Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Бурнаев, Задача о разладке для пуассоновского процесса в обобщенной байесовской постановке, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6810>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.217.227

26 апреля 2023 г., 03:15:03

Задача о разладке для пуассоновского процесса в обобщенной байесовской постановке

Е. В. Бурнаев

1. Предполагается, что на некотором вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbf{P})$ наблюдается случайный процесс $X = (X_t)_{t \geq 0}$, имеющий вид $X_t = \int_0^t I(s < \theta) dN_s^{\lambda_0} + \int_0^t I(s \geq \theta) dN_{s-\theta}^{\lambda_1}$, $X_0 = 0$, где $N^{\lambda_0} = (N_t^{\lambda_0})_{t \geq 0}$ и $N^{\lambda_1} = (N_t^{\lambda_1})_{t \geq 0}$ – пуассоновские процессы с интенсивностями λ_0 и λ_1 соответственно, $I(A)$ – индикатор события A . Неслучайный момент $\theta \in [0, \infty]$ интерпретируется как момент появления “разладки” (по терминологии [1], [2]) в ходе наблюдения за процессом X : при $t < \theta$ наблюдаемый процесс $X_t = N_t^{\lambda_0}$, а при $t \geq \theta$ процесс $X_t = N_\theta^{\lambda_0} + N_{t-\theta}^{\lambda_1}$. Задача будет рассматриваться в предположении, что $\lambda_1 < \lambda_0$.

Будем через $\tau = \tau(\omega)$ обозначать момент подачи сигнала о появлении “разладки”, т.е. пусть τ есть марковский момент со значениями в $[0, \infty]$ относительно потока $(\mathcal{F}_t^X)_{t \geq 0}$, где $\mathcal{F}_t^X = \sigma\{\omega : X_s, s \leq t\}$, $t \geq 0$.

В настоящей работе доказываем оптимальность статистики Ширияева (введенной в [1], [2]) в смысле минимизации *обобщенного байесовского критерия* (рассмотренного в [3]).

Пусть P_t – распределение вероятностей процесса X в предположении, что момент разладки $\theta = t$. Распределение P_∞ отвечает случаю отсутствия разладки ($\theta = \infty$), P_0 соответствует случаю наличия разладки в момент $\theta = 0$. Обозначим $\mathcal{M}_T = \{\tau : E_\infty \tau = T\}$ – класс моментов останова τ , для которых среднее время $E_\infty \tau$ до подачи (ложной) тревоги равно T .

Качество системы наблюдения, идентифицируемой с выбором момента $\tau \in \mathcal{M}_T$, будем оценивать величиной $B(T; \tau) = \frac{1}{T} \int_0^\infty E_\theta(\tau - \theta)^+ d\theta$, где $x^+ = \max(0, x)$. Момент $\tau_T^* \in \mathcal{M}_T$ естественно называть *оптимальным* (в обобщенном байесовском смысле), если $B(T) = B(T; \tau_T^*) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} B(T; \tau)$. В используемом байесовском критерии параметр θ можно интерпретировать как обобщенную случайную величину с “равномерным” распределением на $[0, \infty)$.

Обозначим через $\psi = (\psi_t)_{t \geq 0}$ процесс Ширияева, имеющий вид $\psi_t = \int_0^t \frac{L_t}{L_s} ds$, где $L_t = \frac{d(P_0 | \mathcal{F}_t^X)}{d(P_\infty | \mathcal{F}_t^X)} = \exp\left(\log\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0}\right) X_t - (\lambda_1 - \lambda_0)t\right)$ – производная Радона–Никодима сужения $P_0 | \mathcal{F}_t^X$ меры P_0 относительно сужения $P_\infty | \mathcal{F}_t^X$ меры P_∞ [1].

Пусть $\rho = \frac{1}{2} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}\right)^2$, $\beta = \frac{1}{6} \left(\frac{\lambda_1 - \lambda_0}{\sqrt{\lambda_0}}\right)^3$, $-\text{Ei}(-x) = \int_x^{+\infty} \frac{e^{-t}}{t} dt$ ($x > 0$) – интегральная показательная функция [4], $\mathbb{C} = 0.577 \dots$ – константа Эйлера. Выполняется следующая теорема.

ТЕОРЕМА. При каждом $T > 0$ в классе $\mathcal{M}_T$ существует оптимальный момент τ_T^* такой, что $\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq T\}$. При этом обобщенный байесовский риск $B(T) = V(0; T)/T$, где $V(x; T)$ – решение дифференциально-разностного уравнения

$$(1 - (\lambda_1 - \lambda_0)x)V'(x; T) + \lambda_0 \left(V\left(\frac{\lambda_1}{\lambda_0} x; T\right) - V(x; T) \right) = -x, \quad (1)$$

$$V(0; T) < \infty, \quad V(T; T) = 0.$$

Работа частично поддержана аналитической ведомственной целевой программой РНП.2.2.1.1.2467, программой “Ведущие научные школы” (грант НШ-5379.2006.1), программой фундаментальных исследований Президиума РАН 15, грантом РГНФ 06-02-91821 а/Г, грантом РФФИ 05-01-00944.

Если $\lambda_0 \rightarrow \infty$ и $\lambda_1 \rightarrow \infty$ так, что для некоторой фиксированной константы $C < 0$ выполняется равенство $\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0} C$, то $B(T) = B_0(T) + \varepsilon B_1(T) + \dots$, где малый параметр $\varepsilon = 1/\sqrt{\lambda_0}$,

$$B_0(T) = \frac{1}{\rho} \left[e^{\frac{1}{\rho T}} \left(-\operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{\rho T} \right) \right) - \left(1 - \frac{1}{\rho T} \int_0^\infty \frac{e^{-t} \log(1 + \rho T \cdot t)}{t} dt \right) \right],$$

$$B_1(T) = \frac{\beta}{\rho^2} \left[\frac{3}{\rho T} \int_0^\infty \frac{e^{-t} \log(1 + \rho T \cdot t)}{t} dt + e^{\frac{1}{\rho T}} \operatorname{Ei} \left(-\frac{1}{\rho T} \right) \cdot \left(\frac{1}{2\rho T} - 1 \right) - \frac{5}{2} \right],$$

при этом

$$B_0(T) = \begin{cases} \frac{1}{\rho} \left[\frac{\rho T}{2} + O((\rho T)^2) \right] & \text{при } T \rightarrow 0, \\ \frac{1}{\rho} \left[\log(\rho T) - 1 - \mathbb{C} + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right) \right] & \text{при } T \rightarrow \infty, \end{cases}$$

$$B_1(T) = \begin{cases} \frac{\beta}{\rho^2} \left[\frac{(\rho T)^3}{2} + O((\rho T)^4) \right] & \text{при } T \rightarrow 0, \\ \frac{\beta}{\rho^2} \left[\log(\rho T) - \frac{5}{2} - \mathbb{C} + O\left(\frac{\log^2 \rho T}{\rho T}\right) \right] & \text{при } T \rightarrow \infty. \end{cases}$$

2. Теорема доказывается следующим образом.

Прежде всего, необходимо заметить, что лемма 2.1 статьи [3] может быть доказана и в случае пуассоновского процесса. Из этой леммы следует, что $B(T) = \inf_{\tau \in \mathcal{M}_T} \frac{1}{T} \mathbb{E}_\infty \int_0^\tau \psi_u du$.

Далее, применяя метод множителей Лагранжа, описанный в [3; раздел 4], и технику из [1; раздел 24], можно доказать, что оптимальным моментом остановки будет момент $\tau_T^* = \inf\{t \geq 0 : \psi_t \geq T\}$, при этом риск $B(T) = V(0; T)/T$, где $V(x; T)$ – решение уравнения (1).

Разлагая решение уравнения (1) по малому параметру ε при $\lambda_1 \rightarrow \infty$ и $\lambda_0 \rightarrow \infty$ ($\lambda_1 = \lambda_0 + \sqrt{\lambda_0} C$ для некоторой фиксированной константы $C < 0$), получаем, что $V(x; T) = V_0(x; T) + \varepsilon V_1(x; T) + \dots$, где $V_0(x; T)$ и $V_1(x; T)$ – решения уравнений

$$V_0'(x; T) + \rho x^2 V_0''(x; T) = -x, \quad V_0(0; T) < \infty, \quad V_0(T; T) = 0$$

и

$$V_1'(x; T) + \rho x^2 V_1''(x; T) = -\beta x^3 V_0'''(x; T), \quad V_1(0; T) < \infty, \quad V_1(T; T) = 0$$

соответственно. Отсюда следует, что $B_0(T) = V_0(0; T)/T$ и $B_1(T) = V_1(0; T)/T$. Заметим, что, как и следовало ожидать, функция $B_0(T)$ совпадает с обобщенной байесовской функцией риска в задаче о разладке для броуновского движения, рассмотренной в [3].

Автор благодарен А. Н. Ширяеву, инициировавшему написание данной заметки.

Список литературы

- [1] G. Peskir, A. N. Shiryaev, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Lectures Math. ETH Zurich, Birkhäuser, Basel, 2006. [2] А. Н. Ширяев, *Статистический последовательный анализ. Оптимальные правила остановки*, Наука, М., 1976. [3] Е. А. Feinberg, A. N. Shiryaev, *Statist. Decisions*, **24** (2006), 1001–1025. [4] И. С. Градштейн, И. М. Рыжик, *Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений*, Физматгиз, М., 1963.

Е. В. Бурнаев (E. V. Burnaev)

Московский физико-технический институт
(государственный университет)

E-mail: drazil@list.ru

Представлено А. В. Булинским

Принято редколлегией

30.03.2007