau_{-k} - \tau_- - \bar{t}) \mathbf{H}_{\zeta}(\varepsilon \rho_{-k}, \zeta_-)| &< \frac{b^2}{2b_{\rho}}, \\ |\zeta_{-k} - \zeta_- - \nu(\varepsilon \rho_{-k}) \bar{t} + (\tau_{-k} - \tau_- - \bar{t}) \mathbf{H}_{\rho}(\varepsilon \rho_{-k}, \zeta_-)| &< \frac{b^2}{2b_{\zeta}}. \end{aligned}$$

Отметим, что в этом определении единственное различие между Ω_+^* и $\bar{\Omega}_k$ состоит в том, что Ω_+^* не содержит координату t . Неравенства в условиях (10.13) вместе с условием (i) для (Ω_+^*, Ω_+) и условием $s_+ = s_k \vartheta_+$ означают, что Ω_+ приближенно является образом точки Ω_k при сепаратрисном отображении (10.7). Аналогичный смысл имеет условие совместности слева.

ЛЕММА 10.4 (лемма о присоединении, [66]). Пусть $\mathbb{O}^0 = (\Omega_{-k}^0, \dots, \Omega_k^0)$ – допустимая траектория с кодом $\overline{\mathbb{O}}$. Пусть также квазитраектории (Ω_-, Ω_-^*) , (Ω_+^*, Ω_+) совместны с $\mathbb{O}^0$ слева и справа соответственно. Тогда существует допустимая траектория $\hat{\mathbb{O}} = (\hat{\Omega}_{-k-1}, \dots, \hat{\Omega}_{k+1})$ с кодом

$$\begin{aligned} \overline{\mathbb{O}}^* &= (\overline{\Omega}_{-k-1}^*, \overline{\Omega}_{-k}^*, \dots, \overline{\Omega}_k^*, \overline{\Omega}_{k+1}^*), \\ \overline{\Omega}_{-k-1}^* &= \Omega_-, \quad \overline{\Omega}_{-k}^* = \Omega_-^*, \quad \overline{\Omega}_{-k+1}^* = \overline{\Omega}_{-k+1}, \quad \dots, \quad \overline{\Omega}_k^* = \overline{\Omega}_k, \quad \overline{\Omega}_{k+1}^* = \Omega_+. \end{aligned}$$

Итак, мы можем начать с некоторой допустимой траектории с $k = 0$. Если существуют левая и правая совместные квазитраектории, то с помощью леммы 10.4 можно продолжить допустимую траекторию, затем продолжить еще и т.д. Таким образом можно построить широкий класс траекторий, следующих предписанным кодам.

К сожалению, в отличие от обычной ситуации, имеющей место в символической динамике, нельзя выбрать бесконечный (или длинный) код заранее. Действительно, согласно определению 10.3 совместные квазитраектории определяются в терминах как кода $\overline{\mathbb{O}}$, так и соответствующей траектории $\mathbb{O}$.

§ 3. Доказательство леммы о присоединении

Сначала перепишем уравнения (10.7):

$$\begin{cases} \rho_+ = \rho - \widehat{\Theta}_\zeta^s(\varepsilon\rho_+, \zeta, \tau) + (\tau_+ - \tau - t_+)\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta) + \alpha, \\ \zeta_+ = \zeta + \nu(\varepsilon\rho_+)t_+ - (\tau^+ - \tau - t_+)\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho_+, \zeta) + \beta, \\ \tau = \Psi^{s, \bar{\rho}, \bar{\zeta}, \bar{\tau}}(\varepsilon\rho_+, \zeta, \gamma_0 + \gamma_1), \\ s_+ = s\vartheta_+, \end{cases} \quad (10.14)$$

где $(\bar{\rho}, \bar{\zeta}, \bar{\tau}) \in \mathcal{J}_0^s$ и

$$\begin{aligned} \alpha &= \alpha(\rho_+, \zeta, \tau_+, \tau, \vartheta_+, s, t_+, \varepsilon), \\ \beta &= \beta(\rho_+, \zeta, \tau_+, \tau, \vartheta_+, s, t_+, \varepsilon), \\ \gamma_0 &= \gamma_0(\tau_+, \tau, \tau_-, \vartheta_+, \vartheta, s, s_-, t, t_+, \varepsilon) \\ &= \frac{\lambda}{\varepsilon} \left(\frac{\vartheta}{\kappa^{s_-}} e^{\lambda(\tau - \tau_- - t)} - \frac{\vartheta_+}{\kappa^s} e^{\lambda(\tau_+ - \tau - t_+)} \right), \\ \gamma_1 &= \gamma_1(\rho_+, \rho, \zeta, \zeta_-, \tau_+, \tau, \tau_-, \vartheta_+, \vartheta, s, s_-, t, t_+, \varepsilon). \end{aligned}$$

Далее для краткости мы не пишем “дискретные” аргументы $\vartheta, \vartheta_+, s_-, s, t, t_+$, а также ε у функций $\alpha, \beta, \gamma_{0,1}$.

Пусть C – большая постоянная. Ввиду (10.7) и (10.6)

$$\begin{aligned} |\alpha| &\leq C\mathcal{E}_2, \quad |\beta| \leq C\mathcal{E}_1, \quad |\gamma_0| \leq Ce^{-K_0}, \quad |\gamma_1| \leq C\mathcal{E}_2, \\ \mathcal{E}_1 &= \varepsilon^{7/8} \ln^2 \varepsilon, \quad \mathcal{E}_2 = \varepsilon^{1/8} \ln^2 \varepsilon. \end{aligned} \quad (10.15)$$

Функции $\alpha, \beta, \gamma_0, \gamma_1$ удовлетворяют условию Липшица. Имеется в виду следующее. Положим

$$\begin{aligned} \alpha' &= \alpha(\rho'_+, \zeta', \tau'_+, \tau'), \\ \beta' &= \beta(\rho'_+, \zeta', \tau'_+, \tau'), \\ \gamma'_0 &= \gamma_0(\tau'_+, \tau', \tau'_-, \tau'), \\ \gamma'_1 &= \gamma_1(\rho'_+, \rho', \zeta', \zeta'_-, \tau'_+, \tau', \tau'_-, \tau'). \end{aligned}$$

Аналогично определим $\beta'', \alpha'', \gamma''_0, \gamma''_1$ с теми же $\vartheta, \vartheta_+, s_-, s, t, t_+, \varepsilon$. Тогда

$$\begin{aligned} |\alpha' - \alpha''| &\leq C\mathcal{E}_2(\varepsilon^{3/4}|\rho'_+ - \rho''_+| + |\zeta' - \zeta''| + |\tau'_+ - \tau''_+| + |\tau' - \tau''|), \\ |\beta' - \beta''| &\leq C\mathcal{E}_1(\varepsilon^{3/4}|\rho'_+ - \rho''_+| + |\zeta' - \zeta''| + |\tau'_+ - \tau''_+| + |\tau' - \tau''|), \\ |\gamma'_0 - \gamma''_0| &\leq Ce^{-K_0}(|\tau'_+ - \tau''_+| + |\tau' - \tau''| + |\tau'_- - \tau''_-|), \\ |\gamma'_1 - \gamma''_1| &\leq C\mathcal{E}_2(\varepsilon^{3/4}|\rho'_+ - \rho''_+| + \varepsilon^{3/4}|\rho' - \rho''| + |\zeta' - \zeta''| + |\zeta'_- - \zeta''_-| \\ &\quad + |\tau'_+ - \tau''_+| + |\tau' - \tau''| + |\tau'_- - \tau''_-|). \end{aligned} \quad (10.16)$$

Далее C считается липшицевой постоянной для $\Psi^{s, \bar{\rho}, \bar{\zeta}, \bar{\tau}}$ (т.е. $C > 1/c''$), а также для $\widehat{\Theta}_\zeta^s$, $\mathbf{H}_\zeta$, $\mathbf{H}_\rho$ и ν :

$$\begin{aligned} |\widehat{\Theta}_\zeta^s(\varepsilon\rho', \zeta', \tau') - \widehat{\Theta}_\zeta^s(\varepsilon\rho'', \zeta'', \tau'')| &\leq C(\varepsilon^{3/4}|\rho' - \rho''| + |\zeta' - \zeta''| + |\tau' - \tau''|), \\ |\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho', \zeta') - \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho'', \zeta'')| &\leq C(\varepsilon^{3/4}|\rho' - \rho''| + |\zeta' - \zeta''|), \\ |\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho', \zeta') - \mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho'', \zeta'')| &\leq C\varepsilon^{3/4}(\varepsilon^{3/4}|\rho' - \rho''| + |\zeta' - \zeta''|), \\ |\nu(\eta') - \nu(\eta'')| &\leq C|\eta' - \eta''|. \end{aligned}$$

Кроме того, мы считаем, что

$$|\mathbf{H}_\zeta| < C, \quad |\mathbf{H}_\rho| < C\varepsilon^{3/4}.$$

Для любой последовательности $\mathbb{O}'$, достаточно близкой к

$$\mathbb{O}^{0+} = (\Omega_-, \Omega_{-k}^0, \dots, \Omega_k^0, \Omega_+),$$

определим $\mathcal{Q}(\mathbb{O}') = \mathbb{O}'' = (\Omega_{-k-1}'', \dots, \Omega_{k+1}'')$ следующим образом. Пусть

$$\begin{aligned} \alpha'_j &= \alpha(\rho'_{j+1}, \zeta'_j, \tau'_{j+1}, \tau'_j), \quad \beta'_j = \beta(\rho'_{j+1}, \zeta'_j, \tau'_{j+1}, \tau'_j), \\ \gamma'_{0j} &= \gamma_0(\tau'_{j+1}, \tau'_j, \tau'_{j-1}), \\ \gamma'_{1j} &= \gamma_1(\rho'_{j+1}, \rho'_j, \zeta'_j, \zeta'_{j-1}, \tau'_{j+1}, \tau'_j, \tau'_{j-1}). \end{aligned}$$

Полагая для краткости $\Psi^{(j)} = \Psi^{\bar{s}_j, \bar{\rho}_j, \bar{\zeta}_j, \bar{\tau}_j}$, мы считаем, что

- (i) $\vartheta'_j = \vartheta'_j = \bar{\vartheta}_j$, $s'_j = s'_j = \bar{s}_j$, $t'_j = t'_j = \bar{t}_j$, $j = -k-1, \dots, k+1$;
- (ii) $\zeta'_0 = \zeta'_0$, $\rho'_0 = \rho'_0$;
- (iii) при $0 \leq j \leq k$

$$\begin{aligned} \rho'_{j+1} &= \rho'_j - \widehat{\Theta}_\zeta^{s_j}(\rho'_{j+1}, \zeta'_j, \tau'_j) + (\tau'_{j+1} - \tau'_j - \bar{t}_{j+1})\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho'_{j+1}, \zeta'_j) + \alpha'_j, \\ \zeta'_{j+1} &= \zeta'_j + \nu(\varepsilon\rho'_{j+1})\bar{t}_{j+1} - (\tau'_{j+1} - \tau'_j - \bar{t}_{j+1})\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho'_{j+1}, \zeta'_j) + \beta'_j; \end{aligned}$$

- (iv) при $-k-1 \leq j \leq -1$

$$\begin{aligned} \rho'_j &= \rho'_{j+1} + \widehat{\Theta}_\zeta^{s_j}(\rho'_{j+1}, \zeta'_j, \tau'_j) - (\tau'_{j+1} - \tau'_j - \bar{t}_{j+1})\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho'_{j+1}, \zeta'_j) - \alpha'_j, \\ \zeta'_j &= \zeta'_{j+1} - \nu(\varepsilon\rho'_{j+1})\bar{t}_{j+1} + (\tau'_{j+1} - \tau'_j - \bar{t}_{j+1})\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho'_{j+1}, \zeta'_j) - \beta'_j; \end{aligned}$$

- (v) при $-k \leq j \leq k$

$$\tau'_j = \Psi^{(j)}(\varepsilon\rho'_{j+1}, \zeta'_j, \gamma'_{0j} + \gamma'_{1j});$$

- (vi) $\tau''_{-k-1} = \Psi^{(-k-1)}(\varepsilon\rho'_{-k-1}, \zeta'_{-k-1}, 0)$, $\tau''_{k+1} = \Psi^{(k+1)}(\varepsilon\rho'_{k+1}, \zeta'_{k+1}, 0)$.

Согласно этому определению любая неподвижная точка оператора $\mathcal{Q}$ является траекторией системы (10.14). Такую траекторию можно считать решением с начальными условиями, заданными для ρ и ζ , и с граничными условиями, заданными для τ .

Определим множество

$$\begin{aligned} \mathcal{P}^s &= \{\mathbb{O} = (\Omega_{-k-1}, \dots, \Omega_{k+1}) : \text{dist}(\Omega_j, \Omega_j^{0+}) < \infty, |j| \leq k+1 \\ &\text{и } \Omega_l = \Omega_l^{0+}, |l| \leq s\}. \end{aligned}$$

Имеем очевидные соотношения:

$$\mathbb{O}^{0+} \in \mathcal{P}^k \subset \mathcal{P}^{k-1} \subset \dots \subset \mathcal{P}^0 \subset \mathcal{P}^{-1} = \mathcal{P}^{-2} = \dots$$

В соответствии с определением $\mathbb{O}^{0+}$ и $\mathcal{Q}$

$$\text{если } \mathbb{O} \in \mathcal{P}^s, \quad s \leq k, \quad \text{и } \mathcal{Q}(\mathbb{O}) \text{ определен, то } \mathcal{Q}(\mathbb{O}) \in \mathcal{P}^{s-1}. \quad (10.17)$$

Положим $\mathcal{Q}^l(\mathbb{O}^{0+}) = \mathbb{O}^{(l)}$. В частности, $\mathbb{O}^{(0)} = \mathbb{O}^{0+}$.

ЛЕММА 10.5. *Предположим, что постоянные $b, C, b_\rho, b_\zeta, b_\tau, K_0, \varepsilon$ удовлетворяют неравенствам из § 6. Тогда для любого $l = 0, 1, 2, \dots$*

$$\mathbb{O}^{(l)} \in \mathcal{P}^{k-l}, \quad (10.18)$$

$$\text{dist}(\Omega_j^{(l)}, \Omega_j^{(l+1)}) < b^{4+2k-2|j|+l}, \quad |j| \geq k-l. \quad (10.19)$$

Согласно (10.19), последовательность $\mathbb{O}^{(l)}$, $l = 0, 1, 2, \dots$, сходится. Рассмотрим точку

$$\widehat{\mathbb{O}} = \lim_{l \rightarrow \infty} \mathbb{O}^{(l)}. \quad (10.20)$$

Тогда $\widehat{\mathbb{O}} = \mathcal{Q}(\widehat{\mathbb{O}})$, так что $\widehat{\mathbb{O}}$ – траектория системы (10.14).

СЛЕДСТВИЕ 10.6. *Так как $\text{dist}(\Omega_j^{(l)}, \Omega_j^{(l+1)}) = 0$ при $|j| < k-l$, имеем:*

$$\text{dist}(\widehat{\Omega}_j, \Omega_j^{0+}) \leq b^{4+3k-3|j|}(1+b+b^2+\dots), \quad |j| \leq k+1. \quad (10.21)$$

ЛЕММА 10.7. *Траектория (10.20) является допустимой с кодом $\overline{\Omega}^*$.*

Лемма 10.4 следует из лемм 10.5 и 10.7.

§ 4. Доказательство леммы 10.5

Включения (10.18) следуют из (10.17). Докажем (10.19), используя индукцию по l . Сначала проверим базу индукции. Последовательности $\mathbb{O}^{(0)}$ и $\mathbb{O}^{(1)}$ отличаются только в компонентах $\tau_{\pm k}, \zeta_{\pm(k+1)}, \rho_{\pm(k+1)}$. Далее мы используем свойства постоянных $b, b_\rho, b_\zeta, b_\tau$, собранные в § 6. Ввиду (10.15) имеем:

$$b_\rho |\rho_{-k-1}^{(1)} - \rho_{-k-1}^{(0)}| \leq b_\rho \left(|\alpha_{-k-1}^{(0)}| + \frac{1}{2} b^2 / b_\rho \right) \leq b_\rho \left(C \mathcal{E}_2 + \frac{1}{2} b^2 / b_\rho \right) \leq b^2,$$

$$b_\zeta |\zeta_{-k-1}^{(1)} - \zeta_{-k-1}^{(0)}| \leq b_\zeta \left(|\beta_{-k-1}^{(0)}| + \frac{1}{2} b^2 / b_\zeta \right) \leq b_\zeta \left(C \mathcal{E}_1 + \frac{1}{2} b^2 / b_\zeta \right) \leq b^2,$$

$$b_\rho |\rho_{k+1}^{(1)} - \rho_{k+1}^{(0)}| \leq b_\rho \left(|\alpha_k^{(0)}| + \frac{1}{2} b^2 / b_\rho \right) \leq b_\rho \left(C \mathcal{E}_2 + \frac{1}{2} b^2 / b_\rho \right) \leq b^2,$$

$$b_\zeta |\zeta_{k+1}^{(1)} - \zeta_{k+1}^{(0)}| \leq b_\zeta \left(|\beta_k^{(0)}| + \frac{1}{2} b^2 / b_\zeta \right) \leq b_\zeta \left(C \mathcal{E}_1 + \frac{1}{2} b^2 / b_\zeta \right) \leq b^2.$$

Наконец,

$$\begin{aligned} b_\tau |\tau_{\pm k}^{(1)} - \tau_{\pm k}^{(0)}| &= b_\tau |\Psi^{(\pm k)}(\varepsilon \rho_{\pm k+1}^{(0)}, \zeta_{\pm k}^{(0)}, \gamma_{0\pm k}^{(0)} + \gamma_{1\pm k}^{(0)}) - \Psi^{(\pm k)}(\varepsilon \rho_{\pm k}^{(0)}, \zeta_{\pm k}^{(0)}, 0)| \\ &\leq b_\tau C (\varepsilon^{3/4} |\rho_{\pm k+1}^{(0)} - \rho_{\pm k}^{(0)}| + |\gamma_{0\pm k}^{(0)}| + |\gamma_{1\pm k}^{(0)}|) \\ &\leq b_\tau C^2 (C \varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon| + e^{-K_0} + \mathcal{E}_2) \leq b^4. \end{aligned}$$

Теперь предположим, что (10.19) выполнено при некотором $l \geq 0$. Полагая $\mathbb{O}^{(l)} = \mathbb{O}'$, $\mathbb{O}^{(l+1)} = \mathbb{O}''$, $\mathbb{O}^{(l+2)} = \mathbb{O}'''$, мы оценим $\text{dist}(\Omega_j''', \Omega_j'')$.

Согласно соотношениям (ii) из определения $\mathcal{Q}$,

$$\zeta_0''' = \zeta_0'' = \zeta_0^{0+}, \quad \rho_0''' = \rho_0'' = \rho_0^{0+}.$$

Используя (iii) и оценки (10.16), при $0 \leq j \leq k$ получаем, что $b_\rho |\rho_{j+1}''' - \rho_{j+1}''|$ равняется

$$\begin{aligned} & b_\rho |\rho_j'' - \widehat{\Theta}_\zeta^{\bar{s}j}(\varepsilon \rho_{j+1}'', \zeta_j'', \tau_j'') + (\tau_{j+1}'' - \tau_j'' - \bar{t}_{j+1}) \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon \rho_{j+1}'', \zeta_j'') + \alpha_j'' \\ & \quad - \rho_j' + \widehat{\Theta}_\zeta^{\bar{s}j}(\varepsilon \rho_{j+1}', \zeta_j', \tau_j') - (\tau_{j+1}' - \tau_j' - \bar{t}_{j+1}) \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon \rho_{j+1}', \zeta_j') - \alpha_j'| \\ & \leq b_\rho |\rho_j'' - \rho_j'| + b_\rho C(\varepsilon^{3/4} |\rho_{j+1}'' - \rho_{j+1}'| + |\zeta_j'' - \zeta_j'| + |\tau_j'' - \tau_j'|) \\ & \quad + b_\rho C |\ln \varepsilon| (\varepsilon^{3/4} |\rho_{j+1}'' - \rho_{j+1}'| + |\zeta_j'' - \zeta_j'|) \\ & \quad + b_\rho C (|\tau_{j+1}'' - \tau_{j+1}'| + |\tau_j'' - \tau_j'|) \\ & \quad + b_\rho C \mathcal{E}_2(\varepsilon^{3/4} |\rho_{j+1}'' - \rho_{j+1}'| + |\zeta_j'' - \zeta_j'| + |\tau_{j+1}'' - \tau_{j+1}'| + |\tau_j'' - \tau_j'|) \\ & < b^{4+2k-2j+l} \left[1 + b_\rho C \left(\frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho b^2} + \frac{1}{b_\zeta} + \frac{1}{b_\tau} \right) \right. \\ & \quad \left. + b_\rho C \left(\frac{\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|}{b_\rho b^2} + \frac{|\ln \varepsilon|}{b_\zeta} + \frac{1}{b_\tau b^2} + \frac{1}{b_\tau} \right) \right. \\ & \quad \left. + b_\rho C \mathcal{E}_2 \left(\frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho b^2} + \frac{1}{b_\zeta} + \frac{1}{b_\tau b^2} + \frac{1}{b_\tau} \right) \right] \\ & < b^{4+2k-2j+l} \left[1 + \frac{3C\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|}{b^2} + 3 \frac{b_\rho}{b_\zeta} C |\ln \varepsilon| + 5 \frac{b_\rho}{b_\tau} \frac{C}{b^2} \right] \\ & \leq b^{4+2k-2(j+1)+l+1}. \end{aligned}$$

Величина $b_\zeta |\zeta_{j+1}''' - \zeta_{j+1}''|$ равна

$$\begin{aligned} & b_\zeta |\zeta_j'' + \nu(\varepsilon \rho_{j+1}') \bar{t}_{j+1} - (\tau_{j+1}'' - \tau_j'' - \bar{t}_{j+1}) \mathbf{H}_\rho(\varepsilon \rho_{j+1}'', \zeta_j'') + \beta_j'' \\ & \quad - \zeta_j' - \nu(\varepsilon \rho_{j+1}') \bar{t}_{j+1} + (\tau_{j+1}' - \tau_j' - \bar{t}_{j+1}) \mathbf{H}_\rho(\varepsilon \rho_{j+1}', \zeta_j') - \beta_j'| \\ & \leq b_\zeta |\zeta_j'' - \zeta_j'| + b_\zeta C \varepsilon |\ln \varepsilon| |\rho_{j+1}'' - \rho_{j+1}'| \\ & \quad + b_\zeta C \varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon| (\varepsilon^{3/4} |\rho_{j+1}'' - \rho_{j+1}'| + |\zeta_j'' - \zeta_j'|) \\ & \quad + b_\zeta C \varepsilon^{3/4} (|\tau_{j+1}'' - \tau_{j+1}'| + |\tau_j'' - \tau_j'|) \\ & \quad + b_\zeta C \mathcal{E}_1(\varepsilon^{3/4} |\rho_{j+1}'' - \rho_{j+1}'| + |\zeta_j'' - \zeta_j'| + |\tau_{j+1}'' - \tau_{j+1}'| + |\tau_j'' - \tau_j'|) \\ & < b^{4+2k-2j+l} \left[1 + b_\zeta \frac{C \varepsilon |\ln \varepsilon|}{b_\rho b^2} + b_\zeta C \varepsilon^{3/4} \left(\frac{\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|}{b_\rho b^2} + \frac{|\ln \varepsilon|}{b_\zeta} + \frac{1}{b_\tau b^2} + \frac{1}{b_\tau} \right) \right. \\ & \quad \left. + b_\zeta C \mathcal{E}_1 \left(\frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho b^2} + \frac{1}{b_\zeta} + \frac{1}{b_\tau b^2} + \frac{1}{b_\tau} \right) \right] \\ & \leq b^{4+2k-2j+l} \left[1 + 2 \frac{b_\zeta}{b_\rho} \frac{C \varepsilon |\ln \varepsilon|}{b^2} + 3 \varepsilon^{3/4} C |\ln \varepsilon| + 4 \frac{b_\zeta}{b_\tau} C \varepsilon^{3/4} \right] \\ & \leq b^{4+2k-2(j+1)+l+1}. \end{aligned}$$

При $k \leq j \leq -1$ мы используем (iv). Аналогичные вычисления дают оценки

$$b_\rho |\rho_j''' - \rho_j''| \leq b^{4+2k+2j+l+1}, \quad b_\zeta |\zeta_j''' - \zeta_j''| \leq b^{4+2k+2j+l+1}.$$

Теперь обратимся к переменной τ . При $-k \leq j \leq k$ величина $b_\tau |\tau_j''' - \tau_j''|$ равна

$$\begin{aligned} & b_\tau |\Psi^{(j)}(\varepsilon \rho_{j+1}'', \zeta_j'', \gamma_{0j}'' + \gamma_{1j}'') - \Psi^{(j)}(\varepsilon \rho_{j+1}', \zeta_j', \gamma_{0j}' + \gamma_{1j}')| \\ & \leq b_\tau C(\varepsilon^{3/4} |\rho_j'' - \rho_j'| + |\zeta_{j+1}'' - \zeta_{j+1}'| + |\gamma_{0j}'' - \gamma_{0j}'| + |\gamma_{1j}'' - \gamma_{1j}'|) \\ & \leq b_\tau C b^{4+2k-2|j|+l} \left[\frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho b^2} + \frac{1}{b_\zeta} + C e^{-K_0} \left(\frac{1}{b_\tau b^2} + \frac{1}{b_\tau} + \frac{b^2}{b_\tau} \right) \right. \\ & \quad \left. + C \mathcal{E}_2 \left(\frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho b^2} + \frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho} + \frac{1}{b_\zeta} + \frac{1}{b_\zeta b^2} + \frac{1}{b_\tau b^2} + \frac{1}{b_\tau} + \frac{b^2}{b_\tau} \right) \right] \\ & \leq C b^{4+2k-2|j|+l} \left[3 \frac{b_\tau}{b_\rho b^2} C \varepsilon^{3/4} + 3 \frac{b_\tau}{b_\zeta} C + 3 \frac{C^2}{b^2} e^{-K_0} + 3 \frac{C^2 \mathcal{E}_2}{b^2} \right] \\ & \leq b^{4+2k-2|j|+l+1}. \end{aligned}$$

Имеем также:

$$\begin{aligned} b_\tau |\tau_{-k-1}''' - \tau_{-k-1}''| &= b_\tau |\Psi^{(-k-1)}(\varepsilon \rho_{-k-1}'', \zeta_{-k-1}'', 0) - \Psi^{(-k-1)}(\varepsilon \rho_{-k-1}', \zeta_{-k-1}', 0)| \\ &\leq b_\tau C \left(\frac{\varepsilon^{3/4} b^2}{b_\rho} + \frac{1}{b_\zeta} \right) b^{2+l} \leq b^{3+l}, \\ b_\tau |\tau_{k+1}''' - \tau_{k+1}''| &= b_\tau |\Psi^{(k+1)}(\varepsilon \rho_{k+1}'', \zeta_{k+1}'', 0) - \Psi^{(k+1)}(\varepsilon \rho_{k+1}', \zeta_{k+1}', 0)| \\ &\leq b_\tau C \left(\frac{\varepsilon^{3/4}}{b_\rho b^2} + \frac{1}{b_\zeta b^2} \right) b^{2+l} \leq b^{3+l}. \end{aligned}$$

Лемма 10.5 доказана.

§ 5. Доказательство леммы 10.7

Включения (10.12) с $k+1$ вместо k следуют из определения $\widehat{\mathbb{O}}$. Зафиксируем индекс $j \in [-k, k]$. Так как исходная траектория $\mathbb{O}^{(0)}$ допустима с кодом $\overline{\mathbb{O}}$, имеем:

$$\text{dist}(\Omega_j^0, \overline{\Omega}_j) < b(2 - b^{1+k-|j|}) \quad (10.22)$$

(см. (10.11)). Чтобы доказать, что $\widehat{\mathbb{O}}$ допустима, следует проверить, что

$$\text{dist}(\widehat{\Omega}_j, \overline{\Omega}_j) < b(2 - b^{2+k-|j|}), \quad (10.23)$$

$$\text{dist}(\widehat{\Omega}_{\pm(k+1)}, \Omega_{\pm}) < b(2 - b). \quad (10.24)$$

Ввиду (10.21) и (10.22)

$$\begin{aligned} \text{dist}(\widehat{\Omega}_j, \overline{\Omega}_j) &\leq \text{dist}(\widehat{\Omega}_j, \Omega_j^{0+}) + \text{dist}(\Omega_j^{0+}, \overline{\Omega}_j) \\ &< b^{4+3k-3|j|} (1 + b + b^2 + \dots) + b(2 - b^{1+k-|j|}), \end{aligned}$$

откуда получаем (10.23). Неравенство (10.24) следует из (10.21)|_{|j|=k+1}.

§ 6. Соотношения между постоянными

(a) Соотношения между ε , $\mathcal{E}_{1,2}$, $\overline{K}$, K_0 :

$$\varepsilon^{7/8} \ln^2 \varepsilon = \mathcal{E}_1, \quad \varepsilon^{1/8} \ln^2 \varepsilon = \mathcal{E}_2, \quad \overline{K} + K_0 < \frac{1}{9} |\ln \varepsilon|.$$

(b) Постоянная C :

$$C > 1, \quad C > 1/c'', \quad C > |H_\zeta|, \quad C > |H_\rho|,$$

C – липшицева постоянная для $\hat{\Theta}, \Psi, \mathbf{H}_\zeta, \mathbf{H}_\rho$.

(c) Постоянные b , b_ρ , b_ζ , b_τ :

$$b < 1/3, \quad 2b < c',$$

$$b_\rho = \frac{b^5}{60C^3} e^{K_0} > 1, \tag{10.25}$$

$$b_\tau = \frac{b^4}{3C^2} e^{K_0}, \tag{10.26}$$

$$b_\zeta = \frac{b_\tau b}{16C} \varepsilon^{-3/4}. \tag{10.27}$$

Наконец, выпишем неформальные соотношения между основными постоянными: b , C , $b_\rho \sim 1$,

$$\varepsilon < \mathcal{E}_1 < \mathcal{E}_2 < b < 1 < C, \quad b_\rho < b_\tau < e^{K_0} < b_\zeta.$$

Глава 11. Диффузия Арнольда в априори неустойчивых системах

В этой главе мы докажем теоремы 1.6 и 1.7. Теорема 1.6 выполняется при типичном возмущении H_1 . В §2 формулируются эти условия типичности. Затем они проверяются для H_1 (1.14). Там же интервал $\mathcal{D}$ представляется в виде объединения трех подмножеств: $\mathcal{D} = \mathcal{D}_N \cup \mathcal{D}_{CR} \cup \mathcal{D}_V$ (нерезонансного, четкого и нечеткого резонансного множеств). Каждое из них является конечным набором интервалов. Динамика существенно различна, когда y (или η) лежит в разных множествах, поэтому приходится разбираться с ними по отдельности. Сначала (§3) мы показываем, как проходить через нерезонансный интервал. Затем (§4) мы имеем дело с четким резонансным интервалом. В §5–§8 мы рассматриваем случай нечеткого интервала. В §10 содержатся доказательства некоторых технических утверждений.

Далее мы считаем, что выполнены условия **Н₀1–Н₀4**. Необходимые сведения из предыдущих параграфов – формулировка результатов (§5 введения), формулы для сепаратрисного отображения (10.7) и лемма 10.4.

§ 1. Предварительные соображения

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.1. *Предположим, что $H_1(y, x, 0, 0, t) \in C^j(\mathcal{D}_0 \times \mathbb{T}^2, \mathbb{R})$ и*

$$\nu(y^0) = p/q + \delta, \quad p \in \mathbb{Z}, \quad q \in \mathbb{N}, \quad q < \varepsilon^{-1/4}/2.$$

Тогда при достаточно малых ε

$$|\mathbf{H}(y^0, x + p/q) - \mathbf{H}(y^0, x)| < C\delta^j q^j. \quad (11.1)$$

СЛЕДСТВИЕ 11.2. Рассмотрим функцию $\tilde{\mathbf{H}}(y^0, x) = \frac{1}{q} \sum_{l=1}^q \mathbf{H}(y^0, x + l/q)$. Тогда $\tilde{\mathbf{H}}$ $1/q$ -периодична по x и

$$|\mathbf{H}(y^0, x) - \tilde{\mathbf{H}}(y^0, x)| < C\delta^j q^{j+1}.$$

Доказательство предложения 11.1 содержится в § 10.

Некоторые вычисления для гамильтониана (1.14). Здесь мы получим явные формулы для Θ^+ и $\mathbf{H}$ в системе с гамильтонианом (1.14). Так как в этом случае $\nu(y) = y$, получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(y, x) = & a(\phi(y/\varepsilon^{1/4}) \cos(2\pi x) + \phi(1/\varepsilon^{1/4}) \cos(2\pi t) \\ & + b\phi((y-1)/\varepsilon^{1/4}) \cos(2\pi(x-t)) \\ & + b\phi((y+1)/\varepsilon^{1/4}) \cos(2\pi(x+t))). \end{aligned}$$

На невозмущенной сепаратрисе $\gamma^+ = \{(v, u) : v^2/2 + \Omega^2 \cos(2\pi u) = \Omega^2, v > 0\}$ естественная параметризация задается равенством

$$\cos(2\pi u(t)) = 1 + \frac{i}{\operatorname{sh}(2\pi\Omega t) - i} - \frac{i}{\operatorname{sh}(2\pi\Omega t) + i}, \quad i = \sqrt{-1}.$$

Функция $H_*^+(y, \xi, \tau, t)$ равна

$$\begin{aligned} & a(\cos(2\pi u(t)) - 1)(\cos(2\pi(\xi + yt)) + \cos(2\pi(t - \tau))) \\ & + b\cos(2\pi(\xi + \tau + yt - t)) + b\cos(2\pi(\xi - \tau + yt + t))). \end{aligned}$$

В результате прямого вычисления получаем:

$$\begin{aligned} \Theta^+(y, \xi, \tau) = & \left(\frac{y}{\operatorname{sh} y} \cos(2\pi\xi) + \frac{1}{\operatorname{sh} y} \cos(2\pi\tau) \right. \\ & \left. + b \frac{y-1}{\operatorname{sh}(y-1)} \cos(2\pi(\xi + \tau)) + b \frac{y+1}{\operatorname{sh}(y+1)} \cos(2\pi(\xi - \tau)) \right). \end{aligned}$$

Здесь мы воспользовались тем, что $\Omega = \pi/2$ и $a = \pi^2/8$. Функцию $\frac{q}{\operatorname{sh} q}$ в этом равенстве следует доопределить в $q = 0$ по непрерывности.

§ 2. Четкие и нечеткие множества

В этом параграфе мы сформулируем условия **H₁1–H₁3** (условия типичности для возмущения H_1) и разделим $\mathcal{D}$ на три множества $\mathcal{D}_N$, $\mathcal{D}_{CR}$ и $\mathcal{D}_V$. Прохождение траектории через каждое из этих множеств будет изучаться по отдельности.

Далее мы будем строить траектории, на которых $s \equiv \vartheta \equiv +$. Это несколько ограничивает свободу действий, но упрощает обозначения. В дальнейшем индексы s не пишем.

Пусть J_0 определено с помощью (10.8). Рассмотрим множества

$$j_{\pm}(\eta) = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2 : (\eta, \xi, \tau) \in J_0, \pm\Theta_{\xi}(\eta, \xi, \tau) > 0\}. \quad (11.2)$$

Пусть $g^{\eta, t}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$ – фазовый поток векторного поля $\bar{\nu}$:

$$g^{\eta, t}(\xi, \tau) = (\xi, \tau) + \bar{\nu}(\eta)t = (\xi + \nu(\eta)t, \tau - t).$$

Рассмотрим отображение $\text{pr}_{\bar{\nu}}: \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}_0 = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2 : \tau = 0\}$,

$$\text{pr}_{\bar{\nu}}(\xi, \tau) = g^{\eta, \{\tau\}}(\xi, \tau) \equiv (\xi + \nu(\eta)\{\tau\}, 0),$$

где $\{\tau\} \in [0, 1)$ – дробная часть вещественного числа τ . Это отображение является “проекцией” на окружность $\mathbb{T}_0$ вдоль векторного поля $\bar{\nu}(\eta)$. Эта проекция разрывна на $\mathbb{T}_0$.

Для любого $0 \leq \alpha < 1/2$ и множества $S \subset \mathbb{T}$ положим

$$S - \alpha = \{\xi \in S : (\xi - \alpha, \xi + \alpha) \subset S\}.$$

Н₁1. Существует $c_* > 0$, не зависящее от $\eta \in \bar{\mathcal{D}}$, такое, что множества $\text{pr}_{\bar{\nu}} j_{\pm}(\eta) - 2c_*$ непусты.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.3. Множество C^j -гладких функций $\Theta(\eta, \xi, \tau)$, $2 \leq j \leq \omega$, удовлетворяющих **Н₁1**, открыто и плотно в топологии C^j .

Доказательство утверждения 11.3 опустим (см. [66]).

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.4. Предположим, что выполнено условие **Н₁1** и c_* – соответствующая постоянная. Назовем $\eta \in \bar{\mathcal{D}}$ K -четким, если

$$\bigcup_{0 \leq t \leq K-1} g^{\eta, t}(\text{pr}_{\bar{\nu}} j_{\pm} - c_*) = \mathbb{T}^2.$$

Иначе η называется K -нечетким.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.5. Пусть $\eta \in \bar{\mathcal{D}}$ K -нечеткое и $I \subset \text{pr}_{\bar{\nu}} j_{\pm}(\eta) - c_*$ – интервал длины $|I|$. Тогда существуют $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$ такие, что

$$q \leq K - 1, \quad q < \frac{2}{|I|}, \quad \left| \nu(\eta) - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{qK}. \quad (11.3)$$

СЛЕДСТВИЕ 11.6. Если выполнено условие **Н₁1**, то $q < 1/c_*$ в (11.3). Так что, согласно предложению 11.5, нечеткие значения η собраны в интервалы вокруг резонансов низких порядков. Количество этих интервалов конечно и не зависит от ε .

Доказательство предложения 11.5 содержится в § 10. Далее

$$K = \bar{K}/\lambda - 4, \quad \bar{K} = |\ln \varepsilon|/10. \quad (11.4)$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.7. Назовем $\eta \in \overline{\mathcal{D}}$ существенным, если

$$\frac{|\ln \varepsilon|}{\lambda} \max_{\zeta \in \mathbb{T}} |\mathbf{H}_\zeta(\eta, \zeta)| > b.$$

Существенные точки $\eta \in \overline{\mathcal{D}}$ образуют интервалы, на которых $\nu(\eta)$ близки к резонансам не очень высоких порядков. Точнее, имеем следующее предложение.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.8. Пусть $\eta \in \overline{\mathcal{D}}$ существенно и H_1 C^j -гладкий, $j \geq 2$. Тогда существуют $k, k_0 \in \mathbb{Z}$, $|k| < c^{-1}(|\ln \varepsilon|/b)^{1/(j-1)}$ такие, что

$$|k\nu(\eta) + k_0| \leq \varepsilon^{1/4}. \quad (11.5)$$

Доказательство предложения 11.8 следует из оценки $|H_1^{l,l_0}| < c_1^{-1}(|l| + |l_0|)^{-j}$ для коэффициентов Фурье функции H_1 и определения функции $\mathbf{H}$.

Пусть $\mathcal{E}$ – множество существенных точек и $\mathcal{D}_C$ – множество K -четких точек в $\overline{\mathcal{D}}$, где K удовлетворяет (11.4). Назовем

$$\mathcal{D}_N = \mathcal{D}_C \setminus \mathcal{E}, \quad \mathcal{D}_{CR} = \mathcal{D}_C \cap \mathcal{E}, \quad \mathcal{D}_V = \overline{\mathcal{D}} \setminus \mathcal{D}_C$$

нерезонансным, четким резонансным и нечетким резонансным множеством соответственно. Тогда $\overline{\mathcal{D}} = \mathcal{D}_N \cup \mathcal{D}_{CR} \cup \mathcal{D}_V$. Множества $\mathcal{D}_N$, $\mathcal{D}_{CR}$ и $\mathcal{D}_V$ – конечные наборы интервалов.

Рассмотрим резонанс $\eta = \eta^0$, порождающий нечеткий интервал $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}_V$ (см. следствие 11.6). Обозначим $\nu_0 = \nu(\eta^0) = p_0/q_0$, где $p_0 \in \mathbb{Z}$, $q_0 \in \mathbb{N}$, $q_0 < 2/c_*$ и дробь p_0/q_0 несократима. Рассмотрим две функции:

$$F_+(\eta^0, \zeta) = \max_{u \in [-q_0, 0]} \{\Theta_\xi(\eta^0, \zeta - \nu_0 u, u) : (\eta^0, \zeta - \nu_0 u, u) \in \overline{\mathcal{J}}_0\},$$

$$F_-(\eta^0, \zeta) = \min_{u \in [-q_0, 0]} \{\Theta_\xi(\eta^0, \zeta - \nu_0 u, u) : (\eta^0, \zeta - \nu_0 u, u) \in \overline{\mathcal{J}}_0\}.$$

Очевидно, что если F_+ определена в точке ζ , то F_- тоже определена в ζ (и наоборот), и, более того, $F_+(\eta^0, \zeta) \geq F_-(\eta^0, \zeta)$. В типичной ситуации $F_\pm$ определены при всех ζ (см. предложение 11.10 ниже).

Функция $\Theta(\eta^0, \zeta - \nu_0 u, u)$ q_0 -периодична по u . Поэтому $F_\pm$ могут быть определены как максимум и минимум по $u \in \mathbb{R}$. Функции $F_\pm(\eta^0, \zeta)$ $1/q_0$ -периодичны по ζ . Определим усреднение:

$$\langle F_\pm \rangle(\eta^0) = q_0 \int_0^{1/q_0} F_\pm(\eta^0, \zeta) d\zeta.$$

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 11.9. Назовем функцию $f: \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$ кусочно гладкой, если существуют конечный набор точек ¹² $\varphi_1, \dots, \varphi_k \in \mathbb{T}$ и непрерывные функции $f_j: [\varphi_j, \varphi_{j+1}] \rightarrow \mathbb{R}$ такие, что

- 1) f_j гладкие на интервалах $(\varphi_j, \varphi_{j+1}) \subset \mathbb{T}$,
- 2) $f|_{(\varphi_j, \varphi_{j+1})} = f_j$.

¹²Предполагается, что $\varphi_1, \dots, \varphi_k$ упорядочены на окружности, т.е., двигаясь от φ_j к φ_{j+1} в положительном направлении, мы не встретим других точек φ_s (здесь $\varphi_{k+1} = \varphi_1$).

Отметим, что согласно этому определению кусочно гладкая функция может быть разрывной.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.10. Для C^j -типичной Θ

1) $\pm \langle F_{\pm} \rangle > 0$;

2) $F_+ = F_-$ в не более чем конечном числе точек $\zeta_1, \dots, \zeta_k \in \mathbb{T}$, где для достаточно малых $|\delta|$ выполнены следующие условия трансверсальности:

$$F_+(\eta^0, \zeta_j + \delta) - F_-(\eta^0, \zeta_j + \delta) > 2c_F |\delta|, \quad c_F > 0, \quad j = 1, \dots, k;$$

3) $F_{\pm}(\eta^0, \zeta) = \Theta_{\xi}(\eta^0, \zeta - \nu_0 \gamma_{\pm}(\zeta), \gamma_{\pm}(\zeta))$, где для некоторого $c'_F > 0$

$$\bar{\partial} \Theta(\eta^0, \zeta - \nu_0 \gamma_{\pm}(\zeta), \gamma_{\pm}(\zeta)) = 0, \quad |\bar{\partial}^2 \Theta(\eta^0, \zeta - \nu_0 \gamma_{\pm}(\zeta), \gamma_{\pm}(\zeta))| \geq 2c'_F; \quad (11.6)$$

4) функции $\gamma_{\pm}$ и $F_{\pm}$ кусочно C^{j-1} -гладкие по ζ .

Типичность здесь понимается в том смысле, что множество Θ , удовлетворяющих 1)–4), содержит открытое и плотное в C^j -топологии подмножество пространства C^j .

Доказательство предложения 11.10 опустим (см. [66]).

Н₁2. Для любого η^0 , порождающего нечеткий интервал, функция $\Theta(\eta^0, \zeta, \tau)$ типична в смысле предложения 11.10.

Н₁3. Для любого η^0 , порождающего нечеткий интервал, функция $\mathbf{H}(\eta^0, \zeta)$, $\zeta = \zeta \bmod \frac{1}{q_0}$, имеет глобальный максимум в единственной точке $\zeta_* = \zeta_*(\eta^0)$ и этот максимум невырожден.

Условия Н₁1–Н₁3 и система (1.14). Укажем идею доказательства теоремы 1.7. Нам надо проверить, что функции $\mathbf{H}$ и $\Theta = \Theta^+$, построенные в конце § 1, удовлетворяют условиям **Н₁1–Н₁3**. Сначала положим $b = 0$. Так как $\bar{\partial} = \eta \partial / \partial \xi - \partial / \partial \tau$, имеем:

$$\begin{aligned} \bar{\partial} \Theta(\eta, \xi, \tau) &= -2\pi \left(\frac{\eta^2}{\operatorname{sh} \eta} \sin(2\pi \xi) - \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \sin(2\pi \tau) \right), \\ \bar{\partial}^2 \Theta(\eta, \xi, \tau) &= -4\pi^2 \left(\frac{\eta^3}{\operatorname{sh} \eta} \cos(2\pi \xi) + \frac{1}{\operatorname{sh} 1} \cos(2\pi \tau) \right). \end{aligned}$$

Для любого η^0 множество $J_0 \cap \{\eta = \eta^0\}$ состоит из кривых, определенных равенством $\bar{\partial} \Theta = 0$, за вычетом конечного множества, где $\bar{\partial}^2 \Theta = 0$. Существует только два исключения: $\eta^0 = \pm 1$. Например, при $\eta^0 = 1$ приходится удалить кривую $\{\xi + \tau = 1/2\}$, где выполнены оба равенства. Однако другая кривая $\{\xi = \tau\}$ без двух точек $\xi = \tau = \pm 1/4$ лежит в $J_0 \cap \{\eta = 1\}$. При $\eta = -1$ ситуация аналогична.

При $|\eta^2 / \operatorname{sh} \eta| \neq 1 / \operatorname{sh} 1$ множество $\{(\xi, \tau) : \bar{\partial} \Theta(\eta, \xi, \tau) = 0\}$ состоит из двух кривых, проходящих через четыре точки $(\xi, \tau) \in \mathbb{Z}^2 / 2 \bmod 1$ (две точки на каждой кривой). Обе кривые гомотопны либо $\{\tau = 0\}$, либо $\{\xi = 0\}$ в зависимости от того, какое из неравенств $|\eta^2 / \operatorname{sh} \eta| > 1 / \operatorname{sh} 1$ или $|\eta^2 / \operatorname{sh} \eta| < 1 / \operatorname{sh} 1$ выполнено.

Так как $\Theta_\xi = -(2\pi\eta/\operatorname{sh}\eta)\sin(2\pi\xi)$, мы видим, что

$$j_\pm(\eta^0) = J_0 \cap \{\eta = \eta^0\} \cap \{\mp \sin(2\pi\xi) > 0\}.$$

Используя эти наблюдения, легко проверить выполнение условий **H₁1**.

Нечеткие интервалы являются окрестностями целых η . Итак, необходимо проверить **H₂2** только для $\eta = \pm 1$ и $\eta = 0$. При $\eta = \pm 1$ соответствующие функции $F_\pm$ удовлетворяют предложению 11.10. В случае $\eta^0 = 0$ имеем:

$$F_+(0, \zeta) = F_-(0, \zeta) = \sin \zeta,$$

т.е. имеет место вырожденный случай. Вырождение исчезает при малых b .

Условие **H₁3** при $\eta^0 = \pm 1, 0$ легко проверяется при $b \neq 0$.

§ 3. Прохождение через нерезонансный интервал

Обозначим $\lambda_{\min} = \min_{y \in \mathcal{D}} \lambda(y)$. Согласно **H₀2**, $\lambda_{\min} > 0$.

Рассмотрим компоненту связности (a_1, a_2) в $\mathcal{D}_N$ и допустимую траекторию $\mathbb{O} = (\Omega_{-k}, \dots, \Omega_k)$, входящую в этот интервал, т.е. $a_1 \leq \varepsilon \rho_k \leq a_1 + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$.

ЛЕММА 11.11. *Предположим, что выполнено условие **H₁1**. Тогда можно продолжить траекторию до допустимой траектории, покидающей (a_1, a_2) через другой конец: $a_2 \leq \varepsilon \rho_{k'} \leq a_2 + O(\varepsilon |\ln \varepsilon|)$ при некотором $k' > k$. Более того,*

$$\sum_{j=k}^{k'} t_j < \frac{(a_2 - a_1) |\ln \varepsilon|}{2b\varepsilon \lambda_{\min}}. \quad (11.7)$$

СЛЕДСТВИЕ 11.12. *Средняя скорость прохождения через (a_1, a_2)*

$$\frac{|\eta_2 - \eta_1|}{\sum_{j=k}^{k'} t_j} = \varepsilon \frac{|\rho_2 - \rho_1|}{\sum_{j=k}^{k'} t_j}$$

имеет порядок $\varepsilon/|\ln \varepsilon|$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11.11. Пусть $\overline{\mathbb{O}} = (\overline{\Omega}_{-k}, \dots, \overline{\Omega}_k)$ – код траектории $\mathbb{O}$. Мы обсудим продолжение траектории вперед по времени. (Продолжение назад несущественно.)

ЛЕММА 11.13. *Предположим, что **H₁1** выполнено и точка $\varepsilon \rho_k$ K -четкая, где K удовлетворяет (11.4). Тогда существует правая совместная квазитраектория $(\overline{\Omega}_k, \overline{\Omega}_{k+1})$ такая, что*

$$\widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon \overline{\rho}_{k+1}, \overline{\zeta}_{k+1}, \overline{\tau}_{k+1}) < -7b. \quad (11.8)$$

Теперь лемма 11.11 следует из леммы 10.4. Действительно, новая траектория $\widehat{\mathbb{O}} = (\Omega_{-k-1}, \dots, \Omega_{k+1})$ такова, что $\operatorname{dist}(\Omega_{k+1}, \overline{\Omega}_{k+1}) < 2b$. В частности, $b_\rho |\rho_{k+1} - \overline{\rho}_{k+1}| < 2b$. Это неравенство сохраняется при продолжении траектории путем индуктивного применения леммы о присоединении. Так как речь идет о нерезонансном интервале, $|(\overline{\tau}_{k+1} - \tau - \overline{t}_{k+1}) \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon \overline{\rho}_{k+1}, \zeta)| < b$. Отсюда

следует (см. (10.7)), что $\bar{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_k > 5b$. Таким образом, на продолжениях траектории $\mathbb{O}$

$$\rho_{k+1} - \rho_k \geq -|\rho_{k+1} - \bar{\rho}_{k+1}| + \bar{\rho}_{k+1} - \bar{\rho}_k - |\bar{\rho}_k - \rho_k| > 5b - 4b/b_\rho > 4b.$$

Это означает, что на траектории переменная ρ возрастает, по крайней мере, на $4b$ на каждом шаге. Каждый шаг требует времени менее, чем $2|\ln \varepsilon|/\lambda_{\min}$, откуда получаем (11.7).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ЛЕММЫ 11.13. Определим

$$\tilde{j}_\pm(\eta, c, c', c'') = \{(\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2 : (\eta, \xi, \tau) \in J_{c', c'', \pm} \Theta_\xi(\eta, \xi, \tau) \geq c\}. \quad (11.9)$$

Так как $\bigcup_{c, c', c'' > 0} \tilde{j}_\pm(\eta, c, c', c'') = j_\pm(\eta)$, то для любого $\eta \in \bar{\mathcal{D}}$ существует $\tilde{c} > 0$ такое, что

$$\text{pr}_{\bar{\nu}} \tilde{j}_\pm(\eta, \tilde{c}, \tilde{c}, \tilde{c}) \subset \text{pr}_{\bar{\nu}} j_\pm - c_*.$$

Так как $\bar{\mathcal{D}}$ – компакт, то можно выбрать $\tilde{c} > 0$ не зависящим от $\eta \in \bar{\mathcal{D}}$.

Итак, для любого K -четкого η и достаточно малых b, c', c'' имеем:

$$\bigcup_{0 \leq t \leq K+1} g^{n, t}(\text{pr}_{\bar{\nu}} \tilde{j}_\pm(\eta, 8b, 2c', 2c'')) = \mathbb{T}^2. \quad (11.10)$$

Построим правую совместную квазитраекторию $(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_{k+1})$. Далее для краткости положим $\Omega_+ = \bar{\Omega}_{k+1}$ и будем иметь дело с первым неравенством (11.8). Согласно определению правой совместной траектории, необходимо найти ρ_+ , ζ_+ , τ_+ , t_+ такие, что

$$|\rho_+ - \rho_k + \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_k, \tau_k) - (\tau_+ - \tau_k - t_+)\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_k)| < \frac{b^2}{2b_\rho}, \quad (11.11)$$

$$|\zeta_+ - \zeta_k - \nu(\varepsilon\rho_+)t_+ + (\tau_+ - \tau_k - t_+)\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho_+, \zeta_k)| < \frac{b^2}{2b_\zeta}, \quad (11.12)$$

$$(\rho_+, \zeta_+, \tau_+) \in \mathcal{J}_{c', c'',} \quad (11.13)$$

$$K_0 \leq \lambda t_+ + \ln \varepsilon \leq K_0 + \bar{K}, \quad |\tau_+| < 1, \quad t_+ \in \mathbb{N}. \quad (11.14)$$

Более того, из-за условия $\hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, \tau_+) < -7b$, вместо (11.13) требуется более сильное условие:

$$(\eta_+, \xi_+, \tau_+) \equiv (\varepsilon\rho_+, \zeta_+ - \nu(\eta_+)\tau_+, \tau_+) \in \tilde{j}_-(\eta_+, 7b, c', c''). \quad (11.15)$$

(1) Сначала найдем t_+ и некоторые вспомогательные τ_* , ζ_* . Рассмотрим условие

$$(\varepsilon\rho_k, \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)t, -t) \in \tilde{j}_-(\eta_k, 8b, 2c', 2c''). \quad (11.16)$$

Согласно (11.10) и (11.4), для любой точки $(\xi_0, \tau_0) \in \mathbb{T}^2$ любой интервал $I \subset \mathbb{R}$ длины большей или равной $\bar{K}/\lambda - 1$ содержит точку t такую, что $(\eta_k, \xi_0 + \nu(\varepsilon\rho_k)t, \tau_0 - t)$ лежит в $\tilde{j}_-(\eta_k, 8b, 2c', 2c'')$. Таким образом, (11.16) имеет решение

$$t = \hat{t}, \quad K_0 + \lambda/2 \leq \lambda\hat{t} + \ln \varepsilon \leq K_0 + \bar{K} - \lambda/2.$$

Определим t_+ , τ_* , ζ_* следующим образом:

$$t_+ - \tau_* = \widehat{t}, \quad t_+ \in \mathbb{Z}, \quad \tau_* \in (-1/2, 1/2], \quad \zeta_* = \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)t_+. \quad (11.17)$$

Тогда выполнено (11.14). Из (11.16) вытекает, что

$$(\varepsilon\rho_k, \zeta_* - \nu(\varepsilon\rho_k)\tau_*, \tau_*) \in \widetilde{j}_\pm(\eta_k, 8b, 2c', 2c'').$$

(2) Определим ρ_+ , ζ_+ :

$$\begin{aligned} \rho_+ &= \rho_k - \widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_k, \zeta_k, \tau_k) + (\tau_* - \tau_k - t_+)\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_k, \zeta_k), \\ \zeta_+ &= \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)t_+ - (\tau_* - \tau_k - t_+)\mathbf{H}_\rho(\varepsilon\rho_k, \zeta_k). \end{aligned} \quad (11.18)$$

(3) Найдем τ_+ из уравнения $\bar{\partial}\Theta(\varepsilon\rho_+, \zeta_+ - \nu(\varepsilon\rho_+)\tau_+, \tau_+) = 0$, которое можно записать в виде $\widehat{\Theta}_\tau(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, \tau_+) = 0$. Следовательно,

$$\tau_+ = \Psi^{\rho_k, \zeta_*, \tau_*}(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, 0).$$

Так как $\tau_* = \Psi^{\rho_k, \zeta_*, \tau_*}(\varepsilon\rho_k, \zeta_*, 0)$, $|\rho_+ - \rho_k| = O(\ln \varepsilon)$ и $|\zeta_+ - \zeta_*| = O(\varepsilon^{3/4} \ln \varepsilon)$, имеем:

$$|\tau_+ - \tau_*| = O(\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|).$$

Поэтому выполнено (11.15). Условия (11.11), (11.12) легко проверяются. Лемма 11.13 доказана.

§ 4. Прохождение через четкий существенный резонанс

Пусть $\mathbf{I}$ – компонента связности $\mathscr{D}_{CR}$. В этом параграфе мы обсудим прохождение траектории через $\mathbf{I}$. Согласно предложению 11.8, $\mathbf{I}$ соответствует некоторому “почти резонансу” (11.5). Будем предполагать, что существует $\eta^0 \in \mathbf{I}$ такое, что $k\nu_0 + k_0 = 0$, $\nu_0 = \nu(\eta^0)$. Случай, когда $\nu(\eta)|_{\mathbf{I}} \neq \nu_0$, более простой и может быть рассмотрен аналогично. Для краткости положим $\eta^0 = 0$.

ЛЕММА 11.14. *Предположим, что выполнено условие $\mathbf{H}_1\mathbf{1}$. Тогда траекторию можно продолжить через $\mathbf{I}$. Это требует времени $t = O(|I| |\ln \varepsilon| / \varepsilon)$.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Конструкция правых совместных квазитраекторий примерно та же, что и в § 3. В отличие от ситуации с прохождением через нерезонансный интервал слагаемое $(\tau_+ - \tau - t_+)\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta)$ может мешать возрастанию переменной ρ , если $\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta)$ положительно. Поэтому важно следить за изменением переменной ζ .

Обозначим

$$\nu_0 = \nu(0) = -\frac{k_0}{k}, \quad \nu'_0 = \frac{d\nu}{d\eta}(0), \quad \nu''_0 = \frac{d^2\nu}{d\eta^2}(0),$$

где, ввиду $\mathbf{H}_0\mathbf{4}$, $|\nu'_0| + |\nu''_0| > 2c_\nu$. Положим

$$c_\Theta = \sup_{\eta \in \overline{\mathscr{D}}, (\xi, \tau) \in \mathbb{T}^2} \Theta_\xi(\eta, \xi, \tau).$$

Определим некоторую динамическую задачу с управлением и шумом.

ЗАДАЧА 1. Рассмотрим дискретную динамическую систему

$$\mu_{n+1} - \mu_n = \sqrt{\varepsilon} (u_n - t_{n+1} \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n)), \quad (11.19)$$

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) t_{n+1} + \beta_n. \quad (11.20)$$

Здесь для любого n

$$K_0 < \lambda t_n + \ln \varepsilon < K_0 + \overline{K}, \quad |\beta_n| < c^{-1} \varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|. \quad (11.21)$$

Переменная u_n является управлением, которое в соответствии с нашими нуждами берется в одном из интервалов

$$(-c_\Theta - b, -5b) \quad \text{или} \quad (5b, c_\Theta + b). \quad (11.22)$$

Величины u_n из этих интервалов и величины t_n, β_n , удовлетворяющие (11.21), произвольны (т.е. их точные значения неизвестны). Этот произвол при желании можно считать шумом. Цель состоит в том, чтобы построить траекторию, начинающуюся в точке (μ_0, ζ_0) и заканчивающуюся в некоторой точке (μ_N, ζ_N) , где

$$\hat{\mathbf{I}} = \{\mu \in \mathbb{R} : \sqrt{\varepsilon} \mu \in \mathbf{I}\} \subset [\mu_0, \mu_N].$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.15. Задача 1 имеет решение с $N = O(|\mathbf{I}|/\varepsilon)$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.16. Предположим, что задача 1 имеет решение. Тогда лемма 11.14 справедлива с $t = O(N \ln \varepsilon)$.

Доказательство предложения 11.15. Получим некоторые вспомогательные оценки. Для некоторой большой постоянной C_1 рассмотрим множество

$$\hat{\mathbf{I}}^{cr} = \{\mu \in \hat{\mathbf{I}} : |\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) - \nu_0| \leq C_1 \varepsilon^{3/4}\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.17. Предположим, что $|\nu'_0| + |\nu''_0| \geq 2c_\nu$. Тогда

(а) $|\hat{\mathbf{I}}| = O(\varepsilon^{-3/8})$,

(б) $\hat{\mathbf{I}}^{cr}$ состоит из одного или двух интервалов $\hat{\mathbf{I}}_j^{cr}$, $j = 1, 2$, и $|\hat{\mathbf{I}}_j^{cr}| = O(\varepsilon^{-1/8})$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.17.

УТВЕРЖДЕНИЕ. Пусть u, v, c_u, c_v, s – постоянные такие, что c_u, c_v, s положительны, $|u|/c_u + |v|/c_v \geq 2$, и пусть $I \subset \mathbb{R}$ – интервал. Предположим, что

$$|ux + vx^2| < s \quad \text{для любого } x \in I.$$

Тогда длина интервала I не превосходит $\max\{4s/c_u, \sqrt{4s/c_v}\}$.

Простое доказательство утверждения опустим.

Теперь, чтобы доказать предложение 11.17, достаточно заметить, что

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{I}} &\subset \left\{ \mu \in \mathbb{R} : \left| k(\nu'_0 \mu + \frac{1}{2} \nu''_0 \sqrt{\varepsilon} \mu^2 + O(\varepsilon \mu^3)) \right| \leq 2\varepsilon^{-1/4} \right\}, \\ \hat{\mathbf{I}}^{cr} &\subset \left\{ \mu \in \mathbb{R} : \left| \nu'_0 \mu + \frac{1}{2} \nu''_0 \sqrt{\varepsilon} \mu^2 + O(\varepsilon \mu^3) \right| \leq C_1 \varepsilon^{1/4} \right\}. \end{aligned}$$

Предложение 11.17 доказано.

Рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\mu} = v - \mathbf{H}_{\zeta}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta), \\ \dot{\zeta} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon}}(\nu(\sqrt{\varepsilon}\mu) - \nu_0) + \sqrt{\varepsilon}\mathbf{H}_{\eta}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta), \end{cases} \quad v = \frac{2b\lambda}{|\ln \varepsilon|}. \quad (11.23)$$

Постоянная v мала и положительна. Эта система гамильтонова с симплектической структурой $d\mu \wedge d\zeta$ и гамильтонианом

$$\chi(\mu, \zeta) = \frac{1}{\varepsilon}(E(\sqrt{\varepsilon}\mu) - E(0) - \nu_0\sqrt{\varepsilon}\mu) + \mathbf{H}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta) - v\zeta. \quad (11.24)$$

Эта система будет использоваться для сравнения ее траекторий с траекториями задачи **1**.

Гамильтониан (11.24) многозначен на цилиндре

$$Z = \{(\mu, \zeta) : \mu \in \widehat{\mathbf{I}}, \zeta \bmod 1\}.$$

Но соответствующее гамильтоново векторное поле 1-периодично по ζ и, следовательно, однозначно на Z . Чтобы сделать χ однозначным, будем считать, что $\chi: Z \rightarrow \mathbb{R}/(v\mathbb{Z})$. Другими словами, возьмем $\chi \bmod v$. Заметим также, что, ввиду предложения 11.1, 1-периодическая по ζ функция $\mathbf{H}$ приблизительно $1/k$ -периодична по ζ :

$$\mathbf{H}(\eta, \zeta + 1/k) - \mathbf{H}(\eta, \zeta) = O(\eta^j \ln \varepsilon) \quad \text{для } C^j\text{-гладкого } H_1. \quad (11.25)$$

Пусть $\partial_- Z$ и $\partial_+ Z$ – компоненты связности границы ∂Z :

$$\partial_- Z \cup \partial_+ Z = \partial Z, \quad \mu|_{\partial_- Z} < 0 < \mu|_{\partial_+ Z}.$$

Система (11.23) интегрируема. Любая траектория, начинающаяся на $\partial_- Z$, либо достигает $\partial_+ Z$, либо асимптотически стремится к положению равновесия (11.23).

В случае, когда $\widehat{\mathbf{I}}^{cr}$ состоит из двух компонент связности, пусть μ_0 – некоторое число, их разделяющее, и

$$S_0 = \{(\mu, \zeta) \in Z : \mu = \mu_0\}.$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.18. *Предположим, что $\widehat{\mathbf{I}}^{cr}$ связно (соответственно не-связно). Тогда система (11.23) имеет траекторию*

$$\gamma(t) = (\mu(t), \zeta(t)), \quad t \in [0, t_*], \quad \chi|_{\gamma} = \chi_*$$

(соответственно траектории $\gamma^{\pm}(t) = (\mu^{\pm}(t), \zeta^{\pm}(t))$, $t \in [0, t_*^{\pm}]$, $\chi|_{\gamma^{\pm}} = \chi_*^{\pm}$) такую, что

1) $\mu(0) \in \partial_- Z$, $\mu(t_*) \in \partial_+ Z$ (соответственно $\mu^-(0) \in \partial_- Z$, $\mu^-(t_*^-) \in S_0$, $\mu^+(0) \in S_0$, $\mu^+(t_*^+) \in \partial_+ Z$),

2) $t_* < |\widehat{\mathbf{I}}|/(cv)$ (соответственно $t_*^-, t_*^+ < |\widehat{\mathbf{I}}|/(cv)$) для некоторой постоянной c ,

3) утверждения 1) и 2) выполнены для любой траектории с энергией из интервала $[\chi_* - c_1 v^2, \chi_* + c_1 v^2]$ (соответственно из интервалов $[\chi_*^{\pm} - c_1 v^2, \chi_*^{\pm} + c_1 v^2]$).

ЗАМЕЧАНИЕ 11.19. Ввиду (11.25) величину χ_* в 3) можно брать $\bmod v/k$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Мы рассмотрим только случай связного $\widehat{\mathbf{I}}^{cr}$. Для не-связного $\widehat{\mathbf{I}}^{cr}$ доказательство то же. Пусть

$$M = \max_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathbf{H}(0, \zeta), \quad A = \max_{\zeta \in \mathbb{T}} \mathbf{H}_{\zeta\zeta}(0, \zeta).$$

УТВЕРЖДЕНИЕ. Для любого $h \in (M - v^2/(8A), M)$ любое $\widehat{\zeta}$ такое, что $\mathbf{H}(0, \widehat{\zeta}) = h$, удовлетворяет неравенству $|\mathbf{H}_{\zeta}(0, \widehat{\zeta})| \leq v/2$.

Доказательство утверждения опустим (см. [66]).

Пусть $\gamma(t)$ – траектория с начальными условиями

$$(\mu, \zeta) = (0, \zeta^0), \quad \mathbf{H}(0, \zeta^0) = h \in \left(M - \frac{3v^2}{32A}, M - \frac{v^2}{32A} \right).$$

Согласно приведенному выше утверждению, пока

$$\gamma(t) \in \widehat{\mathbf{I}}^{cr} \cap \left\{ (\mu, \zeta) : \mathbf{H}(0, \zeta) \in \left(M - \frac{v^2}{8A}, M \right) \right\}, \quad (11.26)$$

выполняются соотношения: $\dot{\mu} > v/2$, $\dot{\zeta} = O(\varepsilon^{1/4})$. Напомним, что ввиду предложения 11.17 (b) $|\widehat{\mathbf{I}}^{cr}| = O(\varepsilon^{-1/8})$. Таким образом, $\gamma(t)$ проходит $\widehat{\mathbf{I}}^{cr}$ через прямоугольник (11.26) со скоростью в направлении μ большей, чем $v/2$.

Вне $\widehat{\mathbf{I}}^{cr}$ $\dot{\zeta}$ отделено от нуля. Следовательно, в среднем, μ возрастает со скоростью v . Предложение 11.18 доказано.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.20. Для C^6 -гладкого H_1 и $\mu \in \mathbf{I}$

$$\begin{aligned} & \chi(\mu_{n+1}, \zeta_{n+1}) - \chi(\mu_n, \zeta_n) + v\nu_0 t_{n+1} \\ &= (\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) - \nu_0)(u_n - vt_{n+1}) + |\ln \varepsilon| O(\varepsilon^{3/4} + (\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) - \nu_0)^2). \end{aligned} \quad (11.27)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.20. Ввиду (11.24) имеем

$$\begin{aligned} \chi(\mu_{n+1}, \zeta_{n+1}) - \chi(\mu_n, \zeta_n) + v\nu_0 t_{n+1} &= \mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C} + \mathbf{D}, \\ \mathbf{A} &= \frac{1}{\varepsilon} (E(\sqrt{\varepsilon} \mu_{n+1}) - E(\sqrt{\varepsilon} \mu_n)), \\ \mathbf{B} &= -\frac{1}{\sqrt{\varepsilon}} \nu_0 (\mu_{n+1} - \mu_n), \\ \mathbf{C} &= \mathbf{H}(\sqrt{\varepsilon} \mu_{n+1}, \zeta_{n+1}) - \mathbf{H}(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n), \\ \mathbf{D} &= -v(\zeta_{n+1} - \nu_0 t_{n+1} - \zeta_n). \end{aligned}$$

Используя (11.19), (11.20), получаем:

$$\begin{aligned} \mathbf{A} &= \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n)(u_n - t_{n+1} \mathbf{H}_{\zeta}(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n)) + O(\varepsilon \ln^2 \varepsilon), \\ \mathbf{B} &= -\nu_0(u_n - t_{n+1} \mathbf{H}_{\zeta}(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n)), \\ \mathbf{D} &= -v(\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) - \nu_0)t_{n+1} + O(\varepsilon^{3/4}). \end{aligned}$$

Чтобы оперировать с $\mathbf{C}$, используем оценки

$$\mu_{n+1} - \mu_n = O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon), \quad \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu, \zeta + \nu_0 t_{n+1}) - \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu, \zeta) = O(\varepsilon^{3/2}).$$

Последняя оценка следует из предложения 11.1 для C^6 -гладкого H_1 , так как при $\sqrt{\varepsilon} \mu \in \mathbf{I}$ имеем $\delta = |\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) - \nu_0| < \varepsilon^{1/4}$. Получаем:

$$\mathbf{C} = (\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) - \nu_0) t_{n+1} \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n) + |\ln \varepsilon| (O(\varepsilon^{3/4}) + O(\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) - \nu_0)^2).$$

Из этих оценок для $\mathbf{A}$, $\mathbf{B}$, $\mathbf{C}$, $\mathbf{D}$ вытекает (11.27). Предложение 11.20 доказано.

Так как $\lambda t_{n+1} = |\ln \varepsilon| + O(1)$, имеем:

$$\begin{aligned} u_n - vt_{n+1} &> 2b && \text{для } u_n \in [5b, c_\Theta + b], \\ u_n - vt_{n+1} &< -6b && \text{для } u_n \in [-c_\Theta - b, -5b]. \end{aligned}$$

Таким образом, используя u_n можно обеспечить рост или убывание $\chi \bmod v/k$ на траектории. В частности, можно использовать управление $u_0, u_1, \dots$, чтобы сначала сделать χ близким к χ_* :

$$\chi(\mu_n, \zeta_n) = (\chi_* + O(\sqrt{\varepsilon})) \bmod v/k, \quad n = n_0 \leq v\varepsilon^{-1/2},$$

а затем сохранять это условие для $n > n_0$ при условии

$$|\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) - \nu_0| > C\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|, \quad \text{т.е. } \mu \notin \hat{\mathbf{I}}^{cr}. \quad (11.28)$$

Так как последовательность $\chi(\mu_k, \zeta_k)$, $k > n_0$, лишь слегка осциллирует, траектория (μ_n, ζ_n) следует кривой γ из предложения 11.18 при условии (11.28). Чтобы войти в полосу

$$S = \{(\mu, \zeta) : \mu \in \mathbf{I}^{cr}\},$$

необходимо

$$N_1 \leq O(|\hat{\mathbf{I}}^{cr}|/\sqrt{\varepsilon}) \quad (11.29)$$

шагов (итераций сепаратрисного отображения). Действительно, (11.29) следует из того факта, что средний прирост μ на этой части траектории имеет порядок $O(\sqrt{\varepsilon})$.

Когда траектория (μ_n, ζ_n) входит в полосу S , слагаемые в (11.27), отвечающие за ошибки, могут доминировать. В этом случае мы выбираем управление $u \in [5b, c_\Theta + b]$. На $\gamma \cap S$ из уравнения (11.23) следует, что

$$\dot{\mu} = v - \mathbf{H}_\zeta(\eta^0, \zeta) > v/2. \quad (11.30)$$

Более того, согласно предложению 11.18 это неравенство остается верным, пока

$$(\mu, \zeta) \in \{|\chi(\mu, \zeta) - \chi_*| < c_1 v^2\} \cap S, \quad c_1 = 1/(32A). \quad (11.31)$$

Обратимся к траектории (μ_n, ζ_n) . Используя (11.19) и (11.30), видим, что из (11.31) следует, что

$$\mu_{n+1} - \mu_n > \sqrt{\varepsilon} \left(5b - \frac{2|\ln \varepsilon|}{\lambda} \mathbf{H}_\zeta(\eta^0, \zeta_n) \right) > \frac{3}{2} \sqrt{\varepsilon} b.$$

Таким образом, μ_k возрастает, пока $(\mu, \zeta) = (\mu_k, \zeta_k)$ удовлетворяет (11.31). Чтобы пройти через S , требуется не более чем

$$N_2 = \frac{C\varepsilon^{-1/8}}{\sqrt{\varepsilon}b} = \frac{C}{\varepsilon^{5/8}b}$$

шагов. В течение этого времени χ изменится не более чем на $N_2 O(\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|) = O(\varepsilon^{1/8} \ln \varepsilon)$. Это значит, что если траектория входит в S с $\chi = (\chi_* + O(\sqrt{\varepsilon})) \bmod v/k$, то она останется в области (11.31), выходя из S .

Наконец, для полного количества N шагов на траектории имеем оценку:

$$N = 2N_1 + N_2 = O(|\widehat{\mathbf{I}}|/\sqrt{\varepsilon}) = O(|\mathbf{I}|/\varepsilon).$$

Предложение 11.20 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.16. Используя лемму 11.13, можно построить траекторию такую, что на соответствующей последовательности правых совместных квазитраекторий

$$(\bar{\Omega}_j, \bar{\Omega}_{j+1}), (\bar{\Omega}_{j+1}, \bar{\Omega}_{j+2}), \dots$$

в соответствии с нашими нуждами $\widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n)$, $n = j, j+1, \dots$, лежит или в $[6b, c_\Theta]$, или в $[-c_\Theta, -6b]$. При $|\varepsilon\bar{\rho}_n - \eta^0| < c\varepsilon^{1/4}$ (напомним, что $\eta^0 = 0$), комбинируя (10.13) с оценками

$$|\bar{\rho}_n - \rho_n| < 2b/b_\rho, \quad |\bar{\zeta}_n - \zeta_n| < 2b/b_\zeta, \quad |\bar{\tau}_n - \tau_n| < 2b/b_\tau,$$

получаем:

$$\begin{aligned} \bar{\rho}_{n+1} &= \bar{\rho}_n - \widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n) + (\bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_n - \bar{t}_{n+1})\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n) + \tilde{\alpha}_n, \\ \bar{\zeta}_{n+1} &= \bar{\zeta}_n + \nu(\varepsilon\bar{\rho}_n)\bar{t}_{n+1} + \varepsilon(\bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_n - \bar{t}_{n+1})\mathbf{H}_\eta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n) + \tilde{\beta}_n, \end{aligned} \quad (11.32)$$

где $|\tilde{\alpha}_n| < b/2$, $|\tilde{\beta}_n| < c^{-1}\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|/2$.

Пусть μ_n удовлетворяет уравнениям

$$\varepsilon\bar{\rho}_n = \sqrt{\varepsilon}\mu_n + \varepsilon\bar{\tau}_n\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n, \bar{\zeta}_n), \quad n = j, j+1, \dots$$

Тогда

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} &= \mu_n - \widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n) - \bar{t}_{n+1}\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n) + \alpha_n, \\ \alpha_n &= \tilde{\alpha}_n - (\bar{\tau}_n + \bar{t}_{n+1})\delta_1 + \bar{\tau}_{n+1}\delta_2, \\ \delta_1 &= \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n + \varepsilon\bar{\tau}_n\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n, \bar{\zeta}_n), \bar{\zeta}_n) - \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n, \bar{\zeta}_n), \\ \delta_2 &= \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n + \varepsilon\bar{\tau}_n\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n, \bar{\zeta}_n), \bar{\zeta}_n) - \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_{n+1}, \bar{\zeta}_{n+1}). \end{aligned}$$

Имеем: $\delta_1 = O(\varepsilon^{3/4})$, $\delta_2 = O(\varepsilon^{1/4} \ln \varepsilon) + O(\sqrt{\varepsilon}\mu \ln \varepsilon)$. Действительно, первая оценка очевидна. Вторая следует из равенств

$$\begin{aligned} \mu_{n+1} - \mu_n &= O(\ln \varepsilon), \quad \bar{\zeta}_{n+1} - \bar{\zeta}_n = -k_0/k + O(\sqrt{\varepsilon}\mu \ln \varepsilon), \\ \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta + k_0/k) - \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta) &= O(\varepsilon). \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из предложения 11.1 для C^j -гладкого H_1 , $j > 5$.

Таким образом, $|\alpha_n| < b$ и величина $u_n = -\widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n) + \alpha_n$ лежит в одном из интервалов (11.22), откуда следует (11.19). Так как

$$\nu(\varepsilon\bar{\rho}_n) = \nu(0) + \nu'_0\sqrt{\varepsilon}\mu_n + \frac{\nu''_0}{2}\varepsilon\mu_n^2 + O(\varepsilon) + \varepsilon^{3/2}O(\mu_n^3),$$

получаем (11.19)–(11.20). Предложение 11.16 доказано.

§ 5. Прохождение через нечеткий интервал

Зафиксируем резонанс $\eta = \eta^0$, порождающий нечеткий интервал $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}_V$. Далее без ограничения общности будем считать, что $\eta^0 = 0$. Обозначим $\nu_0 = \nu(0) = p_0/q_0$, где $p_0 \in \mathbb{Z}$, $q_0 \in \mathbb{N}$, $q_0 < 2/c_*$, и дробь p_0/q_0 несократима.

ЛЕММА 11.21. *Предположим, что условие $\mathbf{H}_1\mathbf{2}$ выполнено для нечеткого резонанса $\eta = 0$. Тогда допустимую траекторию можно продолжить через соответствующий нечеткий интервал $\mathbf{I} \subset \mathcal{D}_V$. Это требует времени $t = O(|\ln \varepsilon|/\varepsilon)$.*

Ввиду $\mathbf{H}_1\mathbf{2}$, функции $F_\pm$ удовлетворяют условиям 1)–4) предложения 11.10. Для достаточно малых c' , c'' функции

$$\begin{aligned} F_{c', c'', +}(\zeta) &= \max_{u \in [-q_0, 0]} \{\Theta_\xi(0, \zeta - \nu_0 u, u) : (0, \zeta - \nu_0 u, u) \in J_{2c', 2c''}\}, \\ F_{c', c'', -}(\zeta) &= \min_{u \in [-q_0, 0]} \{\Theta_\xi(0, \zeta - \nu_0 u, u) : (0, \zeta - \nu_0 u, u) \in J_{2c', 2c''}\} \end{aligned}$$

также удовлетворяют этим условиям.

Пусть $\gamma_0^\pm = \gamma_0^\pm(\zeta)$ таковы, что $F_{c', c'', \pm}(\zeta) = \Theta_\xi(0, \zeta - \nu_0 \gamma_0^\pm, \gamma_0^\pm)$. Так как $(0, \zeta - \nu_0 \gamma_0^\pm, \gamma_0^\pm) \in J_{2c', 2c''}$, имеем: $\gamma_0^\pm(\zeta) = \Psi^{0, \zeta, \gamma_0^\pm(\zeta)}(0, \zeta, 0)$. Функции $\gamma_0^\pm(\zeta)$ кусочно C^{j-1} -гладкие.

Для малого $|\eta|$ положим

$$\begin{aligned} \widehat{F}_{c', c'', \pm}(\eta, \zeta) &= \Theta_\xi(\eta, \zeta - \nu(\eta)\gamma^\pm, \gamma^\pm), \\ \gamma^\pm &= \gamma^\pm(\eta, \zeta) = \Psi^{0, \zeta, \gamma_0^\pm(\zeta)}(\eta, \zeta, 0), \end{aligned}$$

так что $\widehat{\Theta}_\tau(\eta, \zeta, \gamma^\pm) = 0$ и $(\eta, \zeta - \nu(\eta)\gamma^\pm, \gamma^\pm) \in J_{c', c''}$. Функции $\widehat{F}_{c', c'', \pm}$ гладкие по η и при всех малых $|\eta|$ удовлетворяют условиям 1)–4) предложения 11.10 с $c_F/2$ вместо c_F .

Будем считать, что c' , c'' , $|\eta|$, с которыми мы имеем дело, достаточно малы в этом смысле. Для краткости не будем писать индексы c' , c'' . В частности, вместо $\widehat{F}_{c', c'', \pm}$ пишем $\widehat{F}_\pm$.

Предположим, что допустимая траектория $\mathbb{O} = (\Omega_{-k}, \dots, \Omega_k)$ с кодом $\overline{\mathbb{O}} = (\overline{\Omega}_{-k}, \dots, \overline{\Omega}_k)$ вошла в нечеткий интервал, т.е. $\varepsilon\bar{\rho}_k \in \mathbf{I}$, $\bar{\rho}_k < 0$. Отметим, что, ввиду предложения 11.5, $\mathbf{I} \subset [-C_\nu/(q_0 K), C_\nu/(q_0 K)]$, где C_ν – постоянная Липшица для $\nu^{-1}(\eta)$ около точки $\eta = 0$ и K удовлетворяет (11.4).

Далее $F_\pm$ играют роль функций Θ_ζ в уравнениях динамики.

ЛЕММА 11.22. *Предположим, что условие $\mathbf{H}_1\mathbf{2}$ выполнено для нечеткого $\eta = 0$. Тогда для любого $|\varepsilon\rho_k| < C_\nu/(q_0K)$ и $*$ $\in \{+, -\}$ существует правая совместная квазитраектория $(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_{k+1})$ и целое $\mathbf{t}$*

$$\mathbf{t} - \left\lfloor \frac{1}{\lambda}(K_0 - \ln \varepsilon) \right\rfloor \in \{1, 2, \dots, 2q_0\},$$

где $[\cdot]: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{Z}$ – целая часть аргумента, такие, что

$$\begin{aligned} \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_{k+1}, \bar{\zeta}_{k+1}, \bar{\tau}_{k+1}) &= \hat{F}_*(\varepsilon\rho_k, \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)\mathbf{t}) + \alpha_*, \\ |\alpha_*| &< d, \quad d = O(\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|). \end{aligned} \quad (11.33)$$

Мы докажем лемму 11.22 в § 6, а теперь определим еще одну динамическую задачу.

ЗАДАЧА 2. *Рассмотрим дискретную динамическую систему*

$$\mu_{n+1} - \mu_n = -\sqrt{\varepsilon}(v_n + t_{n+1}\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon}\mu_n, \zeta_n) + \alpha_n), \quad (11.34)$$

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_n)t_{n+1} + \beta_n. \quad (11.35)$$

Здесь для любого n

$$\mathbf{t}_n \leq t_n \leq \mathbf{t}_n + 2q_0, \quad t_n \in \mathbb{Z}, \quad (11.36)$$

$$\mathbf{t}_n - \left\lfloor \frac{1}{\lambda}(K_0 - \ln \varepsilon) \right\rfloor \in \{1, 2, \dots, 2q_0\}, \quad (11.37)$$

$$|\beta_n| < C\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|, \quad |\alpha_n| < d. \quad (11.38)$$

Постоянная d мала¹³. Переменные $\mathbf{t}_n, v_n$ следует считать управлением, где в соответствии с нашими нуждами $\mathbf{t}_n$, удовлетворяющее (11.37), может выбираться произвольно, а v_n может выбираться равным одной из следующих двух величин:

$$\hat{F}_\pm(\sqrt{\varepsilon}\mu_{n-1}, \zeta_{n-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{n-1})\mathbf{t}_n). \quad (11.39)$$

Величины α_n, β_n малы и считаются шумом. Они и t_n принимают произвольные значения в соответствующих интервалах. Цель состоит в том, чтобы построить траекторию, начинающуюся в произвольной точке (μ_0, ζ_0) , $\sqrt{\varepsilon}\mu_0 > -1/(q_0\bar{K})$ и заканчивающуюся в точке (μ_N, ζ_N) , $\sqrt{\varepsilon}\mu_N > 1/(q_0\bar{K})$ с как можно меньшим N .

ЛЕММА 11.23. *Задача 2 имеет решение с $N \leq 1/(c\varepsilon\bar{K})$.*

ЛЕММА 11.24. *Предположим, что задача 2 имеет решение. Тогда лемма 11.21 справедлива с $t = O(N \ln \varepsilon)$.*

¹³Например, ниже нам потребуется, чтобы выполнялось неравенство $d < |F_-|/4$, см. (11.70).

§ 6. Доказательство леммы 11.22

Рассуждения аналогичны тем, что были использованы в § 3. Докажем лемму для $*$ = +.

Требуется удовлетворить (11.11)–(11.14) и условие (11.33). Снова для краткости положим $\Omega_+ = \bar{\Omega}_{k+1}$.

1) Сначала рассмотрим вместо (11.33) уравнение

$$\Theta_\xi(\varepsilon\rho_k, \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)t, -t) = \hat{F}_+(\varepsilon\rho_k, \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)\mathbf{t}). \quad (11.40)$$

с неизвестным целым $t \in [\mathbf{t}, \mathbf{t} + 2q_0]$.

Согласно определению $\hat{F}_+$, существует $t = \hat{t} \in [\mathbf{t}, \mathbf{t} + 2q_0]$ такое, что

$$(\varepsilon\rho_k, \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)\hat{t}, -\hat{t}) \in J_{2c', 2c''} \quad \text{и равенство (11.40) справедливо.} \quad (11.41)$$

2) Определим t_+ , τ_* , ζ_* с помощью (11.17). Тогда t_+ удовлетворяет (11.14). Из условий (11.41) следует, что

$$(\varepsilon\rho_k, \zeta_* - \nu(\varepsilon\rho_k)\tau_*, \tau_*) \in J_{c', c''}, \quad \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_k, \zeta_*, \tau_*) = \hat{F}_+(\varepsilon\rho_k, \zeta_k + \nu(\varepsilon\rho_k)\mathbf{t}).$$

3) Определим ρ_+ , ζ_+ с помощью (11.18).

4) Найдем τ_+ из уравнения $\bar{\partial}\Theta(\varepsilon\rho_+, \zeta_+ - \nu(\varepsilon\rho_+)\tau_+, \tau_+) = 0$, которое эквивалентно равенству $\hat{\Theta}_\tau(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, \tau_+) = 0$. Таким образом,

$$\tau_+ = \Psi^{\rho_k, \zeta_*, \tau_*}(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, 0).$$

Так как $\tau_* = \Psi^{\rho_k, \zeta_*, \tau_*}(\varepsilon\rho_k, \zeta_*, 0)$ и $|\zeta_+ - \zeta_*| = O(\varepsilon^{3/4} \ln \varepsilon)$, получаем:

$$|\tau_+ - \tau_*| = O(\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|).$$

Следовательно, $|\tau_+| < 1$. Имеем:

$$|\hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_+, \zeta_+, \tau_+) - \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\rho_k, \zeta_*, \tau_*)| = O(\varepsilon^{3/4} \ln \varepsilon).$$

Теперь (11.11), (11.12) легко проверяются.

§ 7. Доказательство леммы 11.23

Предположим, что траектория $\mathbb{O}$ задачи 2 приходит в некоторую точку $(\mu, \zeta) = (\mu_s, \zeta_s)$, где $-1/(q_0 \bar{K}) \leq \sqrt{\varepsilon} \mu_s \leq 1/(q_0 \bar{K})$.

7.1. Шаг 1 (вдали от резонанса).

Сначала рассмотрим случай

$$\varepsilon^{1/6} < |\sqrt{\varepsilon} \mu| < 1/(q_0 \bar{K}). \quad (11.42)$$

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.25. Пусть H_1 лежит в пространстве C^j . Тогда при достаточно малых ε из (11.42) вытекает, что $|t_{n+1} \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n)| < C |\ln \varepsilon|^{1-j}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть c_ν – липшицева постоянная для $\nu(y)$ и $c'_\nu = \frac{d\nu}{dy}(0)$.

Ввиду **H₀4**, $c'_\nu > 0$. Из неравенства (11.42) следует, что

$$q_0 \varepsilon^{1/6} c'_\nu / 2 < |q_0 \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) - p_0| < c_\nu / \bar{K}. \quad (11.43)$$

Для любого резонанса $\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) = p/q$, $p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$, удовлетворяющего (11.43), имеем:

$$1 \leq |q_0 p - p_0 q| < c_\nu q / \bar{K}.$$

Так как $\bar{K}$ имеет порядок $|\ln \varepsilon|$, то q велико: $q > \bar{K} / c_\nu$.

Оценим $\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu, \zeta)$ при μ , удовлетворяющем (11.42). Согласно (6.1), (6.2) имеем:

$$|\mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu, \zeta)| \leq C_{\mathbf{H}} q^{-j} \leq C_{\mathbf{H}} c_\nu^j \bar{K}^{-j}$$

для некоторой постоянной $C_{\mathbf{H}}$. Итак,

$$|t_{n+1} \mathbf{H}_\zeta(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n)| < \frac{2 |\ln \varepsilon| c_\nu^j C_{\mathbf{H}}}{\lambda \bar{K}^j} < \frac{C}{|\ln \varepsilon|^{j-1}}.$$

Возьмем $v_n = \hat{F}_-(\sqrt{\varepsilon} \mu_{n-1}, \zeta_{n-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_{n-1}) \mathbf{t}_n)$. Тогда (11.34)–(11.35) можно заменить системой

$$\mu_{n+1} - \mu_n = -\sqrt{\varepsilon} (\hat{F}_-(\sqrt{\varepsilon} \mu_{n-1}, \zeta_{n-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_{n-1}) \mathbf{t}_n) + \hat{\alpha}_n), \quad (11.44)$$

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) t_{n+1} + \beta_n \quad (11.45)$$

с $|\beta_n| < C \varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|$ и $|\hat{\alpha}_n| < 2d$. Далее опустим крышки над α_n .

Идея состоит в следующем. Стартуя с точки (μ_s, ζ_s) , для $k \in \mathbb{N}$ получим:

$$\zeta_{s+k-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_{s+k-1}) \mathbf{t}_{s+k} \approx \hat{\zeta} + k\Delta, \quad (11.46)$$

где $\Delta = \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_s)(\mathbf{t} + 2q_0)$,

$$\mathbf{t} \in \mathbb{N}, \quad \mathbf{t} - \left\lfloor \frac{1}{\lambda} (K_0 - \ln \varepsilon) \right\rfloor \in \{1, 2, \dots, 2q_0\}, \quad \hat{\zeta} \in \mathbb{T}^1. \quad (11.47)$$

Таким образом, если Δ удовлетворяет хорошим арифметическим свойствам, то для некоторого $\mathbf{q} \in \mathbb{N}$ точки $\zeta_s, \dots, \zeta_{s+\mathbf{q}-1}$ более или менее равномерно покрывают окружность $\{\zeta \bmod 1\}$. Следовательно,

$$\mu_{s+\mathbf{q}+1} - \mu_{s+1} \approx -\sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\mathbf{q}-1} \hat{F}_-(\sqrt{\varepsilon} \mu_s, \zeta_s + k\Delta) - \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\mathbf{q}-1} \alpha_{s+k}.$$

Здесь первая сумма приблизительно равна $-\mathbf{q}\sqrt{\varepsilon} \langle \hat{F}_-(0) \rangle$, а вторая не превосходит $2\mathbf{q}\sqrt{\varepsilon} d$. Поэтому если ε достаточно мало, то $\mu_{s+\mathbf{q}+1} - \mu_{s+1} > \frac{1}{2} \langle \hat{F}_-(0) \rangle \sqrt{\varepsilon} \mathbf{q}$, так как d можно считать меньшим, чем $\frac{1}{4} \langle \hat{F}_-(0) \rangle$.

Точнее, мы выбираем $\mathbf{t}$ таким, что выполнены условия (11.46), (11.47) и Δ удовлетворяет следующему резонансному условию **РУ**.

РУ. Пусть $C > 0$ и $c > 0$ – соответственно большая и маленькая постоянная. Для любого μ_s удовлетворяющего (11.42) существуют $\mathbf{p}, \mathbf{q} \in \mathbb{Z}$ такие, что

$$(a) \ C \leq \mathbf{q} \leq c(\varepsilon \ln^2 \varepsilon)^{-1/6},$$

(b) дробь $\mathbf{p}/\mathbf{q}$ несократима,

(c) существует Δ , удовлетворяющее условиям (11.46), (11.47) и неравенству $|\mathbf{q}\Delta - \mathbf{p}| < \mathbf{q}^{-1}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.26. Для любого $\mu = \mu_s$, удовлетворяющего (11.42) существует $\mathbf{t}$, удовлетворяющее (11.47) такое, что для соответствующего Δ выполнено **РУ**.

Доказательство предложения 11.26 опустим (см. [66]).

Выберем последовательность $\mathbf{t}_{s+k}$ так, что для любого $k = 0, 1, \dots, \mathbf{q}$

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &\leq \mathbf{t}_{s+k} \leq \mathbf{t} + 2q_0, \\ |\zeta_{s+k-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_s)\mathbf{t}_{s+k} - \widehat{\zeta} - k\Delta| &\leq c^{-1}k^2\sqrt{\varepsilon}|\ln \varepsilon|, \\ \widehat{\zeta} &= \zeta_{s-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_s)\mathbf{t}_s. \end{aligned} \quad (11.48)$$

Эти неравенства можно удовлетворить. Действительно, при $k = 0$ (11.48) выполнены. Далее действуем по индукции. Предположим, что при некотором $k > 0$ выполнено (11.48). Тогда ввиду (11.44)

$$\mu_{s+k} = \mu_s + O(k\sqrt{\varepsilon}). \quad (11.49)$$

Используя (11.49) и (11.45), получаем:

$$\zeta_{s+k} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_s)\mathbf{t}_{s+k+1} = \zeta_{s+k-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_s)(\mathbf{t}_{s+k} + \mathbf{t}_{s+k+1}) + \psi_k, \quad (11.50)$$

где $|\psi_k| < c^{-1}k\sqrt{\varepsilon}|\ln \varepsilon|$ и постоянная $c > 0$ не зависит от k . Величина (11.50) равна

$$\zeta_{s+k-1} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_s)\mathbf{t}_{s+k} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_s)(\mathbf{t}_{s+k} - \mathbf{t}_{s+k} + \mathbf{t}_{s+k+1}) + \psi_k.$$

Так как $\mathbf{t}_{s+k} - \mathbf{t}_{s+k} \in [0, 2q_0] \cap \mathbb{Z}$, то $\mathbf{t}_{s+k+1} \in [\mathbf{t}, \mathbf{t} + 2q_0] \cap \mathbb{Z}$ можно выбрать так, что $\mathbf{t}_{s+k} - \mathbf{t}_{s+k} + \mathbf{t}_{s+k+1} = \mathbf{t} + 2q_0$. Это завершает индукцию.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.27. Пусть $\mathbf{t}$ – таково, что выполнены условия (11.46), (11.47) и соответствующее Δ удовлетворяет **РУ**. Предположим, что последовательность (μ_n, ζ_n) удовлетворяет (11.44), (11.45) и (11.48). Тогда

$$\Sigma \equiv - \sum_{k=0}^{\mathbf{q}-1} \widehat{F}_-(\sqrt{\varepsilon}\mu_{s+k}, \zeta_{s+k} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{s+k})\mathbf{t}_{s+k+1}) > \frac{2\mathbf{q}}{3} |\langle \widehat{F}_-(0) \rangle|. \quad (11.51)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.27. По определению (см. §5), функция $\widehat{F}_-(\eta, \zeta) \equiv \widehat{F}_{c', c'', -}(\eta, \zeta)$ гладкая по η при условии, что η близко к нулю.

Используя оценку (11.49), получаем:

$$\Sigma = \Sigma_1 + O(\mathbf{q}^2\sqrt{\varepsilon}), \quad (11.52)$$

$$\Sigma_1 = - \sum_{k=0}^{\mathbf{q}-1} \widehat{F}_-(\sqrt{\varepsilon}\mu_s, \zeta_{s+k} + \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_{s+k})\mathbf{t}_{s+k+1}).$$

Из оценок (11.48), (11.49) следует, что

$$\zeta_{s+k} + \nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_{s+k}) \mathbf{t}_{s+k+1} = \widehat{\zeta} + (k+1)\Delta + \delta_k, \quad |\delta_k| < 2c^{-1}k^2\sqrt{\varepsilon}|\ln \varepsilon|.$$

Следовательно, согласно **Р**У, Σ_1 можно считать интегральной суммой для

$$\int_0^1 \widehat{F}_-(\sqrt{\varepsilon} \mu_s, \zeta) d\zeta = \langle \widehat{F}_-(0) \rangle + O(\sqrt{\varepsilon} \mu_s).$$

Если $\mathbf{q}$ достаточно велико (чтобы иметь хорошую аппроксимацию интеграла), но меньше, чем $c(\varepsilon \ln^2 \varepsilon)^{-1/6}$ (чтобы иметь $|\delta_k| < 1/\mathbf{q}$), выполнена следующая оценка:

$$|\Sigma_1 - \mathbf{q} \langle \widehat{F}_-(0) \rangle| < \frac{1}{4} \mathbf{q} |\langle \widehat{F}_-(0) \rangle|.$$

В сочетании с (11.52) это дает (11.51).

Согласно (11.44)

$$\mu_{s+\mathbf{q}+1} - \mu_{s+1} = \sqrt{\varepsilon} \Sigma + \sqrt{\varepsilon} \sum_{k=0}^{\mathbf{q}-1} \widehat{\alpha}_{s+k+1}, \quad |\widehat{\alpha}_n| < 2d.$$

Из предложения 11.27 следует, что

$$\mu_{s+\mathbf{q}+1} - \mu_{s+1} > \sqrt{\varepsilon} \mathbf{q} \left(\frac{2}{3} |\langle \widehat{F}_-(0) \rangle| - 2d \right) > \frac{\sqrt{\varepsilon} \mathbf{q}}{2} |\langle \widehat{F}_-(0) \rangle|$$

при условии $d < \frac{1}{12} \langle \widehat{F}_-(0) \rangle$. Мы продолжаем эту процедуру, пока выполнено (11.42).

7.2. Шаг 2 (около резонанса). Рассмотрим случай

$$\widehat{C}\sqrt{\varepsilon}/|\ln \varepsilon| < |\sqrt{\varepsilon} \mu| < \varepsilon^{1/6}. \quad (11.53)$$

Будем использовать равенство

$$\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu) = \nu_0 + \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} \mu + O(\varepsilon \mu^2).$$

Ввиду (11.53) функция $\mathbf{H}(\sqrt{\varepsilon} \mu, \zeta)$ близка к $1/q_0$ -периодичной по ζ функции $\widetilde{\mathbf{H}}$ (см. следствие 11.2):

$$|\mathbf{H}(\sqrt{\mu}, \zeta) - \widetilde{\mathbf{H}}(\sqrt{\mu}, \zeta)| = O(\varepsilon^{j/6} q_0^{j+1}).$$

Заменяем $\mathbf{H}$ в (11.34) на $\widetilde{\mathbf{H}}$. Тогда порядок “ошибки” α_n остается прежним.

Так как $\nu_0 = p_0/q_0$, функции $\widehat{F}_{\pm}(0, \zeta) - \frac{1}{q_0}$ -периодичны по ζ . Будем считать в (11.34), (11.35), что $\zeta = \zeta \bmod \frac{1}{q_0}$. Таким образом, можно заменить (11.35) равенством $\zeta_{n+1} - \zeta_n = (\nu(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) - \nu_0) t_{n+1} + \beta_n$. Равенства (11.34), (11.35) принимают вид

$$\mu_{n+1} - \mu_n = -\sqrt{\varepsilon} (\widehat{\nu}_n + t_{n+1} \widetilde{\mathbf{H}}_{\zeta}(\sqrt{\varepsilon} \mu_n, \zeta_n) + \widehat{\alpha}_n), \quad (11.54)$$

$$\zeta_{n+1} - \zeta_n = \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} \mu_n t_{n+1} + \beta'_n + \beta''_n, \quad (11.55)$$

$$|\hat{\alpha}_n| < 2d, \quad |\beta'_n| \leq C\varepsilon\mu_n^2|\ln \varepsilon|, \quad |\beta''_n| \leq C\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|,$$

где $\hat{v}_n$ равно одной из следующих двух величин:

$$\hat{F}_{\pm}(0, \hat{\zeta}_n), \quad \hat{\zeta}_n = \zeta_{n-1} + \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} \mu_{n-1} \mathbf{t}_n + O(\varepsilon \mu_{n-1}^2 |\ln \varepsilon|). \quad (11.56)$$

Отметим, что ввиду (11.55), (11.56)

$$\zeta_n = \hat{\zeta}_n + O(\sqrt{\varepsilon} \mu_n) + O(\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|). \quad (11.57)$$

Возьмем

$$\mathbf{t} = \left\lceil \frac{1}{\lambda} (K_0 - \ln \varepsilon) \right\rceil + 1, \quad \mathbf{t}_* = \mathbf{t} + 2q_0,$$

и последовательность $\mathbf{t}_{s+k}$, $k = 0, 1, 2, \dots$, такую, что

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &\leq \mathbf{t}_{s+k} \leq \mathbf{t} + 2q_0, \\ \hat{\zeta}_{s+k+1} &= \hat{\zeta}_{s+k} + \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} \mu_{s+k} \mathbf{t}_* + \delta_{s+k}, \\ |\delta_{s+k}| &< C_1 (\varepsilon \mu_{s+k}^2 |\ln \varepsilon| + \varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon|). \end{aligned} \quad (11.58)$$

Последовательность $\mathbf{t}_{s+k}$ можно выбрать следующим образом. Ввиду (11.56) и (11.55)

$$\begin{aligned} \hat{\zeta}_{s+k+1} &= \zeta_{s+k} + \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} \mu_{s+k} \mathbf{t}_{s+k+1} + O(\varepsilon \mu_{s+k}^2 |\ln \varepsilon|) \\ &= \zeta_{s+k-1} + \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} (\mu_{s+k-1} t_{s+k} + \mu_{s+k} \mathbf{t}_{s+k+1}) \\ &\quad + \beta'_{s+k-1} + \beta''_{s+k-1} + O(\varepsilon \mu_{s+k}^2 |\ln \varepsilon|) \\ &= \hat{\zeta}_{s+k} + \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} (\mu_{s+k-1} t_{s+k} - \mu_{s+k-1} \mathbf{t}_{s+k} + \mu_{s+k} \mathbf{t}_{s+k+1}) \\ &\quad + \beta'_{s+k-1} + \beta''_{s+k-1} + O(\varepsilon \mu_{s+k}^2 |\ln \varepsilon|). \end{aligned}$$

Возьмем $\mathbf{t}_{s+k+1} \in [\mathbf{t}, \mathbf{t} + 2q_0] \cap \mathbb{Z}$ таким, что $t_{s+k} - \mathbf{t}_{s+k} + \mathbf{t}_{s+k+1} = \mathbf{t} + 2q_0$. Тогда выполняется (11.58).

Лемма 11.23 на шаге 2 вытекает из следующего предложения.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.28. *Для любых*

$$\mu_s, \zeta_s, \quad \text{где} \quad \sqrt{\varepsilon} \mu_s > -\varepsilon^{1/6}, \quad \zeta_s = \zeta_s \bmod \frac{1}{q_0},$$

существует траектория

$$(\mu_n, \zeta_n), \quad n = s, \dots, s + N, \quad (11.59)$$

задачи 2 такая, что

- (а) $\mu_{s+N} > -\hat{C}/|\ln \varepsilon|$,
- (б) $N < C\varepsilon^{-5/6}$.

Используя предложение 11.28, можно пройти через интервал $-\varepsilon^{1/6} \leq \sqrt{\varepsilon} \mu \leq -\hat{C}\sqrt{\varepsilon}/|\ln \varepsilon|$. Интервал $\hat{C}\sqrt{\varepsilon}/|\ln \varepsilon| \leq \sqrt{\varepsilon} \mu \leq \varepsilon^{1/6}$ проходится аналогично.

Чтобы построить траекторию 11.59, рассмотрим систему

$$\begin{cases} \dot{\mu} = -\frac{1}{\mathbf{t}_*}(\mathcal{F}_{\pm})_{\zeta}(\zeta) - \tilde{\mathbf{H}}_{\zeta}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta), \\ \dot{\zeta} = \nu'_0\mu + \sqrt{\varepsilon}\tilde{\mathbf{H}}_{\eta}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta), \end{cases} \quad (11.60)$$

$$(\mathcal{F}_{\pm})_{\zeta}(\zeta) = \widehat{F}_{\pm}(0, \zeta) - \mathbf{F}_{\pm}, \quad \mathbf{F}_{\pm} = \int_0^1 \widehat{F}_{\pm}(0, \zeta) d\zeta. \quad (11.61)$$

Эта система гамильтонова с симплектической структурой $d\mu \wedge d\zeta$ и гамильтонианом

$$\chi_{\pm}(\mu, \zeta) = \frac{1}{2}\nu'_0\mu^2 + \tilde{\mathbf{H}}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta) + \frac{1}{\mathbf{t}_*}\mathcal{F}_{\pm}(\zeta) + h_{\pm}, \quad (11.62)$$

$$h_{\pm} = -\max_{\zeta} \left(\tilde{\mathbf{H}}(\sqrt{\varepsilon}\mu, \zeta) + \frac{1}{\mathbf{t}_*}\mathcal{F}_{\pm}(\zeta) \right). \quad (11.63)$$

Далее в этом параграфе мы изучим свойства системы с гамильтонианом χ_- . Случай гамильтониана χ_+ рассматривается аналогично. Отметим, что ввиду (11.54), (11.55)

$$\begin{aligned} \chi_-(\mu_{n+1}, \zeta_{n+1}) - \chi_-(\mu_n, \zeta_n) &= \mathbf{d}_n^{\pm} - \sqrt{\varepsilon}\nu'_0\mu_n\widehat{\alpha}_n + \tilde{\beta}'_n + \tilde{\beta}''_n, \\ \mathbf{d}_n^{\pm} &= -\sqrt{\varepsilon}\nu'_0\mu_n\widehat{F}_{\pm}(0, \widehat{\zeta}_n) + \frac{1}{\mathbf{t}_*}(\mathcal{F}_-(\zeta_{n+1}) - \mathcal{F}_-(\zeta_n)), \end{aligned} \quad (11.64)$$

$$|\tilde{\beta}'_n| \leq \tilde{C}\varepsilon\mu_n^2|\ln \varepsilon|, \quad |\tilde{\beta}''_n| \leq \tilde{C}\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|. \quad (11.65)$$

Индекс $+$ или $-$ в $\mathbf{d}_n^{\pm}$ соответствует выбору $\widehat{v}_n$ в (11.56).

ЗАМЕЧАНИЕ 11.29. Согласно (11.58), разность $\widehat{\zeta}_{n+1} - \widehat{\zeta}_n \in \mathbb{R}/(q_0^{-1}\mathbb{Z})$ близка к нулю. Далее мы считаем $\widehat{\zeta}_{n+1} - \widehat{\zeta}_n$ (соответственно $\zeta_{n+1} - \zeta_n$) вещественным числом, лежащим в малой окрестности нуля. Ввиду этого соглашения мы считаем $\widehat{\zeta}_{s+k+1} - \widehat{\zeta}_s$ (соответственно $\zeta_{s+k+1} - \zeta_s$) суммой $\sum_{n=s}^{s+k} (\widehat{\zeta}_{n+1} - \widehat{\zeta}_n)$ (соответственно $\sum_{n=s}^{s+k} (\zeta_{n+1} - \zeta_n)$).

Для $s \leq k' \leq k''$ положим $\mathbf{D}_{k',k''}^{\pm} = \chi_-(\mu_{k'',k''}) - \chi_-(\mu_{k'},k')$, где верхний индекс у $\mathbf{D}$ тот же, что и у $\mathbf{d}_n^{\pm}$ в (11.64).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 11.30. Пусть последовательность $\zeta_{k'}, \zeta_{k'+1}, \dots, \zeta_{k''}$ монотонна. Тогда существует постоянная $K \in \mathbb{N}$ такая, что при $k'' - k' \geq K$ и при $|\widehat{\zeta}_{s+k+1} - \widehat{\zeta}_s| < 1$

$$\mathbf{D}_{k',k''}^{\pm} = -\frac{1}{\mathbf{t}_*}a_{\pm} + a'_{\pm} + a''_{\pm},$$

где

$$a_{\pm} = -\int_{\zeta_{k'}}^{\zeta_{k''}} \widehat{F}_{\pm}(0, \zeta) d\zeta + \mathcal{F}(\zeta_{k''}) - \mathcal{F}(\zeta_{k'}), \quad (11.66)$$

$$|a'_{\pm}| < \frac{2d}{\mathbf{t}_*}|\zeta_{k''} - \zeta_{k'}|,$$

$$|a''_{\pm}| < C(\sqrt{\varepsilon}\mu_{k',k''} + (k'' - k')\varepsilon\mu_{k',k''}^2|\ln \varepsilon| + (k'' - k')\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|),$$

$$\mu_{k',k''} = \max_{k' \leq n \leq k''} |\mu_n|. \quad (11.67)$$

Доказательство предложения 11.30 содержится в § 9.

Отметим, что, согласно (11.61) и (11.66),

$$a_- = -(\zeta_{k''} - \zeta_{k'})\mathbf{F}_-, \quad a_- - a_+ = \int_{\zeta_{k'}}^{\zeta_{k''}} (\widehat{F}_+(0, \zeta) - \widehat{F}_-(0, \zeta)) d\zeta.$$

Траектория (11.59) строится следующим образом. Возьмем в (11.54) $\widehat{v}_n = \widehat{F}_-(0, \widehat{\zeta}_n)$. Рассмотрим постоянную K , удовлетворяющую предложению 11.30. При $K \leq n - s \leq c \frac{\mu_n}{\sqrt{\varepsilon} |\ln \varepsilon|}$

$$|\mu_s - \mu_n| = |O(K\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)| < \mu_n/2. \quad (11.68)$$

Разность $\zeta_n - \zeta_{n-K}$ отрицательна, так как в (11.55) $\mu_n < 0$. Более того, ввиду (11.68)

$$\zeta_n - \zeta_{n-K} < \frac{1}{3} \nu'_0 \sqrt{\varepsilon} \mu_n K \frac{|\ln \varepsilon|}{\lambda}. \quad (11.69)$$

Согласно предложению 11.30: $\chi_-(\mu_n, \zeta_n) - \chi_-(\mu_{n-K}, \zeta_{n-K}) = \mathbf{D}_{n-K,n}^-$,

$$\begin{aligned} \mathbf{D}_{n-K,n}^- &< -\frac{(\zeta_n - \zeta_{n-K})\mathbf{F}_-}{\mathbf{t}_*} + \frac{2d|\zeta_n - \zeta_{n-K}|}{\mathbf{t}_*} + 2C\sqrt{\varepsilon} \mu_n + 2CK\varepsilon^{3/4} |\ln \varepsilon| \\ &< -\frac{\mathbf{F}_- + 2d}{4} \sqrt{\varepsilon} \mu_n \nu'_0 K \end{aligned} \quad (11.70)$$

при условии, что постоянная K достаточно велика по сравнению с C . Напомним, что согласно $\mathbf{H}_1\mathbf{2}$ имеем: $\mathbf{F}_- = 0$. Поэтому, действуя таким образом, мы достигнем точки (μ_{n_0}, ζ_{n_0}) такой, что

$$\mu_{n_0-1} \leq -\widehat{C}/|\ln \varepsilon| \leq \mu_{n_0}. \quad (11.71)$$

Более того, поскольку на этой части траектории среднее приращение μ имеет порядок $\sqrt{\varepsilon}$, получаем оценку

$$n_0 - s \leq C\varepsilon^{-5/6}. \quad (11.72)$$

Построение траектории для $\mu > \widehat{C}/|\ln \varepsilon|$, $\chi_+(\mu, \zeta) > 0$ аналогично: при $\widehat{v} = \widehat{F}_+(0, \widehat{\zeta})$ энергия χ_+ растет.

7.3. Шаг 3 (в резонансе). Покажем, как провести траекторию через цилиндр

$$\mathbf{S} = \{(\mu, \zeta) : |\mu| \leq \widehat{C}/|\ln \varepsilon|\}.$$

Ввиду (11.63) и $\mathbf{H}_1\mathbf{3}$ уравнение $\chi = 0$ задает сепаратрисы. Эти сепаратрисы являются внешними в том смысле, что все критические точки χ_- расположены в области $\{\chi_- \leq 0\}$. Возможно, имеются также внутренние сепаратрисы, соответствующие меньшим значениям энергии, но далее мы будем говорить только о внешних сепаратрисах. Кривую $\{\chi = 0, \mu < 0\}$ назовем нижней сепаратрисой, а $\{\chi = 0, \mu > 0\}$ – верхней.

Согласно $\mathbf{H}_1\mathbf{3}$, при достаточно малых ε максимум (11.63) достигается в единственной точке $\zeta_{\pm} = \zeta_{\pm}(\varepsilon) = \zeta_* + O(1/|\ln \varepsilon|)$.

Рассмотрим прямоугольник

$$\Pi = \{(\mu, \zeta \bmod 1/q^0) : |\mu| \leq \widehat{C}/|\ln \varepsilon|, |\zeta - \zeta_*| \leq \widehat{C}_1/|\ln \varepsilon|\},$$

где постоянные $\widehat{C}_1$, $\widehat{C}$ таковы, что при малых ε

1) энергия χ_- отрицательна в четырех точках

$$(\mu, \zeta) = (\pm \widehat{C}/|\ln \varepsilon|, \zeta_* \pm \widehat{C}_1/|\ln \varepsilon|)$$

(см. рис. 11.1);

Рис. 11.1

2) $|\zeta_{\pm}(\varepsilon) - \zeta_*| < \widehat{C}_1/2$.

В п. 7.2 мы продолжили траекторию задачи 2 до точки $(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) \in \mathbf{S}$, $\mu_{n_0} = -\widehat{C}/|\ln \varepsilon| + O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$. Возможны два случая. Точка (μ_{n_0}, ζ_{n_0}) может оказаться вне и внутри Π . В первом случае $\chi(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) < 0$. Следовательно, траектория уже пересекла нижнюю сепаратрису. Во втором случае управление траекторией может быть потеряно. Чтобы избежать этого, вернемся немного назад. Точнее, стартуя с некоторой точки $(\mu_{n'}, \zeta_{n'})$, $n' < n_0$, мы будем строить траекторию как на шаге 2, используя $\widehat{v} = \widehat{f}_+(0, \widehat{\zeta})$ вместо $\widehat{v} = \widehat{f}_-(0, \widehat{\zeta})$.

Обозначим новую траекторию

$$(\mu_{n'}, \zeta_{n'}), (\mu_{n'+1}^+, \zeta_{n'+1}^+), (\mu_{n'+2}^+, \zeta_{n'+2}^+), \dots, (\mu_{n''}^+, \zeta_{n''}^+). \quad (11.73)$$

Теперь, согласно предложению 11.30, энергия χ на траектории уменьшается медленнее или вообще не уменьшается. Выберем $(\mu_{n'}, \zeta_{n'})$ так, что

$$\int_{\zeta_{n_0}}^{\zeta_{n'}} (\widehat{F}_+(0, \zeta) - \widehat{F}_-(0, \zeta)) d\zeta = c_0/|\ln \varepsilon| + O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon).$$

Затем возьмем точку $(\mu_{n''}^+, \zeta_{n''}^+)$, $n'' > n'$, такую, что $\zeta_{n''}^+ = \zeta_{n_0} + O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon)$. Ввиду предложения 11.30,

$$\chi_-(\mu_{n''}^+, \zeta_{n''}^+) - \chi_-(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) = \frac{c_0 + Y_1}{\mathbf{t}_* |\ln \varepsilon|},$$

где $|Y_1| < 3d$ при достаточно малых ε . Следовательно,

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}\nu'_0(\mu_{n''}^+)^2 - \frac{1}{2}\nu'_0\mu_{n_0}^2 + O(\sqrt{\varepsilon} \ln \varepsilon) &= \frac{c_0 + Y_1}{\mathbf{t}_*|\ln \varepsilon|}, \\ (\mu_{n''}^+)^2 &= \mu_{n_0}^2 + \frac{2(c_0 + Y_2)}{\nu'_0\mathbf{t}_*|\ln \varepsilon|}, \quad |Y_2| < 4d. \end{aligned}$$

(Напомним, что $\mu_{n''}^+$ и μ_{n_0} отрицательны.)

При некотором c_0 продолжение траектории (11.73) с $\hat{v}_n = \hat{F}_-(0, \hat{\zeta}_n)$ пересечет нижнюю сепаратрису вне Π . Поэтому, переобозначая (μ_n^+, ζ_n^+) на (μ_n, ζ_n) и n'' на n_0 , мы возвращаемся к предположению, что (11.71) справедливо и $(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) \in \mathbf{S} \setminus \Pi$.

Теперь мы собираемся перейти через резонанс и пересечь верхнюю сепаратрису вне Π . Рассмотрим значение энергии $\chi_+(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0})$ (вместо χ_-). Имеется два случая.

1) $\chi_+(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) > -c_\bullet/|\ln \varepsilon|$, где $c_\bullet > 0$ достаточно мало.

В этом случае мы пройдем $\mathbf{S}$, используя $\hat{v}_n = \hat{F}_-(0, \hat{\zeta}_n)$ (это возможно, так как (μ_{n_0}, ζ_{n_0}) находится вне Π). При этом понадобится $O(\varepsilon^{-1/2}|\ln \varepsilon|^{-2})$ шагов, и ζ изменится на величину $\sim \ln^{-2} \varepsilon$. Таким образом, траектория покинет $\mathbf{S}$ с

$$\chi_+(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) > -c_\bullet/|\ln \varepsilon| + O(\ln^{-2} \varepsilon). \quad (11.74)$$

Тогда мы переключимся на $\hat{v}_n = \hat{F}_+(0, \hat{\zeta}_n)$. Согласно (11.74) траектория пересечет верхнюю сепаратрису вне Π .

2) $\chi_+(\mu_{n_0}, \zeta_{n_0}) < -c_\bullet/|\ln \varepsilon|$. В этом случае мы вернемся назад. Используя управление $\hat{v}_n = \hat{F}_+(0, \hat{\zeta}_n)$, начиная с некоторого $n' < n_0$, мы получим траекторию, на которой χ_+ окажется больше. Выбирая n' и $n'' > n'$, где опять $\hat{v}_n = \hat{F}_+(0, \hat{\zeta}_n)$, мы сводим ситуацию к случаю (1).

§ 8. Доказательство леммы 11.24

С помощью леммы 11.22 можно построить траекторию такую, что на соответствующей последовательности $(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_{k+1}), (\bar{\Omega}_{k+1}, \bar{\Omega}_{k+2}), \dots$ правых совместных квазитраекторий в соответствии с нашими нуждами $v_n = \hat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n)$, $n = k, k+1, \dots$, равно

$$\text{либо } \hat{F}_+^{\sigma_n}(\varepsilon\rho_{n-1}, \zeta_{n-1} + \nu(\varepsilon\rho_{n-1})\mathbf{t}_n), \quad \text{либо } \hat{F}_-^{\sigma_n}(\varepsilon\rho_{n-1}, \zeta_{n-1} + \nu(\varepsilon\rho_{n-1})\mathbf{t}_n)$$

(см. (11.39)).

Необходимо показать, что коды $(\bar{\Omega}_k, \bar{\Omega}_{k+1})$ можно выбрать так, что на соответствующей траектории $\varepsilon\rho$ проходит через интервал $\mathbf{I}$. Для этого мы сведем задачу к задаче 2. Действительно, при $\varepsilon\bar{\rho}_n \in \mathbf{I}$, соединяя (10.13) с оценками ¹⁴

$$|\bar{\rho}_n - \rho_n| < b/b_\rho, \quad |\bar{\zeta}_n - \zeta_n| < b/b_\zeta, \quad |\bar{\tau}_n - \tau_n| < b/b_\tau,$$

¹⁴Напомним, что b_ρ, b_ζ, b_τ удовлетворяют (10.25)–(10.27) и, в частности, величины $b/b_\rho, b/b_\zeta, b/b_\tau$ малы.

получаем:

$$\begin{aligned}\bar{\rho}_{n+1} &= \bar{\rho}_n - \widehat{\Theta}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n, \bar{\tau}_n) + (\bar{\tau}_{n+1} - \bar{\tau}_n - \bar{t}_{n+1})\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n) + \tilde{\alpha}_n, \\ \bar{\zeta}_{n+1} &= \bar{\zeta}_n + \nu(\varepsilon\bar{\rho}_n)\bar{t}_{n+1} + \tilde{\beta}_n,\end{aligned}$$

где при малых $d > 0$ имеем: $|\tilde{\alpha}_n| < d/2$, $|\tilde{\beta}_n| < C\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|/2$. Обозначим

$$\begin{aligned}\mu_n &= \sqrt{\varepsilon}(\bar{\rho}_n - \bar{\tau}_n\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n)), \\ \alpha_n &= \tilde{\alpha}_n + \bar{\tau}_{n+1}(\mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_n, \bar{\zeta}_n) - \mathbf{H}_\zeta(\varepsilon\bar{\rho}_{n+1}, \bar{\zeta}_{n+1})).\end{aligned}$$

В результате получаем (11.34). Так как $\nu(\varepsilon\bar{\rho}_n) = \nu(\sqrt{\varepsilon}\mu_n) + O(\varepsilon)$, получаем (11.35).

§ 9. Добавление к § 7

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО предложения 11.30. Имеем:

$$\begin{aligned}\mathbf{D}_{k',k''}^\pm &= \Sigma'_\pm + \Sigma''_\pm + \Sigma'''_\pm, \\ \Sigma'_\pm &= \sum_{n=k'}^{k''-1} \mathbf{d}_n^\pm, \quad \Sigma''_\pm = -\sqrt{\varepsilon}\nu'_0 \sum_{n=k'}^{k''-1} \mu_n \widehat{\alpha}_n, \quad \Sigma'''_\pm = \sum_{n=k'}^{k''-1} (\beta'_n + \beta''_n).\end{aligned}$$

Предложение 11.30 следует из оценок

$$\begin{aligned}\Sigma'_\pm &= \frac{1}{\mathbf{t}_*} \left(- \int_{\zeta_{k'}}^{\zeta_{k''}} \widehat{F}_\pm(0, \zeta) d\zeta + \mathcal{F}(\zeta_{k''}) - \mathcal{F}(\zeta_{k'}) + \delta' \right), \\ |\delta'| &< C(\sqrt{\varepsilon}\mu_{k',k''} + k\varepsilon\mu_{k',k''}^2|\ln \varepsilon| + k\varepsilon^{3/4}|\ln \varepsilon|),\end{aligned}\tag{11.75}$$

$$|\Sigma''_\pm| < \frac{2d}{\mathbf{t}_*} |\zeta_{k''} - \zeta_{k'}| + \frac{C(k'' - k')}{\Delta} (\varepsilon\mu_{k',k''}^2 + \varepsilon^{3/4}) |\ln \varepsilon|.\tag{11.76}$$

Сначала проверим (11.75):

$$\Sigma'_\pm = - \sum_{n=k'}^{k''-1} \sqrt{\varepsilon}\nu'_0 \mu_n \widehat{F}_\pm(0, \widehat{\zeta}_n) + \frac{1}{\mathbf{t}_*} (\mathcal{F}(\zeta_{k''}) - \mathcal{F}(\zeta_{k'})).$$

Ввиду (11.58) множитель $\sqrt{\varepsilon}\nu'_0 \mu_n$ в последней сумме равен $\frac{1}{\mathbf{t}_*} (\widehat{\zeta}_{n+1} - \widehat{\zeta}_n - \delta_n)$. Следовательно,

$$\begin{aligned}\Sigma'_\pm &= \frac{1}{\mathbf{t}_*} (\Sigma'_{1\pm} + \Sigma'_{2\pm} + \mathcal{F}(\zeta_{k''}) - \mathcal{F}(\zeta_{k'})), \\ \Sigma'_{1\pm} &= - \sum_{n=k'}^{k''-1} \widehat{F}_\pm(0, \widehat{\zeta}_n) (\widehat{\zeta}_{n+1} - \widehat{\zeta}_n), \\ \Sigma'_{2\pm} &= \sum_{n=k'}^{k''-1} \widehat{F}_\pm(0, \widehat{\zeta}_n) \delta_n.\end{aligned}$$

Функции $\widehat{F}_\pm$ кусочно гладкие. Так что, согласно (11.57), имеем:

$$\left| \Sigma'_{1\pm} + \int_{\zeta_{k'}}^{\zeta_{k''}} \widehat{F}_\pm(0, \zeta) d\zeta \right| < C\sqrt{\varepsilon} \mu_{k', k''}.$$

Сумму $\Sigma'_{2\pm}$ можно оценить следующим образом:

$$|\Sigma'_{2\pm}| \leq C_1 \sum_{n=k'}^{k''} |\delta_n| \leq C(k'' - k')(\mu_{k', k''}^2 \varepsilon + \varepsilon^{3/4}) |\ln \varepsilon|.$$

Отсюда следует (11.75).

Чтобы проверить (11.76), заметим, что $|\Sigma''| \leq \frac{2d}{\mathbf{t}_*} |\Sigma_{n=k'}^{k''-1} (\widehat{\zeta}_{n+1} - \widehat{\zeta}_n - \delta_n)|$. Таким образом,

$$|\Sigma''_\pm| \leq \frac{2d}{\mathbf{t}_*} |\widehat{\zeta}_{k''} - \widehat{\zeta}_{k'}| + \frac{2d}{\mathbf{t}_*} \sum_{n=k'}^{k''-1} |\delta_n|.$$

Последнюю сумму можно оценить по аналогии с $\Sigma'_{2\pm}$.

§ 10. Вспомогательные утверждения

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.1. Разность $\mathbf{H}(y^0, x + p/q) - \mathbf{H}(y^0, x)$ равна

$$\sum_{(k, k_0) \in \mathbb{Z}^2} \phi\left(\frac{kp/q + k_0 + k\delta}{\varepsilon^{1/4}}\right) H_1^{k, k_0}(y^0) e^{2\pi i k x} (e^{2\pi i k p/q} - 1).$$

Рассмотрим ненулевые слагаемые в этой сумме. Сначала заметим, что

$$|kp/q + k_0 + k\delta| < \varepsilon^{1/4}, \quad (11.77)$$

иначе $\phi = 0$. Далее, $kp/q \notin \mathbb{Z}$, так как иначе $e^{2\pi i k p/q} - 1 = 0$. Таким образом, имеем: $|kp/q + k_0| \geq 1/q > 2\varepsilon^{1/4}$. Отсюда и из (11.77) следует, что $|k\delta| > 1/(2q)$, т.е. $|k| > 1/(2q\delta)$. Неравенство (11.1) следует из стандартной оценки $|H_1^{k, k_0}| < C_1(|k| + |k_0|)^{-j}$. Предложение 11.1 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ПРЕДЛОЖЕНИЯ 11.5. По теореме Дирихле получаем, что существует $q \leq K - 1$, $p \in \mathbb{Z}$ такие, что дробь p/q несократима и $|q\nu - p| \leq \frac{1}{K}$, т.е. $\nu = p/q + \xi$, $|\xi| < 1/(qK)$.

Пусть $I \subset \text{rg}_{\bar{\nu}} j_+^\sigma(\eta)$. Предположим, что $q > 2/|I|$. Тогда для доказательства предложения 11.5 достаточно доказать, что

$$\bigcup_{0 \leq t \leq K} g^{n, t}(I) = \mathbb{T}^2. \quad (11.78)$$

Равенство (11.78) вытекает из того, что

$$\bigcup_{n=0}^{K-1} g^{n, n}(I) = \mathbb{T}_0 \equiv \mathbb{T}^2 \cap \{\tau = 0\}. \quad (11.79)$$

Последнее равенство эквивалентно следующему:

$$\mathbb{T} = \left(\bigcup_{n=0}^{K-1} [n\nu, |I| + n\nu] \right) \bmod 1.$$

Заменим последнее множество его подмножеством:

$$U = \left(\bigcup_{n=0}^{q-1} \left[\frac{np}{q} + n\xi, |I| + \frac{np}{q} + n\xi \right] \right) \bmod 1.$$

Если $\xi = 0$, U покрывает по крайней мере дважды тор $\mathbb{T}$. Действительно, это следует из предположения $|I| > 2/q$. Поскольку $|n\xi| < 1/K < 1/q$ для $0 < n < q - 1$, U совпадает с $\mathbb{T}_0$.

Список литературы

- [1] Г. М. Заславский, Н. Н. Филоненко, “Стохастическая неустойчивость захваченных частиц и условия применимости квазилинейного приближения”, *ЖЭТФ*, **54** (1968), 1590–1602; англ. пер.: G. M. Zaslavskii, N. N. Filonenko, “Stochastic instability of trapped particles and conditions of applicability of the quasi-linear approximation”, *Soviet Phys. JETP*, **27** (1968), 851–857.
- [2] Л. П. Шильников, “Об одном случае существования счетного множества периодических движений”, *Докл. АН СССР*, **160**:3 (1965), 558–561; англ. пер.: L. P. Shil’nikov, “A case of the existence of a countable number of periodic motions”, *Soviet Math. Dokl.*, **6** (1965), 163–166.
- [3] J. M. Greene, “A method for determining a stochastic transition”, *J. Math. Phys.*, **20**:6 (1979), 1183–1201.
- [4] R. S. MacKay, I. C. Percival, “Converse KAM: Theory and practice”, *Comm. Math. Phys.*, **98**:4 (1985), 469–512.
- [5] A. Olvera, C. Simó, “An obstruction method for the destruction of invariant curves”, *Phys. D*, **26**:1–3 (1987), 181–192.
- [6] N. N. Filonenko, R. Z. Sagdeev, G. M. Zaslavsky, “Destruction of magnetic surfaces by magnetic field irregularities. II”, *Nucl. Fusion*, **7** (1967), 253–266.
- [7] B. V. Chirikov, “A universal instability of many-dimensional oscillation systems”, *Phys. Rep.*, **52**:5 (1979), 263–379.
- [8] С. А. Довбыш, “Структура Колмогоровского множества возле сепаратрис плоского отображения”, *Матем. заметки*, **46**:4 (1989), 112–114.
- [9] T. Ahn, G. Kim, S. Kim, “Analysis of the separatrix map in Hamiltonian systems”, *Phys. D*, **89**:3–4 (1996), 315–328.
- [10] В. Ф. Лазуткин, “О ширине зоны устойчивости возле сепаратрис стандартного отображения”, *Докл. АН СССР*, **313**:2 (1990), 268–272; англ. пер.: V. F. Lazutkin, “The width of the instability zone around separatrices of a standard mapping”, *Soviet Math. Dokl.*, **42**:1 (1991), 5–9.
- [11] Я. Г. Синай, “Несколько точных результатов об убывании корреляций”, Дополнение в кн. Г. М. Заславский, *Статистическая необратимость в нелинейных системах*, Соврем. проблемы физики, Наука, М., 1970, 124–139.
- [12] В. В. Козлов, “Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы”, *УМН*, **41**:5 (1986), 177–178; англ. пер.: V. V. Kozlov, “The splitting of separatrices and the generation of isolated periodic solutions in Hamiltonian systems with one-and-a-half degrees of freedom”, *Russian Math. Surveys*, **41**:5 (1986), 149–150.

- [13] D. V. Treschev, “Hyperbolic tori and asymptotic surfaces in Hamiltonian systems”, *Russian J. Math. Phys.*, **2**:1 (1994), 93–110.
- [14] С. А. Довбыш, “Расщепление сепаратрис и рождение изолированных периодических решений в гамильтоновых системах с полутора степенями свободы”, *УМН*, **44**:2 (1989), 229–230; англ. пер.: S. A. Dovbysh, “The splitting of separatrices and the generation of isolated periodic solutions in Hamiltonian systems with one and a half degrees of freedom”, *Russian Math. Surveys*, **44**:2 (1989), 281–282.
- [15] C. Simó, D. Treschev, “Stability islands in the vicinity of separatrices of near-integrable symplectic maps”, *J. Discrete Contin. Dyn. Syst.* (to appear).
- [16] В. И. Арнольд, “О неустойчивости динамических систем со многими степенями свободы”, *Докл. АН СССР*, **156**:1 (1964), 9–12; англ. пер.: V. I. Arnol’d, “Instability of dynamical systems with several degrees of freedom”, *Soviet Math. Dokl.*, **5** (1964), 581–585.
- [17] Н. Н. Нехорошев, “Экспоненциальная оценка времени устойчивости гамильтоновых систем близких к интегрируемым”, *УМН*, **32**:6(198) (1977), 5–66; англ. пер.: N. N. Nekhoroshev, “An exponential estimate of the time of stability of nearly-integrable hamiltonian systems”, *Russian Math. Surveys*, **32**:6 (1977), 1–65.
- [18] R. Douady, “Stabilité ou instabilité des points fixes elliptiques”, *Ann. Sci. École Norm. Sup.* (4), **21**:1 (1988), 1–46.
- [19] J.-P. Marco, D. Sauzin, “Stability and instability for Gevrey quasi-convex near-integrable Hamiltonian systems”, *Publ. Math. Inst. Hautes Études Sci.*, **96**:1 (2003), 199–275.
- [20] E. Fontich, P. Martin, “Arnold diffusion in perturbations of analytic integrable Hamiltonian systems”, *Discrete Contin. Dynam. Systems*, **7**:1 (2001), 61–84.
- [21] G. Gallavotti, G. Gentile, V. Mastropietro, “Hamilton–Jacobi equation, heteroclinic chains and Arnol’d diffusion in three time scale systems”, *Nonlinearity*, **13**:2 (2000), 323–340.
- [22] U. Bessi, “An approach to Arnold’s diffusion through the calculus of variations”, *Nonlinear Anal.*, **26**:6 (1996), 1115–1135.
- [23] C. Simó, C. Valls, “A formal approximation of the splitting of separatrices in the classical Arnol’d’s example of diffusion with two equal parameters”, *Nonlinearity*, **14**:6 (2001), 1707–1760.
- [24] J. N. Mather, “Arnold diffusion. I: Announcement of results”, *J. Math. Sci. (N. Y.)*, **124**:5 (2004), 5275–5289; пер. с русск.: Дж. Н. Мэзер, “Диффузия Арнольда, I: анонс результатов”, Современная математика. Фундаментальные направления, **2**, МАИ, М., 2003, 116–130.
- [25] G. N. Piftankin, “Diffusion speed in the Mather problem”, *Nonlinearity*, **19**:11 (2006), 2617–2644.
- [26] S. Bolotin, D. Treschev, “Unbounded growth of energy in nonautonomous Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **12**:2 (1999), 365–388.
- [27] A. Delshams, R. de la Llave, T. M. Seara, “A geometric approach to the existence of orbits with unbounded energy in generic periodic perturbations by potential of generic geodesic flows on T^2 ”, *Comm. Math. Phys.*, **209**:2 (2000), 353–392.
- [28] V. Kaloshin, “Geometric proofs of Mather’s connecting and accelerating theorems”, *Topics in dynamics and ergodic theory* (Katsiveli, Ukraine, 2000), London Math. Soc. Lecture Note Ser., **310**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2003, 81–106.
- [29] A. Delshams, R. de la Llave, T. M. Seara, “Orbits of unbounded energy in quasi-periodic perturbations of geodesic flows”, *Adv. Math.*, **202**:1 (2006), 64–188.
- [30] L. Chierchia, G. Gallavotti, “Drift and diffusion in phase space”, *Ann. Inst. H. Poincaré. Phys. Théor.*, **60**:1 (1994), 1–144.
- [31] D. Treschev, “Multidimensional symplectic separatrix maps”, *J. Nonlinear Sci.*, **12**:1 (2002), 27–58.

- [32] D. Treschev, “Evolution of slow variables in *a priori* unstable Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **17**:5 (2004), 1803–1841.
- [33] M. Berti, P. Bolle, “Diffusion time and splitting of separatrices for nearly integrable isochronous Hamiltonian systems”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **11**:4 (2000), 235–243.
- [34] J. Cresson, C. Guillet, “Periodic orbits and Arnold diffusion”, *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **9**:2 (2003), 451–470.
- [35] M. Berti, L. Biasco, P. Bolle, “Drift in phase space: A new variational mechanism with optimal diffusion time”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **82**:6 (2003), 613–664.
- [36] B. Berti, L. Biasco, P. Bolle, “Optimal stability and instability results for a class of nearly integrable Hamiltonian systems”, *Atti Accad. Naz. Lincei Cl. Sci. Fis. Mat. Natur. Rend. Lincei (9) Mat. Appl.*, **13**:2 (2002), 77–84.
- [37] Z. Xia, “Arnold diffusion: a variational construction”, *Doc. Math. J. DMV Extra Volume ICM II*, 1998, 867–877.
- [38] C.-Q. Cheng, J. Yan, “Existence of diffusion orbits in *a priori* unstable Hamiltonian systems”, *J. Differential Geom.*, **67**:3 (2004), 457–517.
- [39] A. Delshams, R. de la Llave, T. M. Seara, *A geometric mechanism for diffusion in Hamiltonian systems*, http://www.ma.utexas.edu/mp_arc/e/03-182.ps.
- [40] A. Delshams, R. de la Llave, T. M. Seara, *A geometric mechanism for diffusion in Hamiltonian systems overcoming the large gap problem: heuristic and rigorous verification on a model*, Mem. Amer. Math. Soc., **179**:844, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 2006.
- [41] Дж. Д. Биркгоф, *Динамические системы*, Гостехиздат, М.–Л., 1941; пер. с англ.: G. D. Birkhoff, *Dynamical systems*, Amer. Math. Soc., New York, 1927.
- [42] J. Moser, “The analytic invariants of an area-preserving mapping near a hyperbolic fixed point”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **9**:4 (1956), 673–692.
- [43] A. Banyaga, R. de la Llave, C. E. Wayne, “Cohomology equations near hyperbolic points and geometric versions of Sternberg linearization theorem”, *J. Geom. Anal.*, **6**:4 (1996), 613–649.
- [44] Д. В. Трепцев, *Введение в теорию возмущений гамильтоновых систем*, Фазис, М., 1998.
- [45] С. Л. Зиглин, “Ветвление решений и несуществование первых интегралов в гамильтоновой механике. I, II”, *Функц. анализ и его прилож.*, **16**:3 (1982), 30–41; **17**:1 (1983), 8–23; англ. пер.: S. L. Ziglin, “Branching of solutions and nonexistence of first integrals in Hamiltonian mechanics. I, II”, *Funct. Anal. Appl.*, **16**:3 (1982), 181–189; **17**:1 (1983), 6–17.
- [46] A. Pronin, D. Treschev, “On the inclusion of analytic maps into analytic flows”, *Regul. Chaotic Dyn.*, **2**:2 (1997), 14–24.
- [47] D. Treschev, “Width of stochastic layers in near-integrable two-dimensional symplectic maps”, *Phys. D*, **116**:1–2 (1998), 21–43.
- [48] В. И. Арнольд, В. В. Козлов, А. И. Нейштадт, “Математические аспекты классической и небесной механики”, Итоги науки и техники. Соврем. проблемы матем. Фундам. напр., **3**, ВИНТИ, М., 1985, 5–304; англ. пер.: V. I. Arnol’d, V. V. Kozlov, A. I. Neishtadt, *Mathematical aspects of classical and celestial mechanics*, Dynamical systems, III, 3rd ed., Encyclopaedia Math. Sci., **3**, Springer, Berlin, 2006.
- [49] S. M. Graff, “On the conservation of hyperbolic tori for Hamiltonian systems”, *J. Differential Equations*, **15**:1 (1974), 1–69.
- [50] E. Zehnder, “Generalized implicit function theorem with applications to some small divisor problems. I, II”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **28**:1 (1975), 91–140; **29**:1 (1976), 49–111.

- [51] H. Poincaré, *Les méthodes nouvelles de la mécanique céleste*, **1–3**, Gauthier-Villars, Paris, 1892; 1893; 1899.
- [52] A. Delshams, P. Gutiérrez, “Splitting potential and Poincaré–Melnikov method for whiskered tori in Hamiltonian systems”, *J. Nonlinear Sci.*, **10**:4 (2000), 433–476.
- [53] V. G. Gelfreich, “Separatrices splitting for the rapidly forced pendulum”, *Seminar on Dynamical Systems* (St. Petersburg, Russia, 1991), Progr. Nonlinear Differential Equations Appl., **12**, Birkhäuser, Basel, 1994, 47–67.
- [54] В. Ф. Лазуткин, *Расщепление сепаратрис в стандартном отображении Чирикова*, деп. в ВИНТИ № 6372-84.
- [55] V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, N. V. Svanidze, “A refined formula for the separatrix splitting for the standard map”, *Phys. D*, **71**:1–2 (1994), 82–101.
- [56] В. Гельфрейх, В. Лазуткин, “Расщепление сепаратрис: теория возмущений, экспоненциально малость”, *УМН*, **56**:3 (2001), 79–142; англ. пер.: V. G. Gelfreich, V. F. Lazutkin, “Splitting of separatrices: perturbation theory and exponential smallness”, *Russian Math. Surveys*, **56**:3 (2001), 499–558.
- [57] A. Delshams, T. M. Seara, “An asymptotic expressions for the splitting of separatrices of the rapidly forced pendulum”, *Comm. Math. Phys.*, **150**:3 (1992), 433–463.
- [58] D. Treschev, “An averaging method for Hamiltonian systems, exponentially close to integrable ones”, *Chaos*, **6**:1 (1996), 6–14.
- [59] D. Treschev, “Separatrix splitting for a pendulum with rapidly oscillating suspension point”, *Russian J. Math. Phys.*, **5**:1 (1997), 63–98.
- [60] S. Aubry, “The twist map, the extended Frenkel–Kontorova model and the devil’s staircase”, *Phys. D*, **7**:1–3 (1983), 240–258.
- [61] R. S. MacKay, “A renormalization approach to invariant circles in area-preserving maps”, *Phys. D*, **7**:1–3 (1983), 283–300.
- [62] J. N. Mather, “Non-existence of invariant circles”, *Ergodic Theory Dynam. Systems*, **4**:2 (1984), 301–311.
- [63] V. G. Gelfreich, “Reference systems for splitting of separatrices”, *Nonlinearity*, **10**:1 (1997), 175–193.
- [64] G. D. Birkhoff, “Surface transformations and their dynamical applications”, *Acta Math.*, **43** (1920), 1–119.
- [65] M. R. Herman, *Sur les courbes invariantes par les difféomorphismes de l’anneau*, vol. I, Astérisque, **103–104**, Soc. Math. France, Paris, 1983.
- [66] D. Treschev, “Trajectories in a neighborhood of asymptotic surface of *a priori* unstable Hamiltonian systems”, *Nonlinearity*, **15**:6 (2002), 2033–2052.

Г. Н. Пифтанкин (G. N. Piftankin)

Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию

01.02.2007

Д. В. Трещёв (D. V. Treschev)

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: treschev@mi.ras.ru