Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Джумадильдаев, К. М. Туленбаев, Бикоммутативные алгебры, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 149–150

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm681>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.6.47.48

26 апреля 2023 г., 17:49:14

БИКОММУТАТИВНЫЕ АЛГЕБРЫ

А. С. Джумадильдаев, К. М. Туленбаев

Алгебра над полем K называется левокоммутативной, если выполнено тождество $a \circ (b \circ c) = b \circ (a \circ c)$. Аналогично правокоммутативная алгебра определяется тождеством $(a \circ b) \circ c = (a \circ c) \circ b$. Право- и левокоммутативные алгебры называются бикоммутативными.

Алгебра матриц порядка n удовлетворяет стандартному тождеству степени $2n$ [1]. Такие тождества можно рассматривать как обобщения условия коммутативности. Интерес к односторонне коммутативным алгебрам мотивирован потребностями теории скобок Пуассона и интегрируемых систем. Такие алгебры возникают, например, при рассмотрении уравнений гидродинамического типа [2].

Имеется бесконечно много неизоморфных простых односторонне коммутативных алгебр. Например, алгебра с базисом $\{e_1, \dots, e_n\}$ и умножением $e_i \circ e_j = \lambda_{ij} e_j$, где (λ_{ij}) – матрица с различными столбцами, дает пример простых левокоммутативных алгебр [3].

Пусть A^- и A^+ – алгебры, полученные из A , с новыми умножением $[a, b] = a \circ b - b \circ a$ и $\{a, b\} = a \circ b + b \circ a$, соответственно.

ТЕОРЕМА 1. Пусть A – бикоммутативная алгебра. Тогда A^2 коммутативна и ассоциативна. В частности, всякая простая конечномерная алгебра одномерна. Кроме того, в A имеют место тождества

$$a \circ [b, c] + b \circ [c, a] + c \circ [a, b] = 0, \quad [a, b] \circ c + [b, c] \circ a + [c, a] \circ b = 0.$$

В частности, A^- является алгеброй Ли. В алгебре A^+ имеют место тождества

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \quad \{\{a, b\}, \{c, d\}\} - \{\{a, d\}, \{c, b\}\} = -\{(a, b, c)^+, d\} + \{(a, d, c)^+, b\},$$

где $(a, b, c)^+ = \{a, \{b, c\}\} - \{\{a, b\}, c\}$ – ассоциатор в алгебре A^+ .

ЗАМЕЧАНИЕ. Если A – алгебра Новикова, то A^+ удовлетворяют тождествам

$$\{a, b\} = \{b, a\}, \quad \{\{a, b\}, \{c, d\}\} - \{\{a, d\}, \{c, b\}\} = \{(a, b, c)^+, d\} - \{(a, d, c)^+, b\}.$$

Приведем классификацию бикоммутативных алгебр A размерности ≤ 3 с условием $A^2 = A$. Всякая двумерная бикоммутативная алгебра изоморфна алгебре с базисом $\{a, b\}$ и с умножениями

$$a \circ a = a, \quad a \circ b = b \circ a = \varphi a, \quad b \circ b = b + (\varphi^2 - \varphi)a.$$

Для трехмерных алгебр имеется два класса неизоморфных алгебр. Пусть a, b, c – базисные элементы. Умножения в первом классе определяются так:

$$\begin{aligned} a \circ a &= a + (\lambda^2 - \lambda)c, & a \circ c &= c \circ a = \lambda c, \\ b \circ c &= c \circ b = \mu c, & a \circ b &= b \circ a = \varphi a + \lambda(\mu - \varphi)c, \\ b \circ b &= b + \varphi(\varphi - 1)a + (\mu - \varphi)(\mu + \varphi - 1)\lambda c, & c \circ c &= c. \end{aligned}$$

Умножения во втором классе алгебр определяются так:

$$\begin{aligned} a \circ a &= a + \lambda(2\varphi - 1)/(\varphi^2 - \varphi)c, & a \circ c &= c \circ a = c, \\ b \circ c &= c \circ b = \varphi c, & a \circ b &= b \circ a = \varphi a + \lambda c, \\ b \circ b &= b + \varphi(\varphi - 1)a, & c \circ c &= 0. \end{aligned}$$

Здесь $\varphi, \mu, \lambda \in K$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть $F(q)$ – свободная бикоммутативная алгебра с q образующими и $F_n(q)$ – ее однородная компонента, порожденная элементами степени n . Тогда

$$\dim F_n(q) = \sum_{k=1}^{[n/2]-2} \binom{q+k}{q-1} \binom{q+n-k-2}{q-1} + \sum_{k=1}^{[n/2]-1} \binom{q+k}{q-1} \binom{q+n-k-2}{q-1} + 2q \binom{n+q-2}{q-1}.$$

СЛЕДСТВИЕ. Для однопорожденной алгебры $\dim F_n(1) = n$ и ряд Гильберта задается так $H_t = 1 - t + t^3/(1-t)^2$.

Свободный базис алгебры $F(q)$ можно описать в терминах корневых деревьев [4] следующих двух типов:

Вершины таких деревьев нумеруются образующими алгебры $F(q)$. Условия бикоммутативности накладывают различные условия на вершины деревьев. Например, разрешается переставлять ветки и вершины вдоль ствола. Классы изоморфизмов таких деревьев дают базис алгебры $F(q)$.

Авторы благодарны программе ИНТАС за поддержку.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. A. Amitsur, J. Levitzki // Proc. Amer. Math. Soc. 1950. V. 1. P. 449–463.
- [2] А. А. Балинский, С. П. Новиков // Докл. АН СССР. 1985. Т. 283. № 5. С. 1036–1039.
- [3] И. П. Шестаков, Е. Н. Кузьмин // Итоги науки и техники. Соврем. пробл. матем. Фундам. напр. Т. 57. М.: ВИНТИ, 1990. С. 179–266. [4] A. Cayley. On the theory of analitical forms called trees // Phil. Mag. 1857. V. 13. P. 19–30; Math. Papers, Cambridge. 1891. V. 3. P. 242–246.

Институт математики НАН Республики Казахстан, Алматы
E-mail: askar@math.kz

Принято редколлегией
23.09.2003