Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

К. Бардос, Э. С. Тити, Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 5–46

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6811>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.237.59.107

26 апреля 2023 г., 11:52:44

УДК 517.958+531.3-322

Уравнения Эйлера идеальной несжимаемой жидкости

К. Бардос, Э. С. Тити

В данном обзоре освещается современное состояние математической теории уравнений Эйлера идеальной однородной несжимаемой жидкости. Основное внимание уделяется различным типам неустойчивости и тому, как эти явления могут быть связаны с описанием турбулентности.

Библиография: 71 название.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение.....	5
2. Классические результаты о существовании и регулярности.....	8
2.1. Введение.....	8
2.2. Общие трехмерные результаты.....	9
2.3. О двумерном случае.....	13
3. Патологическое поведение решений.....	13
4. Слабый предел решений динамики Навье–Стокса.....	17
4.1. Тензор напряжения Рейнольдса.....	17
4.2. Диссипативные решения уравнений Эйлера.....	19
5. Граничные условия прилипания Дирихле в динамике Навье–Стокса....	23
6. Детерминированный и статистический спектры турбулентности.....	26
6.1. Детерминированный спектр и преобразование Вигнера.....	26
6.2. Энергетический спектр в статистической теории турбулентности	28
6.3. Сравнение детерминированного и статистического спектров....	31
7. Задачи Прандтля и Кельвина–Гельмгольца.....	33
7.1. Пограничный слой Прандтля.....	34
7.2. Задача Кельвина–Гельмгольца.....	36
7.2.1. Локальность решения.....	39
7.2.2. Особенности.....	40
7.2.3. Аналитичность и патологическое поведение после разруше-	
ния регулярности.....	41
Список литературы.....	43

1. Введение

Эта статья посвящена временному анализу двумерных и трехмерных уравнений Эйлера

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (1)$$

© К. Бардос, Э. С. Тити, 2007

идеальной однородной несжимаемой жидкости. Мы намереемся объединить вместе несколько хорошо (а также менее) известных точек зрения на совершенно классическую проблему. Кроме того, будут исследованы условия, при которых данная задача может быть рассмотрена в виде предела уравнений Навье–Стокса несжимаемой жидкости:

$$\partial_t u_\nu + \nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu) - \nu \Delta u_\nu + \nabla p_\nu = 0, \quad \nabla \cdot u_\nu = 0, \quad (2)$$

когда вязкость $\nu \rightarrow 0$, т.е. когда число Рейнольдса стремится к бесконечности.

На макроскопическом уровне число Рейнольдса Re соответствует соотношению между *воздействием нелинейных эффектов* и *силой эффектов линейной вязкости*. Таким образом, введя характерную скорость U и характерный размер L течения, получаем безразмерный параметр:

$$Re = \frac{UL}{\nu}. \quad (3)$$

Если ввести характеристическую временную шкалу $T = L/U$, а также безразмерные переменные

$$x' = \frac{x}{L}, \quad t' = \frac{t}{T} \quad \text{и} \quad u' = \frac{u'}{U},$$

то уравнения Навье–Стокса (2) примут безразмерную форму:

$$\partial_t u' + \nabla_{x'} \cdot (u' \otimes u') - \frac{1}{Re} \Delta_{x'} u' + \nabla_{x'} p' = 0, \quad \nabla \cdot u' = 0. \quad (4)$$

В дальнейшем будут рассматриваться именно эти уравнения, причем штрих (') будет опускаться, а величина Re^{-1} , как и прежде, будет обозначаться через ν .

В присутствии физической границы задачи (1) и (2) будут рассматриваться в открытой области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, d = 3$, которая имеет кусочно гладкую границу $\partial\Omega$.

Имеется несколько причин сфокусировать внимание на “математическом анализе” именно уравнений Эйлера, а не системы Навье–Стокса.

1. Приложения, связанные с турбулентностью, основываются на уравнениях Навье–Стокса (4) при очень больших числах Рейнольдса; а теоремы, которые справедливы для конечного, но очень большого числа Рейнольдса, можно пытаться сравнивать с результатами, полученными для бесконечного числа Рейнольдса. Это и в самом деле приводит к новым результатам для случая $Re = \infty$, и несколько таких примеров будет рассмотрено.

2. Многие нетривиальные строгие результаты, полученные для несжимаемых уравнений Навье–Стокса, основаны на явлениях сглаживания лапласианом при условии, что вязкость жидкости $\nu > 0$. При этом также используется инвариантность множества решений при масштабном преобразовании вида

$$u(x, t) \mapsto \lambda u(\lambda x, \lambda^2 t). \quad (5)$$

Однако простые примеры с тем же преобразованием масштаба в основных уравнениях, но без условия сохранения энергии показывают иную картину регулярности и устойчивости решений.

1. Пусть ϕ обозначает скалярную функцию в уравнении типа Гамильтона–Якоби или в уравнении Бюргерса с членом вязкости,

$$\begin{aligned} \partial_t \phi - \nu \Delta \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 &= 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_t^+, \\ \phi(x, t) &= 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{и} \quad \phi(\cdot, 0) = \phi_0(\cdot) \in L^\infty(\Omega), \end{aligned} \quad (6)$$

которое имеет (благодаря принципу максимума) глобальное гладкое решение при любом $\nu > 0$. Однако хорошо известно, что при $\nu = 0$ некоторые решения получающегося невязкого уравнения Бюргерса (6) становятся сингулярными за конечное время (т.е. в них возникают разрывы).

2. Обозначим через $|\nabla|$ квадратный корень из оператора $-\Delta$ в Ω с однородными условиями Дирихле на границе области. Рассмотрим решение $u(x, t)$ задачи

$$\partial_t u - \nu \Delta u + \frac{1}{2} |\nabla|(u^2) = 0 \quad \text{в} \quad \Omega \times \mathbb{R}_t^+, \quad (7)$$

$$u(x, t) = 0 \quad \text{при} \quad x \in \partial\Omega \quad \text{и} \quad u(\cdot, 0) = u_0(\cdot) \in L^\infty(\Omega). \quad (8)$$

Тогда справедливо следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1.1. Пусть начальное условие u_0 удовлетворяет соотношению

$$\int_{\Omega} u_0(x) \phi_1(x) dx = -M < 0, \quad (9)$$

где $\phi_1(x) \geq 0$ обозначает первую собственную функцию оператора $-\Delta$ (с граничными условиями Дирихле): $-\Delta \phi_1 = \lambda_1 \phi_1$. Тогда если число M достаточно велико, то соответствующее решение $u(x, t)$ задачи (7), (8) взрывается за конечное время.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Умножаем уравнение (7) скалярно в L^2 на функцию $\phi_1(x)$ и получаем

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} u(x, t) \phi_1(x) dx + \nu \lambda_1 \int_{\Omega} u(x, t) \phi_1(x) dx = -\frac{\sqrt{\lambda_1}}{2} \int_{\Omega} u(x, t)^2 \phi_1(x) dx.$$

Поскольку $\phi_1(x) \geq 0$, то, применяя неравенство Коши–Шварца, имеем

$$\left(\int_{\Omega} u(x, t) \phi_1(x) dx \right)^2 \leq \left(\int_{\Omega} u(x, t)^2 \phi_1(x) dx \right) \left(\int_{\Omega} \phi_1(x) dx \right).$$

Тем самым, величина $m(t) = - \int_{\Omega} u(x, t) \phi_1(x) dx$ удовлетворяет неравенству

$$\frac{dm}{dt} + \lambda_1 m \geq \frac{\sqrt{\lambda_1} \int_{\Omega} \phi_1(x) dx}{2} m^2 \quad \text{при} \quad m(0) = M,$$

откуда следует результат утверждения.

ЗАМЕЧАНИЕ 1.1. Приведенный пример был предложен для случая $\Omega = \mathbb{R}^3$ С. Монтгомери–Смитом в работе [1] (где он был назван “дешевыми уравнениями Навье–Стокса”) с целью выявления роли сохранения энергии (что отсутствует в рассмотренных выше примерах) в динамике Навье–Стокса. Его доказательство показывает, что аналогичное взрывное свойство может присутствовать в пространстве любой размерности для решений “дешевых уравнений с гипервязкостью” вида

$$\partial_t u + \nu(-\Delta)^m u + \frac{1}{2} |\nabla|(u^2) = 0.$$

Но с другой стороны, отметим, что приведенные аргументы неприменимы к уравнениям типа Курамото–Сивашинского

$$\partial_t \phi + \nu(-\Delta)^m \phi + \alpha \Delta \phi + \frac{1}{2} |\nabla \phi|^2 = 0 \quad (10)$$

при $m \geq 2$. Без принципа максимума или без возможности определенного контроля энергии вопрос о глобальном существовании гладкого решения или о взрыве некоторых решений за конечное время для приведенного выше уравнения является открытой проблемой для области $\Omega = \mathbb{R}^n$ при $n \geq 2$ и при $m \geq 2$. Однако если в (10) член $|\nabla \phi|^2$ заменить на $|\nabla \phi|^{2+\gamma}$, $\gamma > 0$, то можно обнаружить взрыв некоторых решений (ср. [2] и имеющиеся там ссылки).

Таким образом, приведенные примеры указывают на то, что сохранение некоторого вида энергии, которое гарантируется структурой уравнений, является существенным фактором при анализе изучаемой задачи. В частности, этот фундаментальный закон играет существенную роль в динамике уравнений Эйлера.

С учетом рассмотренных простых примеров, статья организована следующим образом. В разделе 2 представлены классические результаты о существовании и регулярности нестационарных уравнений Эйлера. В разделе 3 приводятся новые примеры, связанные с патологическим поведением решений этих уравнений. Факт состоит в том, что наблюдаемое у решений уравнений Эйлера осциллирующее поведение может повлечь аналогичное поведение у решений системы Навье–Стокса, когда вязкость стремится к нулю. Существование (или отсутствие) строгой сходимости анализируется в разделе 4, где вводится также тензор напряжения Рейнольдса и понятие *диссипативного решения*. Стандартная и весьма важная как с теоретической, так и с прикладной точки зрения задача состоит в изучении предела нулевой вязкости решений уравнений Навье–Стокса с граничными условиями прилипания Дирихле в областях с физическими границами. Имеется очень мало математических результатов для этой весьма неустойчивой ситуации. Одним из самых поразительных результатов является теорема Като [3], которая представлена в разделе 5. Раздел 6 снова посвящен тензору напряжения Рейнольдса. Здесь показано, что с введением меры Вигнера понятие тензора напряжения Рейнольдса, которое определяется из дефекта сильной сходимости при исчезающей вязкости, играет ту же роль, что и аналогичное понятие, изначально возникшее в статистической теории турбулентности. Когда предел при нулевой вязкости решений уравнений Навье–Стокса сопоставляется с решениями Эйлера, основное различие обнаруживается в пограничном слое, который описывается уравнениями Прандтля. Эти уравнения кратко изучаются в разделе 7. В нем также освещается вопрос, как математические результаты согласуются с явлениями неустойчивости в физических задачах. Задача Кельвина–Гельмгольца также обнаруживает аналогичные базовые явления неустойчивости, но ее проще изучать математически. Это объясняется в конце раздела 7, в котором также показывается, что некоторые недавние результаты из работ [4], [5] и [6] о регулярности вихревой пелены вносят существенный вклад в понимание явлений неустойчивости для исходной проблемы.

2. Классические результаты о существовании и регулярности

2.1. Введение. С формальной точки зрения уравнения Эйлера соответствуют предельному случаю нулевой вязкости, т.е. когда число Рейнольдса

равно бесконечности:

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad \text{в } \Omega. \quad (11)$$

В присутствии физических границ выписанная система дополняется стандартными граничными условиями отсутствия нормальной компоненты течения:

$$u \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (12)$$

где $\vec{n}$ обозначает вектор внешней нормали к границе $\partial\Omega$. Как известно, вихрь $\omega = \nabla \wedge u$ является “фундаментальной характеристикой” течения и с физической, и с математической точек зрения. Поэтому уравнения (11) и (12) можно записать в эквивалентной форме, используя вихрь:

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = \omega \cdot \nabla u \quad \text{в } \Omega, \quad (13)$$

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \nabla \wedge u = \omega \quad \text{в } \Omega \quad \text{и} \quad u \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega. \quad (14)$$

Таким образом, уравнения (14) полностью определяют u через ω , что делает всю систему “замкнутой”. Говоря более точно, оператор $K: \omega \mapsto u$, заданный соотношением (14), является линейным непрерывным отображением из пространства $C^\alpha(\Omega)$ в пространство $C^{\alpha+1}(\Omega)$ (при $\alpha > 0$), а также из $H^s(\Omega)$ в $H^{s+1}(\Omega)$.

Кроме того, для двумерных течений вектор вихря перпендикулярен плоскости движения, и поэтому уравнение (13) сводится в этом случае (что можно проверить непосредственно) к уравнению адвекции

$$\partial_t \omega + u \cdot \nabla \omega = 0. \quad (15)$$

Структура квадратичной нелинейности в (13) имеет ряд следствий, которые будут описаны в дальнейшем изложении. Мы будем приводить лишь основные аргументы, опуская полные доказательства (см. детальное обоснование, например, в [7] или [8]).

2.2. Общие трехмерные результаты. Существование гладкого решения на коротком интервале времени для трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера было давно доказано при условии, что начальные данные являются достаточно гладкими. Насколько известно авторам, первоначальное доказательство этого факта восходит к работе Л. Лихтенштейна [9]. Это доказательство базируется на нелинейной оценке Гронуолла следующего вида:

$$y' \leq C y^{\frac{3}{2}} \quad \Rightarrow \quad y(t) \leq \frac{y(0)}{(1 - 2tC y^{\frac{1}{2}}(0))^2}. \quad (16)$$

Поэтому величина $y(t)$, которая представляет собой адекватную норму решения, остается конечной на некотором интервале времени, причем длина этого интервала зависит от начальной величины $y(0)$, т.е. от начальных данных системы Эйлера. Эти начальные данные следует выбирать в пространстве достаточно регулярных функций. В частности, если рассматривать решения в соболевском пространстве H^s при $s > \frac{5}{2}$, то, взяв скалярное произведение в пространстве Соболева H^s уравнений Эйлера и решения u и воспользовавшись подходящими неравенствами Соболева, получаем соотношения

$$\frac{1}{2} \frac{d\|u\|_{H^s}^2}{dt} = -(\nabla \cdot (u \otimes u), u)_{H^s} \leq C_s \|u\|_{H^s}^2 \|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C \|u\|_{H^s}^3. \quad (17)$$

Из (16) и (17) следует локальное по времени существование гладкого решения.

Как и во многих стандартных нелинейных задачах, зависящих от времени, локальная регулярность гладких (сильных) решений влечет локальную единственность и устойчивость (т.е. непрерывную зависимость от начальных данных). Кроме того, можно установить порог для этого существования, единственности и распространения регулярности по начальным данным (включая аналитичность, см. [10]). Более строго, можно сформулировать следующую теорему.

ТЕОРЕМА 2.1 (теорема Била–Като–Майды [11]). *Пусть функция $u(t)$ является решением трехмерных несжимаемых уравнений Эйлера, которое является гладким при $0 \leq t < T$, т.е.*

$$\text{при всех } t \in [0, T], \quad u(t) \in H^s(\Omega) \quad \text{для некоторого } s > \frac{5}{3}.$$

Предположим, что

$$\int_0^T \|\nabla \wedge u(\cdot, t)\|_{L^\infty} dt < \infty, \quad (18)$$

тогда $u(t)$ можно единственным образом продолжить до времени $T + \delta$ ($\delta > 0$), как гладкое решение уравнений Эйлера.

Основное значение этой теоремы состоит в том, что если исходить из гладких начальных данных, то неустойчивость может развиваться, только если размер вихря становится сколь угодно большим.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.1. Теорема Била–Като–Майды была впервые доказана для всего пространства в работе [11]. Ее распространение на случай периодического “куба” делается достаточно просто. Для ограниченных областей с граничным условием $u \cdot \vec{n} = 0$ она была доказана Э. Феррари в [12]. Объединяя аргументы из [10] и [12], можно легко показать, что, как и в теореме Била–Като–Майды, решение трехмерной системы Эйлера с вещественно аналитическими начальными данными остается вещественно аналитической функцией до тех пор, пока выполнено условие (18).

Результат Била–Като–Майды был слегка улучшен Х. Козоно (см. [13]), который доказал, что норму $\|\cdot\|_{L^\infty}$ в левой части (18) можно заменить на норму пространства ВМО. Это обобщение является интересным, поскольку оно использует технику гармонического анализа (или разложения мод Фурье), которая является важным инструментом при изучении “турбулентных” решений; действительно, пространство ВМО, являясь двойственным к пространству Харди $\mathcal{H}^1$, хорошо определено в частотном (Фурье) пространстве. На самом деле (см. [14]), ВМО является наименьшим пространством, содержащим L^∞ , которое также инвариантно под действием псевдодифференциальных операторов нулевого порядка. Идея, лежащая в основе теоремы Била–Като–Майды и всех ее обобщений, заключается в том, что решение u эллиптических уравнений (14) удовлетворяет следующей оценке при $1 < p < \infty$:

$$\|\nabla u\|_{W^{s,p}} \leq C_{s,p} (\|u\|_{W^{s,p}} + \|\omega\|_{W^{s,p}}). \quad (19)$$

Это соотношение можно также переформулировать для пространств Гёльдера $C^{k,\alpha}$, $\alpha > 0$. Подчеркнем, однако, что оценка (19) перестает быть верной при $p = \infty$ (и при $\alpha = 0$). Это происходит в силу природы сингулярности ядра оператора K , которая имеет порядок $|x - y|^{2-d}$, что приводит (при $s > d/2 + 1$)

к оценке

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C(\|\omega\|_{L^\infty} \log(1 + \|u\|_{H^s}^2)), \quad \text{или, более точно,} \quad (20)$$

$$\|\nabla u\|_{L^\infty} \leq C(\|\omega\|_{\text{ВМО}} \log(1 + \|u\|_{H^s}^2)). \quad (21)$$

Если теперь обозначить $z = 1 + \|u\|_{H^s}^2$, то в силу (21) неравенство (17) примет вид

$$\frac{d}{dt} z \leq C\|\omega\|_{\text{ВМО}} z \log z.$$

Откуда следует

$$(1 + \|u(t)\|_{H^s}^2) \leq (1 + \|u(0)\|_{H^s}^2) e^{C \int_0^t \|\omega(s)\|_{\text{ВМО}} ds},$$

что завершает доказательство утверждения. Единственность решений также можно доказать при условии, что интеграл

$$\int_0^t \|\omega(s)\|_{\text{ВМО}} ds$$

остается конечным.

ЗАМЕЧАНИЕ 2.2. Вихрь ω можно представить с помощью антисимметрической части тензора деформации ∇u . Однако в оценках (20) или (21) эту антисимметрическую часть, т.е. ω , можно заменить симметрической частью тензора деформации

$$S(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t). \quad (22)$$

Таким образом, теоремы Била–Като–Майды и Козоно можно переформулировать в терминах этого симметрического тензора (это было установлено в [15] и [13] соответственно).

На самом деле, выписанный выше тензор деформации $S(u)$ (или $\tilde{S}(\omega)$, если использовать вихрь) играет важную роль в комплиментарных результатах из работы П. Константина, Ч. Феффермана и Э. Майды [16], которые показывают, что сингулярность в основном вносится из-за вариаций направленности вихря.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2.1 [16]. Пусть функция u , заданная на $Q = \Omega \times (0, T)$, является гладким решением уравнений Эйлера. Рассмотрим следующие величины $k_1(t)$ и $k_2(t)$ (они корректно заданы при $t < T$):

$$k_1(t) = \sup_{x \in \Omega} |u(x, t)|,$$

что дает размер вихря, и

$$k_2(t) = 4\pi \sup_{x, y \in \Omega, x \neq y} \frac{|\xi(x, t) - \xi(y, t)|}{|x - y|},$$

что дает степень липшицевой регулярности направления вихря

$$\xi(x, t) = \frac{\omega(x, t)}{|\omega(x, t)|}.$$

Тогда при выполнении условий

$$\int_0^T (k_1(t) + k_2(t)) dt < \infty \quad \text{и} \quad \int_0^T k_1(t) k_2(t) dt < \infty \quad (23)$$

решение $u(x, t)$ существует и имеет ту же гладкость, что и начальные данные, вплоть до времени $T + \delta$ при некотором $\delta > 0$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и раньше, мы здесь приводим лишь основные идеи, и для простоты мы ограничимся случаем $\Omega = \mathbb{R}^3$. Прежде всего, поскольку

$$S(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^t)(x, t) = \tilde{S}(\omega)(x, t), \quad (24)$$

имеем

$$\frac{1}{2}(\partial_t |\omega|^2 + u \cdot \nabla |\omega|^2) = (\omega \cdot \nabla u, \omega) = (\tilde{S}(\omega)\omega, \omega), \quad (25)$$

откуда получаем, что

$$\frac{d\|\omega\|_\infty}{dt} \leq \sup_x (|\tilde{S}(\omega)|) \|\omega\|_\infty. \quad (26)$$

Далее, рассмотрим лишь сингулярную часть оператора $\omega \mapsto \tilde{S}(\omega)$. Закон Био-Савара восстанавливает поле скорости из вихря по формуле

$$u(x, t) = \frac{1}{4\pi} \int \frac{(x - y) \wedge \omega(y)}{|x - y|^3} dy. \quad (27)$$

Для существенной части этого ядра введем две гладкие неотрицательные радиальные функции β_δ^1 и β_δ^2 , где

$$\beta_\delta^1 + \beta_\delta^2 = 1, \quad \beta_\delta^1 = 0 \quad \text{при} \quad |x| > 2\delta \quad \text{и} \quad \beta_\delta^2 = 0 \quad \text{при} \quad |x| < \delta. \quad (28)$$

Тогда имеем

$$\begin{aligned} |\tilde{S}(\omega)| &\leq \left| \int \left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \beta_\delta^1(|y|) \right) |\omega(x+y)| \frac{dy}{|y|^3} \right| \\ &\quad + \left| \int \left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \beta_\delta^2(|y|) \right) |\omega(x+y)| \frac{dy}{|y|^3} \right|. \end{aligned} \quad (29)$$

Для первого слагаемого используем оценку

$$\left| \text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \beta_\delta^1(|y|) \right| \leq \frac{k_2(t)}{4\pi} |y| \quad (30)$$

и находим, что

$$\left| \int \left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \beta_\delta^1(|y|) \right) |\omega(x+y)| \frac{dy}{|y|^3} \right| \leq k_2(t) \delta \|\omega\|_\infty. \quad (31)$$

Второе слагаемое записываем в виде

$$\int \left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \beta_\delta^2(|y|) \right) (\xi(x+y) \cdot (\nabla_y \wedge u(x+y))) \frac{dy}{|y|^3}$$

и интегрируем по частям относительно y . Используя липшицеву регулярность функции ξ , имеем

$$\left| \nabla_y \left(\left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \right) \right) \right| \leq C k_2(t).$$

В итоге получаем (заметим, что члены, пришедшие от больших значений $|y|$, а также от производных $\beta_\delta^2(|y|)$, вносят бóльшую регулярность):

$$\begin{aligned} &\left| \int \left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \beta_\delta^2(|y|) \right) |\omega(x+y)| \frac{dy}{|y|^3} \right| \\ &\leq \int \left| \nabla_y \left(\frac{y}{|y|} \cdot \xi(x) \right) \left(\text{Det} \left(\frac{y}{|y|}, \xi(x+y), \xi(x) \right) \right) \right| \beta_\delta^2(|y|) \frac{dy}{|y|^3} \|\omega\|_\infty \\ &\leq C k_2(t) |\log \delta| \|\omega\|_\infty \leq C k_1(t) k_2(t) |\log \delta|. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя полученные оценки в (26), находим, что при $\|\omega\|_\infty > 1$ и $\delta = \|\omega\|_\infty^{-1}$

$$\frac{d\|\omega\|_\infty}{dt} \leq Ck_2(t)(1 + k_1(t))\|\omega\|_\infty \log \|\omega\|_\infty,$$

и требуемый результат получается, как при доказательстве теоремы Била–Като–Майды.

Дополнительную подробную информацию по данной теме читатель может найти, например, в книге Э. Майды и А. Бертоцци [7], а также в недавнем обзоре П. Константина [14].

2.3. О двумерном случае. В двумерном случае вихрь $\omega = \nabla \wedge u$ удовлетворяет уравнению

$$\partial_t(\nabla \wedge u) + (u \cdot \nabla)(\nabla \wedge u) = 0. \quad (32)$$

Это эволюционное уравнение сохраняет любую L^p -норму ($1 \leq p \leq \infty$) вихря решения. Используя это наблюдение, В. И. Юдович в замечательной работе [18] доказал существование, единственность и глобальную регулярность любых решений с начальным вихрем из L^∞ . Если вихрь принадлежит лишь L^p при $1 < p \leq \infty$, то можно доказать существование слабых решений. Те же результаты справедливы при $p = 1$ и для вихря, который является конечной мерой с “простыми” сменами знака. Доказательство в предельном случае является более тонким (см. [19], а также п. 7.2 данной статьи).

3. Патологическое поведение решений

Продолжая комментировать результаты, изложенные в предыдущем разделе, необходимо отметить следующие факты.

I. Во-первых, для трехмерного случая:

i) нет результатов относительно глобального по времени существования гладкого решения; точнее, не известно, можно ли решение системы Эйлера, построенное на некотором конечном интервале времени по начальной скорости, принадлежащей, скажем, пространству H^s при $s > \frac{3}{2} + 1$, продолжить как регулярное или хотя как слабое решение на всю положительную полуось времени;

ii) нет результатов о существовании, даже для малого интервала времени, слабого решения для начальных данных, которые являются менее регулярными, чем в предыдущем случае;

iii) в силу свойства масштабирования уравнений Эйлера в $\mathbb{R}^3$, задача глобального существования по времени для малых начальных данных эквивалентна глобальному существованию для любых начальных данных и при всех $t \in \mathbb{R}$.

II. Во-вторых, в двумерном ($d = 2$) и трехмерном ($d = 3$) случае, если известно, что функция $u \in L^2([0, T]; L^2(\mathbb{R}^d))$ является слабым решением, т.е. она удовлетворяет следующим соотношениям в смысле обобщенных функций:

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0, \quad u(x, 0) = u_0(x), \quad (33)$$

то этого не достаточно для того, чтобы данное решение однозначно определялось по начальной функции u_0 (за исключением двумерного случая при дополнительном условии регулярности вида $\nabla \wedge u_0 \in L^\infty$); говоря более точно, можно построить, следуя работам В. Шеффера [20] и А. Шнирельмана [21], и для двумерного, и для трехмерного случая нетривиальные решения $u \in L^2(\mathbb{R}_t; L^2(\mathbb{R}^d))$ для системы (33), которые имеют компактный носитель и в пространстве, и во времени.

Следующие примеры проливают некоторый свет на возникающие здесь трудности. Прежде всего, можно обнаружить (ср. [17], [23] и имеющиеся там ссылки) взрыв гладких решений с бесконечной энергией для трехмерных уравнений Эйлера. Такие решения можно построить следующим образом. Решение u является периодическим по (x_1, x_2) на решетке $(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^2$, и оно задано для всех $x_3 \in \mathbb{R}$ по формуле

$$u = (u_1(x_1, x_2, t), u_2(x_1, x_2, t), x_3 \gamma(x_1, x_2, t)) = (\tilde{u}, x_3 \gamma),$$

где функции $\tilde{u}$ и γ определены из следующих уравнений.

Чтобы удовлетворить условию нулевой дивергенции, требуется

$$\nabla \cdot \tilde{u} + \gamma = 0,$$

а чтобы добиться динамики Эйлера, требуется

$$\partial_t(\nabla \wedge \tilde{u}) + (\tilde{u} \cdot \nabla)(\nabla \wedge \tilde{u}) = \gamma \tilde{u},$$

$$\partial_t \gamma + (\tilde{u} \cdot \nabla) \gamma = -\gamma^2 + I(t),$$

и наконец, чтобы иметь периодичность по (x_1, x_2) , необходимо равенство

$$I(t) = -\frac{2}{L^2} \int_{[0,L]^2} (\gamma(x_1, x_2, t))^2 dx_1 dx_2.$$

Следовательно, скалярная функция γ удовлетворяет интегро-дифференциальному уравнению Риккати следующего вида:

$$\partial_t \gamma + \tilde{u} \nabla \gamma = -\gamma^2 - \frac{2}{L^2} \int_{[0,L]^2} (\gamma(x_1, x_2, t))^2 dx_1 dx_2,$$

которое позволяет доказать взрыв решения, а также описать явно природу этого взрыва.

Приведенный пример может показаться нефизическим, поскольку начальная энергия

$$\int_{(\mathbb{R}^2/L)^2 \times \mathbb{R}} |u(x_1, x_2, x_3, 0)|^2 dx_1 dx_2 dx_3$$

является бесконечной. Но с другой стороны, он весьма поучителен, так как показывает, что сохранение энергии в уравнениях Эйлера может играть решающую роль для отсутствия особенностей. Кроме того, приближение построенного решения семейством решений с конечной энергией, по-видимому, возможно, но, насколько известно авторам, до сих пор не сделано. Такая приближенная процедура могла бы привести к мысли, что нельзя получить равномерную оценку для устойчивости или регулярности трехмерных уравнений Эйлера. В духе этого замечания имеется следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.1. *Ни при каком $1 < p < \infty$ не существует непрерывной функции $\tau \mapsto \phi(\tau)$ такой, что любое гладкое решение уравнений Эйлера удовлетворяет оценке*

$$\|u(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)} \leq \phi(\|u(\cdot, 0)\|_{W^{1,p}(\Omega)}).$$

Отметим, что приведенное утверждение не противоречит локальным результатам об устойчивости, которые обеспечивают контроль более высоких норм в момент времени t в терминах этих норм в момент времени 0 в виде неравенства

$$\text{при } s > \frac{5}{2} \quad \|u(t)\|_{H^s(\Omega)} \leq \frac{\|u(0)\|_{H^s(\Omega)}}{1 - Ct\|u(0)\|_{H^s(\Omega)}},$$

что следует из (17).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на изучении решения с нулевым давлением, которое задано в кубе периодов $(\mathbb{R}/\mathbb{Z})^3$ по формуле

$$u(x, t) = (u_1(x_2), 0, u_3(x_1 - tu_1(x_2), x_2))$$

и которое удовлетворяет уравнениям

$$\nabla \cdot u = 0, \quad \partial_t u + u \cdot \nabla u = 0.$$

Тогда начальные условия удовлетворяют соотношению

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, 0)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &\simeq \int_0^1 |\partial_{x_2} u_1(x_2)|^p dx_1 \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 (|\partial_{x_1} u_3(x_1, x_2)|^p + |\partial_{x_2} u_3(x_1, x_2)|^p) dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (34)$$

И при $t > 0$ справедливо

$$\begin{aligned} \|u(\cdot, t)\|_{W^{1,p}(\Omega)}^p &\simeq \int |\partial_{x_2} u_1(x_2)|^p dx_1 dx_2 dx_3 \\ &+ \int_0^1 \int_0^1 (|\partial_{x_1} u_3(x_1, x_2)|^p + |\partial_{x_2} u_3(x_1, x_2)|^p) dx_1 dx_2 \\ &+ t^p \int_0^1 \int_0^1 |\partial_{x_2} u_1(x_2)|^p |\partial_{x_1} u_3(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2. \end{aligned} \quad (35)$$

Тогда с помощью подходящего выбора u_1 и u_3 можно добиться, чтобы левая часть (34) была ограничена, а член

$$t^p \int_0^1 \int_0^1 |\partial_{x_2} u_1(x_2)|^p |\partial_{x_1} u_3(x_1, x_2)|^p dx_1 dx_2$$

в правой части (35) стремился к бесконечности при $t \rightarrow \infty$. Доказательство завершается стандартными соображениями регуляризации.

ЗАМЕЧАНИЕ 3.1. Для гладких начальных данных приведенная выше конструкция обнаруживает существование глобальных по времени гладких решений, у которых вихрь растёт (в данном случае линейно) при $t \rightarrow \infty$.

Как и в случае дифференциального неравенства Риккати вида $y' \leq Cy^2$, можно получить достаточные условия для существования гладких решений на конечном интервале времени (скажем, при $0 \leq t < T$). С другой стороны, это не указывает на возможность взрыва решения по истечении этого времени. Сложные явления, которые происходят в жидкости из-за сильной нелинейности задачи, могут позже так воздействовать на ее течение, что они сбалансируют друг друга, и это вернет жидкость в гладкий режим. Такие явления принято называть *истощением особенностей*.

Пример, который в некоторой степени иллюстрирует такое поведение, был построен Т. Ху и К. Ли [24]. Он имеет дело с осесимметричными решениями трехмерных уравнений Эйлера вида $rf(z)$, которые, очевидно, несут бесконечную энергию.

Конкретизируя, начнем с рассмотрения следующей системы интегро-дифференциальных уравнений, решения которой определены при $(z, t) \in (\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}^+$:

$$u_t + 2\psi u_z = -2vu, \quad v_t + 2\psi v_z = u^2 - v^2 + c(t), \quad (36)$$

$$\psi_z = v, \quad \int_0^1 v(z, t) dz = 0. \quad (37)$$

В уравнениях (36) не зависящая от z функция $c(t)$ выбрана так, чтобы выполнялось соотношение (37), которое в свою очередь означает, что функция $\psi(z, t)$ является 1-периодической по направлению z . В итоге получаем следующий результат.

ЛЕММА 3.1. *Для любых начальных данных $(u(z, 0), v(z, 0)) \in C^m(\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ при $m \geq 1$ система (36) и (37) имеет единственное глобальное по времени гладкое решение.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО основано на глобальной *априорной* оценке. Взяв производную по переменной z , находим (здесь обозначено $(u_z, v_z) = (u', v')$):

$$\begin{aligned} u'_t + 2\psi u'_z - 2\psi_z u' &= -2v' u - 2v u', \\ v'_t + 2\psi v'_z - 2\psi_z v' &= 2u u' - 2v v'. \end{aligned}$$

Воспользовавшись соотношением $\psi_z = -v$, умножаем первое уравнение на u , а второе уравнение – на v , складываем результат и получаем

$$\frac{1}{2}(u_z^2 + v_z^2)_t + \psi(u_z^2 + v_z^2)_z = 0. \quad (38)$$

Соотношение (38) дает равномерную оценку в L^∞ производных по z функций u и v . Равномерная L^∞ -оценка для v следует из неравенства Пуанкаре, а для u применяется следующее неравенство Гроуолла:

$$\|u(z, t)\|_{L^\infty} \leq \|u(z, 0)\|_{L^\infty} e^{t\|(u(z, 0))^2 + (v(z, 0))^2\|_{L^\infty}}. \quad (39)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 3.2. Глобальное существование решений системы (36) и (37) без ограничений на амплитуду начальных данных получается как результат тонкого баланса/сокращения, который зависит от коэффициентов системы. Любая модификация этих коэффициентов может привести к взрыву решений модифицированной системы за конечное время. А с другой стороны, решения системы (36), (37) могут расти экспоненциально по времени. Численное моделирование, выполненное в [24], указывает, что скорость экспоненциального роста в (39) можно подавить.

Особый вид системы (36), (37) связан с *трехмерными осесимметричными уравнениями Эйлера с водоворотом*. Рассмотрим ортогональный базис

$$e_r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, 0\right), \quad e_\theta = \left(-\frac{y}{r}, \frac{x}{r}, 0\right), \quad e_z = (0, 0, 1).$$

Имея решение системы (36) и (37), построим решения трехмерного $(2 + 1/2)$ -уравнения Эйлера с помощью следующего утверждения.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.2. *Пусть $u(z, t)$ и $\psi(z, t)$ являются решениями системы (36) и (37), тогда функция*

$$U(z, t) = -r \frac{\partial \psi(z, t)}{\partial z} e_r + ru(z, t) e_\theta + 2r\psi(z, t) e_z$$

является гладким решением трехмерной системы Эйлера с бесконечной энергией. Кроме того, это решение определено для любого времени без каких-либо условий малости начальных данных.

4. Слабый предел решений динамики Навье–Стокса

Как уже отмечалось во введении, и для практических целей, и для математического анализа можно рассматривать динамику Эйлера как предел динамики Навье–Стокса, когда вязкость стремится к нулю. По этой причине настоящий раздел целиком посвящен изучению *слабого предела* при $\nu \rightarrow 0$ решений типа Лерэ–Хопфа уравнений Навье–Стокса в двумерном и трехмерном пространствах. Будет рассматриваться сходимость только на конечных интервалах времени $0 < t < T < \infty$. Еще раз напомним, что ν обозначает безразмерную вязкость, т.е. величину, обратную числу Рейнольдса.

4.1. Тензор напряжения Рейнольдса. Как и прежде, через Ω обозначается открытое множество в $\mathbb{R}^d$. Для любых начальных данных $u_\nu(x, 0) = u_0(x) \in L^2(\Omega)$ и для любой заданной вязкости $\nu > 0$ в пионерских работах Ж. Лерэ [25]–[27] и Э. Хопфа [28]–[30] (см. также детальный обзор О.А. Ладженской [31] и обобщения В. Шеффера [20] и Л. Каффарелли, Р. Кона и Л. Ниренберга [32]) было доказано существование функций u_ν и p_ν со следующими свойствами:

$$u_\nu \in L^\infty((0, T); L^2(\Omega)) \cap L^2((0, T); H_0^1(\Omega)) \quad \text{для каждого } T \in (0, \infty), \quad (40)$$

причем они удовлетворяют уравнениям Навье–Стокса

$$\partial_t u_\nu + \nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu) - \nu \Delta u_\nu + \nabla p_\nu = 0, \quad (41)$$

$$\nabla \cdot u_\nu = 0, \quad u_\nu = 0 \quad \text{на } \partial\Omega \quad (42)$$

в смысле обобщенных функций. Кроме того, эти решения удовлетворяют “точечно” энергетическому неравенству

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \partial_t |u_\nu(x, t)|^2 + \nu |\nabla u_\nu(x, t)|^2 \\ & + \nabla \cdot \left((u_\nu \otimes u_\nu)(x, t) - \nu \nabla \frac{|u_\nu(x, t)|^2}{2} \right) + \nabla \cdot (p_\nu(x, t) u_\nu(x, t)) \leq 0 \end{aligned} \quad (43)$$

или, в интегральной форме,

$$\frac{1}{2} \partial_t \int_\Omega |u_\nu(x, t)|^2 dx + \nu \int_\Omega |\nabla u_\nu(x, t)|^2 dx \leq 0. \quad (44)$$

Пара $\{u_\nu, p_\nu\}$, которая удовлетворяет (40), (42) и (43), называется слабым решением уравнений Навье–Стокса в смысле Каффарелли–Кона–Ниренберга. Если оно удовлетворяет интегральной версии энергетического неравенства (43), то оно называется слабым решением Лерэ–Хопфа уравнений Навье–Стокса.

В двумерном случае (а также в случае любой размерности, но с более сильными условиями малости начальной скорости) показано, что эти решения являются гладкими, единственными и непрерывно зависят от начальных данных. Кроме того, в этом случае в соотношениях (43) и (44) выполняется точное равенство.

Таким образом, имея эти результаты и особенно энергетическое неравенство (44), можно заключить, что, с точностью до перехода к подпоследовательности, $\{u_\nu\}$ сходится *-слабо в топологии $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\Omega))$ к некоторому

пределу $\bar{u}$, а последовательность $\{\nabla p_\nu\}$ сходится к обобщенной функции $\nabla \bar{p}$ при $\nu \rightarrow 0$ и выполнены следующие соотношения:

$$\begin{aligned} \bar{u} &\in L^\infty(\mathbb{R}_t^+, L^2(\Omega)), \quad \nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \bar{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \\ \int_\Omega |\bar{u}(x, t)|^2 dx + 2\nu \int_0^t \int_\Omega |\nabla u|^2 dx dt &\leq \int_\Omega |\bar{u}_0(x)|^2 dx, \\ \lim_{\nu \rightarrow 0} (u_\nu \otimes u_\nu) &= \bar{u} \otimes \bar{u} + \lim_{\nu \rightarrow 0} ((u_\nu - \bar{u}) \otimes (u_\nu - \bar{u})), \end{aligned} \quad (45)$$

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \lim_{\nu \rightarrow 0} \nabla \cdot ((u_\nu - \bar{u}) \otimes (u_\nu - \bar{u})) + \nabla \bar{p} = 0. \quad (46)$$

Заметим, что слагаемое

$$\text{RT}(x, t) = \lim_{\nu \rightarrow 0} (u_\nu(x, t) - \bar{u}(x, t)) \otimes (u_\nu(x, t) - \bar{u}(x, t)) \quad (47)$$

является положительным, симметричным и мерозначным тензором. По аналогии со статистической теорией турбулентности (см. далее) этот тензор можно называть тензором напряжения Рейнольдса или тензором турбулентности. В частности, определенные области турбулентности будут соответствовать носителю этого тензора.

Это подход приводит к следующим вопросам.

1. Каковы основные свойства (если они имеются) тензора $\text{RT}(x, t)$?
2. Когда тензор $\text{RT}(x, t)$ тождественно равен нулю? Или, что эквивалентно, когда предельная пара функций $\{\bar{u}, \bar{p}\}$ удовлетворяет уравнениям Эйлера?
3. Когда диссипация энергии

$$\nu \int_0^T \int_\Omega |\nabla u_\nu(x, t)|^2 dx dt$$

стремится к нулю при $\nu \rightarrow 0$?

4. В предположении, что пара $\{\bar{u}, \bar{p}\}$ является решением уравнений Эйлера, будет ли такое решение достаточно гладким, чтобы для него выполнялся закон сохранения энергии?

Мы будем использовать следующее обозначение для L^2 -нормы:

$$|\Phi| = \left(\int_\Omega |\Phi(x)|^2 dx \right)^{1/2}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 4.1. Тензор $\text{RT}(x, t)$ порождается высокочастотными пространственными осцилляциями слабого решения. Этот момент будет рассматриваться подробно в п. 6.1. Вообще говоря, такое поведение должно быть внутренне обоснованным и, в частности, оно не должно зависеть от ортогональных преобразований координат (вращений). Например, в двумерном случае, если предположить, что функция $\bar{u}$ является регулярной, то из инвариантности относительно вращений вытекает соотношение

$$\text{RT}(x, t) = \alpha(x, t) \text{Id} + \frac{1}{2} \beta(x, t) (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T),$$

где $\alpha(x, t)$ и $\beta(x, t)$ – некоторые (неизвестные) скалярные функции. Тогда уравнение (46) примет вид

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \cdot \left(\beta(x, t) \frac{1}{2} (\nabla \bar{u} + (\nabla \bar{u})^T) \right) + \nabla (\bar{p} + \alpha(x, t)) = 0. \quad (48)$$

Конечно, эта “размягченная информация” не дает указаний о том, равна функция $\beta(x, t)$ нулю или нет. Также не ясно, будет ли эта величина положительной и как ее вычислять. Однако известно, что она служит коэффициентом турбулентной вихревой диффузии, который присутствует в классических инженерных турбулентных моделях типа модели Смогаринского или в $k\varepsilon$ -моделях (см., например, [33]–[36]).

ЗАМЕЧАНИЕ 4.2. Предположим, что предельная пара $\{\bar{u}, \bar{p}\}$ является решением уравнений Эйлера, которое является достаточно гладким, чтобы сохранялась энергия, т.е. $|\bar{u}(t)|^2 = |u_0|^2$. Тогда в силу энергетического соотношения (44) имеем

$$\frac{1}{2}|u_\nu(t)|^2 + \nu \int_0^t |\nabla u_\nu(s)|^2 ds \leq \frac{1}{2}|u_0|^2,$$

а в силу слабого предельного соотношения

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2}|u_\nu(t)|^2 \geq \frac{1}{2}|\bar{u}(t)|^2$$

получаем сильную сходимость и выполнение равенства

$$\liminf_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^t |\nabla u_\nu(s)|^2 ds = 0.$$

Следующий естественный вопрос был поставлен в работе [37]: “Какая минимальная регулярность решений двумерных и трехмерных уравнений Эйлера необходима, чтобы выполнялся закон сохранения энергии?” Этот вопрос поднимался многими авторами вплоть до результатов работ [38] и [39]. По существу в трехмерном случае было показано, что если u ограничено в $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, H^\beta(\Omega))$ при $\beta > 1/3$, то энергия

$$\frac{1}{2} \int_\Omega |u(x, t)|^2 dx$$

не зависит от времени. С другой стороны, аргументы, заимствованные из статистической теории турбулентности (см. п. 6.2), показывают, что последовательность u_ν будет в общем случае ограничена в пространстве $L^\infty(\mathbb{R}_t^+, H^{\frac{1}{3}}(\Omega))$, что не противоречит возможности убывания энергии у предела при $\nu \rightarrow 0$.

4.2. Диссипативные решения уравнений Эйлера. Для изучения слабых пределов решений Лерэ–Хопфа динамики Навье–Стокса при $\nu \rightarrow 0$ П.-Л. Лионс, Р. Ди Перна (см. [40; с. 153]) ввели понятие *диссипативного решения* уравнений Эйлера. Для мотивации этого понятия рассмотрим бездивергентную пробную функцию $w(x, t)$, которая удовлетворяет условию $w \cdot \vec{n} = 0$ на границе $\partial\Omega$. Обозначим

$$E(w) = \partial_t w + P(w \cdot \nabla w), \quad (49)$$

где P – это проектор Лерэ–Гельмгольца (см., например, [41]). Тогда для любого гладкого решения $u(x, t)$ в Ω уравнений Эйлера с нулевой дивергенцией и с граничным условием $u \cdot \vec{n} = 0$ выполнено:

$$\begin{aligned} \partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p &= 0, \\ \partial_t w + \nabla \cdot (w \otimes w) + \nabla q &= E(w), \end{aligned}$$

$$\frac{d|u - w|^2}{dt} + 2(S(w)(u - w), (u - w)) = 2(E(w), u - w),$$

где $S(w)$ обозначает, как и раньше, симметрический тензор

$$S(w) = \frac{1}{2}(\nabla w + (\nabla w)^T).$$

Интегрируя по времени, находим

$$\begin{aligned} |u(t) - w(t)|^2 &\leq e^{\int_0^t 2\|S(w)(s)\|_\infty ds} |u(0) - w(0)|^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t e^{\int_s^t 2\|S(w)(\tau)\|_\infty d\tau} (E(w)(s), (u - w)(s)) ds. \end{aligned} \quad (50)$$

Это наблюдение приводит к следующему определению.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4.1. Бездивергентное векторное поле

$$u \in C_w(\mathbb{R}_t; (L^2(\Omega))^d),$$

удовлетворяющее условию $u \cdot \vec{n} = 0$ на границе $\partial\Omega$, называется *диссипативным решением* уравнений Эйлера (11), если для любого гладкого бездивергентного векторного поля w с условием $w \cdot \vec{n} = 0$ на $\partial\Omega$ выполнено неравенство (50).

Легко проверить следующее утверждение, которое здесь приводится для большей ясности.

ТЕОРЕМА 4.1. i) Любое классическое решение u уравнений Эйлера (11) является диссипативным решением.

ii) Любое диссипативное решение удовлетворяет энергетическому неравенству

$$|u(t)|^2 \leq |u(0)|^2. \quad (51)$$

iii) Диссипативные решения “устойчивы по отношению к классическим решениям”. Точнее, если w – классическое решение, а u – диссипативное решение уравнений Эйлера, то

$$|u(t) - w(t)|^2 \leq e^{\int_0^t 2\|S(w)(s)\|_\infty ds} |u(0) - w(0)|^2.$$

В частности, если найдется классическое решение с некоторыми начальными данными, то любое диссипативное решение с теми же начальными данными совпадает с этим классическим решением.

iv) При отсутствии физических границ, т.е. в случае периодических граничных условий или во всем пространстве $\mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, любой слабый предел при $\nu \rightarrow 0$ решений Лерэ–Хопфа уравнений Навье–Стокса является диссипативным решением уравнений Эйлера.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО И ЗАМЕЧАНИЯ. Пункт i) является прямым следствием предложенной конструкции. Для доказательства пункта ii) рассмотрим $w \equiv 0$ как классическое решение. Тогда для любого диссипативного решения справедливо соотношение (51), которое объясняет использование термина “диссипативность”. Кроме того, видно, что патологические примеры, построенные в [20] и [21], не являются диссипативными решениями уравнений Эйлера.

Для доказательства пункта iii) используем в неравенстве (50) тот факт, что w , являясь классическим решением, удовлетворяет тождеству $E(w) \equiv 0$. Отметим также, что это утверждение навеяно понятием устойчивости “слабого решения относительно сильного”, которое имеется в работе [42] по гиперболическим системам.

Теперь установим свойство iv) при отсутствии границ. Пусть u_ν является решением Лерэ–Хопфа системы Навье–Стокса, которое удовлетворяет энергетическому неравенству (44), и пусть w – классическое решение уравнений Эйлера. Вычитая следующие два уравнения друг из друга:

$$\begin{aligned}\partial_t u_\nu + \nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu) - \nu \Delta u_\nu + \nabla p_\nu &= 0, \\ \partial_t w + \nabla \cdot (w \otimes w) - \nu \Delta w + \nabla p &= -\nu \Delta w,\end{aligned}$$

и вычисляя скалярное произведение в L^2 полученной разности и функции $(u_\nu - w)$, получаем

$$\begin{aligned}\frac{d|u_\nu - w|^2}{dt} + 2(S(w)(u_\nu - w), (u_\nu - w)) - 2\nu(\Delta(u_\nu - w), (u_\nu - w)) \\ \leq 2(E(w), u_\nu - w) - (\nu \Delta w, (u_\nu - w)).\end{aligned}\quad (52)$$

Отметим, что сделанный шаг является формальным, а с помощью строгих рассуждений можно получить лишь неравенство (52) вместо равенства. Однако это не должно нас смущать, поскольку мы работаем со слабыми решениями Лерэ–Хопфа u_ν системы Навье–Стокса, которые удовлетворяют энергетическому неравенству (44) вместо равенства.

Для завершения доказательства заметим, что при отсутствии физических границ можно воспользоваться равенством

$$-\nu \int \Delta(w - u_\nu)(x, t) \cdot (w - u_\nu)(x, t) dx = \nu \int |\nabla(w - u_\nu)(x, t)|^2 dx, \quad (53)$$

откуда получается требуемый результат, если устремить ν к нулю.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.3. В приведенной выше теореме, в частности, утверждает, что при отсутствии физических границ до тех пор, пока гладкое решение уравнений Эйлера существует, оно является пределом при $\nu \rightarrow 0$ любой последовательности решений Лерэ–Хопфа системы Навье–Стокса с одними и теми же начальными данными. В серии работ, начиная с [43], была установлена связь между решениями Лерэ–Хопфа системы Навье–Стокса и *перенормированными решениями уравнений Больцмана*, определенными в [44]. В конечном итоге в [45] было установлено, что с точностью до подпоследовательности и при правильном выборе масштаба в пространстве и во времени любая последовательность таких перенормированных решений уравнений Больцмана сходится (в некотором слабом смысле) к решению Лерэ–Хопфа системы Навье–Стокса. А с другой стороны, в [46] показано, что при смене масштаба, который усиливает нелинейные эффекты (что на макроскопическом уровне соответствует стремлению числа Рейнольдса к бесконечности), любая последовательность (по модулю перехода к подпоследовательности) перенормированных решений уравнений Больцмана сходится к диссипативному решению уравнений Эйлера. Следовательно, такая последовательность нормированных решений уравнений Больцмана сходится к классическому решению уравнений Эйлера на любом интервале существования такого классического решения. Из этих результатов видно, что с понятием диссипативных решений уравнений Эйлера классические решения играют ту же роль, что “предел Лерэ–Хопфа” и “предел Больцмана”.

ЗАМЕЧАНИЕ 4.4. Имеется по крайней мере две ситуации, когда понятие диссипативного решения является бесполезным.

Первая ситуация связана с двумерными уравнениями Эйлера. Пусть $u_\varepsilon(x, t)$ обозначает последовательность решений двумерных уравнений Эйлера, отвечающих последовательности гладких начальных данных $u_\varepsilon(x, 0)$. Пусть начальная последовательность $u_\varepsilon(x, 0)$ сходится слабо, но не сильно, в $L^2(\Omega)$ к

некоторой начальной скорости $\bar{u}(x, 0)$ при $\varepsilon \rightarrow 0$. Тогда для любого гладкого бездивергентного векторного поля w имеем, благодаря (50), соотношение

$$\begin{aligned} |u_\varepsilon(t) - w(t)|^2 &\leq e^{\int_0^t 2\|S(w)(s)\|_\infty ds} |u_\varepsilon(0) - w(0)|^2 \\ &\quad + 2 \int_0^t e^{\int_s^t 2\|S(w)(\tau)\|_\infty d\tau} (E(w), u_\varepsilon - w)(s) ds. \end{aligned} \quad (54)$$

Однако в силу слабой сходимости при $\varepsilon \rightarrow 0$ имеется лишь неравенство

$$|\bar{u}(0) - w(0)|^2 \leq \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} |u_\varepsilon(0) - w(0)|^2,$$

и (54) может не выполняться в пределе при $\varepsilon \rightarrow 0$. Для иллюстрации этой возможности рассмотрим последовательность осциллирующих решений двумерных уравнений Эйлера вида

$$u_\varepsilon(x, t) = U\left(x, t, \frac{\phi(x, t)}{\varepsilon}\right) + O(\varepsilon),$$

где отображение $\theta \mapsto U(x, t, \theta)$ является нетривиальным и 1-периодическим. В работе [47] был построен особый пример, для которого функция

$$\bar{u} = w - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} u_\varepsilon = \int_0^1 U(x, t, \theta) d\theta$$

уже не является решением уравнений Эйлера. Очевидная причина для этого (в сравнении с понятием диссипативного решения) состоит в том, что функция

$$U\left(x, 0, \frac{\phi(x, 0)}{\varepsilon}\right)$$

не сходится сильно в $L^2(\Omega)$.

Другая ситуация, которая будет обсуждаться позже, соответствует слабому пределу решений уравнений Навье–Стокса в области с физической границей с условиями прилипания Дирихле.

Как уже отмечалось в теореме 4.1, самое важное свойство диссипативного решения уравнений Эйлера состоит в том, что оно совпадает с классическим решением уравнений Эйлера, если таковое существует. Это можно проверить, заменив w в (50) на это классическое решение. Значит, любая процедура приближения диссипативных решений Эйлера должна в пределе приводить к неравенству (50). В самом деле, при отсутствии физических границ в теореме 4.1 почти сразу было успешно показано, что слабые решения Лерэ–Хопфа уравнений Навье–Стокса сходятся к диссипативным решениям уравнений Эйлера. А с другой стороны, при наличии физических границ доказательство так легко не проходит из-за присутствия граничных эффектов. Более конкретно, при наличии границы неравенство (52) приводит к соотношениям

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \frac{d|u_\nu - w|^2}{dt} + (S(w)(u_\nu - w), (u_\nu - w)) + \nu \int |\nabla(w - u_\nu)|^2 dx \\ \leq (E(w), u_\nu - w) - \nu(\Delta w, (u_\nu - w)) + \nu \int_{\partial\Omega} \partial_n u_\nu \cdot w d\sigma. \end{aligned} \quad (55)$$

Самое последнее слагаемое в (55) представляет граничные эффекты. Далее мы обсудим тонкости обращения с этим членом.

5. Граничные условия прилипания Дирихле в динамике Навье–Стокса

Этот раздел посвящен рассмотрению немногих известных предельных результатов при $\nu \rightarrow 0$ для решений уравнений Навье–Стокса в области $\Omega \subset \mathbb{R}^d$, $d = 2, 3$, с однородными условиями (прилипания) Дирихле $u_\nu = 0$ на границе $\partial\Omega$. С этими граничными условиями трудно иметь дело при исследовании нулевой предельной вязкости. Например, решения двумерной системы Навье–Стокса, снабженной граничными условиями $u_\nu \cdot n = 0$ и $\nabla \wedge u_\nu = 0$, легче поддаются математическому анализу (см., например, [48]) при вязкости $\nu \rightarrow 0$. Однако граничные условия прилипания более соответствуют физической картине по следующим причинам.

i) Нулевые граничные условия можно вывести в гладком (ламинарном) режиме из кинетических уравнений Больцмана, когда взаимодействие с границей описывается ядром рассеяния.

ii) Они порождают патологии, наблюдаемые в физических экспериментах, например, вихревую дорожку фон Кармана. Кроме того, необходимо помнить, что почти во все физические эксперименты с турбулентностью при высоких числах Рейнольдса вовлечены границы области (очень часто турбулентность образуется в течении под давлением через решетку!).

Прежде всего проблема возникает в пограничном слое. Это происходит из-за того, что в динамике Навье–Стокса все поле скорости равно нулю на границе, т.е. $u_\nu = 0$ на $\partial\Omega$, в то время как для динамики Эйлера обнуляется только нормальная компонента поля скорости на границе, т.е. $u \cdot \vec{n} = 0$ на $\partial\Omega$. Поэтому в пределе, когда вязкость $\nu \rightarrow 0$, тангенциальная составляющая поля скорости динамики Навье–Стокса u_ν порождает при “скачке” пограничный слой. Тогда, в отличие от случая линейного сингулярного возмущения, нелинейный адвективный член в уравнениях Навье–Стокса может направить возникшую особенность во внутреннюю часть области.

Как уже отмечалось, последнее слагаемое в (55), т.е. интеграл по границе в задаче с условиями прилипания,

$$\nu \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\nu}{\partial n} \cdot w \, d\sigma = \nu \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_\nu}{\partial n} \right)^\tau \cdot w^\tau \, d\sigma = \nu \int_{\partial\Omega} (\nabla \wedge u_\nu) \cdot (\vec{n} \wedge w) \, d\sigma, \quad (56)$$

возможно, ответственен за потерю регулярности в пределе при $\nu \rightarrow 0$. Это можно сформулировать точнее следующим образом.

УТВЕРЖДЕНИЕ 5.1. Пусть $u(x, t)$ является решением несжимаемых уравнений Эйлера в $\Omega \times (0, T]$ со следующими предположениями регулярности:

$$S(u) = \frac{1}{2}(\nabla u + (\nabla u)^T) \in L^1((0, T); L^\infty(\Omega)),$$

$$u \in L^2((0, T); H^s(\Omega)) \quad \text{при} \quad s > \frac{1}{2}.$$

Кроме того, предположим, что последовательность u_ν решений Лерэ–Хопфа динамики Навье–Стокса (с условиями прилипания на границе) с начальными данными $u_\nu(x, 0) = u(x, 0)$ удовлетворяет соотношению

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \|P_{\partial\Omega}(\nabla \wedge u_\nu)\|_{L^2((0, T); H^{-s+\frac{1}{2}}(\partial\Omega))} = 0,$$

где $P_{\partial\Omega}$ обозначает проекцию на касательную плоскость к $\partial\Omega$, заданную по формуле

$$P_{\partial\Omega}(\nabla \wedge u_\nu) = \nabla \wedge u_\nu - ((\nabla \wedge u_\nu) \cdot \vec{n})\vec{n}.$$

Тогда последовательность u_ν стремится к u в $C((0, T); L^2(\Omega))$.

Доказательство следует непосредственно из (55) и (56), если заменить w на u . Это утверждение можно усилить следующей простой, но замечательной теоремой Като, которая принимает во внимание образование вихря в пограничном слое $\{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) < \nu\}$, где $d(x, y)$ обозначает евклидово расстояние между точками x и y .

ТЕОРЕМА 5.1. Пусть $u(x, t) \in W^{1, \infty}((0, T) \times \Omega)$ – решение динамика Эйлера, и пусть u_ν обозначает последовательность решений Лерэ–Хопфа динамики Навье–Стокса с нулевыми граничными условиями

$$\partial_t u_\nu - \nu \Delta u_\nu + \nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu) + \nabla p_\nu = 0, \quad u_\nu(x, t) = 0 \quad \text{на} \quad \partial\Omega \quad (57)$$

и с начальными данными $u_\nu(x, 0) = u(x, 0)$. Тогда следующие факты эквивалентны:

$$(i) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\nabla \wedge u_\nu) \cdot (\vec{n} \wedge u) \, d\sigma \, dt = 0, \quad (58)$$

$$(ii) \quad u_\nu(t) \rightarrow u(t) \quad \text{в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{равномерно по} \quad t \in [0, T], \quad (59)$$

$$(iii) \quad u_\nu(t) \rightarrow u(t) \quad \text{слабо в} \quad L^2(\Omega) \quad \text{для любого} \quad t \in [0, T], \quad (60)$$

$$(iv) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_\nu(x, t)|^2 \, dx \, dt = 0, \quad (61)$$

$$(v) \quad \lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \int_{\Omega \cap \{d(x, \partial\Omega) < \nu\}} |\nabla u_\nu(x, t)|^2 \, dx \, dt = 0. \quad (62)$$

НАБРОСОК ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Утверждение (59) выводится из (58) заменой w на u в (55) и (56). Для вывода (60) из (59) и (61) из (60), очевидно, ничего не надо доказывать.

Теперь напомним еще раз энергетическое неравенство (44), которому удовлетворяют решения Лерэ–Хопфа динамики Навье–Стокса:

$$\frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\nu(x, T)|^2 \, dx + \nu \int_0^T \int_{\Omega} |\nabla u_\nu(x, t)|^2 \, dx \, dt \leq \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, 0)|^2 \, dx. \quad (63)$$

Из слабой сходимости, сформулированной в (60), а также из гладкости решения u эйлеровой динамики следует, что

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u_\nu(x, T)|^2 \, dx &\geq \frac{1}{2} \int_{\Omega} \left| \lim_{\nu \rightarrow 0} u_\nu(x, T) \right|^2 \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, T)|^2 \, dx = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u(x, 0)|^2 \, dx. \end{aligned} \quad (64)$$

Вместе с (63) это показывает, что (60) влечет (61).

Самая сложная часть теоремы заключается в выводе соотношения (58) из (62). На первом шаге строится бездивергентная функция $v_\nu(x, t)$ с носителем в области $\{x \in \Omega \mid d(x, \partial\Omega) \leq \nu\} \times [0, T]$, которая совпадает с u на

$\partial\Omega \times [0, T]$ и удовлетворяет (с константой K , не зависящей от ν) следующим оценкам:

$$\|v_\nu\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} + \|d(x, \partial\Omega)\nabla v_\nu\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq K, \quad (65)$$

$$\|(d(x, \partial\Omega))^2 \nabla v_\nu\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq K\nu, \quad (66)$$

$$\|v_\nu\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Omega))} + \|\partial_t v_\nu\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Omega))} \leq K\nu^{\frac{1}{2}}, \quad (67)$$

$$\|\nabla v_\nu\|_{L^\infty((0, T); L^2(\Omega))} \leq K\nu^{-\frac{1}{2}}, \quad (68)$$

$$\|\nabla v_\nu\|_{L^\infty(\Omega \times (0, T))} \leq K\nu^{-1}. \quad (69)$$

Теперь умножаем уравнения Навье–Стокса на v_ν , интегрируем и получаем

$$\begin{aligned} -\nu \int_0^T \int_{\partial\Omega} (\nabla \wedge u_\nu) \cdot (\vec{n} \wedge u) d\sigma dt &= -\nu \int_0^T \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u_\nu}{\partial n} \cdot v_\nu d\sigma dt \\ &= -\nu \int_0^T \int_\Omega \Delta u_\nu \cdot v_\nu dx dt - \nu \int_0^T \int_\Omega (\nabla u_\nu : \nabla v_\nu) dx dt \\ &= -\int_0^T (\partial_t u_\nu, v_\nu) dt - \int_0^T (\nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu), v_\nu) dt - \nu \int_0^T (\nabla u_\nu, \nabla v_\nu) dt. \end{aligned} \quad (70)$$

В конечном итоге, применяя полученные оценки и (62), можно проверить, что

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\int_0^T ((\partial_t u_\nu, v_\nu) + (\nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu), v_\nu) + \nu(\nabla u_\nu, \nabla v_\nu)) dt \right) = 0, \quad (71)$$

что завершает доказательство теоремы.

ЗАМЕЧАНИЕ 5.1. В [49] изучалась скорость сходимости решений двумерной системы Навье–Стокса к решениям уравнений Эйлера в случае отсутствия физической границы и на конечных интервалах времени. Основное наблюдение состоит в том, что, хотя скорость сходимости в L^2 -норме для гладких начальных данных имеет порядок $\mathcal{O}(\nu)$, для менее гладких начальных данных этот порядок равен $\mathcal{O}(\sqrt{\nu})$. Например, для кусочных вихревых данных с гладкой границей имеет место порядок сходимости $\mathcal{O}(\sqrt{\nu})$. В этом случае в жидкости образуется внутренний пограничный слой, который является причиной понижения порядка сходимости.

В двумерном случае для начальных данных с конечной $W^{1,p}$ -нормой при $p > 1$ (а также для начальных данных, у которых вихрь является конечной мерой с “простой” сменой знаков, см. [19] и [50]) можно доказать существование “слабых решений динамики Эйлера”. При отсутствии физических границ такие решения являются предельными точками семейства (однозначно определяемых) решений Лерэ–Хопфа двумерной динамики Навье–Стокса. Однако эти слабые решения уравнений Эйлера не являются однозначно разрешимыми, и вопрос о сохранении энергии, насколько известно авторам данного обзора, является полностью открытым.

С другой стороны, в области с физической границей и с гладкими начальными данными теорема 5.1 обнаруживает существенную разницу в следующих двух ситуациях (то же замечание справедливо локально по времени в трехмерной задаче).

i) Средняя скорость диссипации энергии

$$\varepsilon = \frac{\nu}{T} \int_0^T \int |\nabla u_\nu(x, t)|^2 dx dt$$

стремится к нулю при $\nu \rightarrow 0$, и последовательность u_ν решений Лерэ–Хопфа сходится сильно к регулярному решению $\bar{u}$ динамики Эйлера.

ii) Средняя скорость диссипации энергии не стремится к нулю при $\nu \rightarrow 0$ (по модулю извлечения подпоследовательности), и поэтому для соответствующего слабого предела u функций u_ν закон сохранения энергии не выполняется, т.е.

$$\frac{1}{2}|u(t)|^2 < \frac{1}{2}|u(0)|^2 \quad \text{для некоторых } t \in (0, T),$$

а в пределе может наблюдаться один из следующих двух сценариев.

а) В пределе получается слабое (но не сильное) решение динамика Эйлера, которое обнаруживает убывание энергии. Такой сценарий совместим с равномерными оценками спектра Фурье

$$E_\nu(k, t) = |\hat{u}_\nu(k, t)|^2 |k|^{d-1}, \quad \hat{u}_\nu(k, t) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ikx} u_\nu(x, t) dx,$$

который может удовлетворять равномерной по ν оценке типа

$$E_\nu(k, t) \leq C|k|^{-\beta}, \quad (72)$$

где $\beta < 5/3$. В противном случае будет наблюдаться противоречие с результатами работ [37]–[39].

б) Нет равномерных по вязкости оценок типа (72), и предел не является даже решением динамики Эйлера, но он скорее является решением модифицированной системы уравнений с членами, связанными с турбулентными моделями, наподобие слагаемого “вихрь-вязкость”.

6. Детерминированный и статистический спектры турбулентности

6.1. Детерминированный спектр и преобразование Вигнера. Целью настоящего пункта является введение мер Вигнера для анализа (в областях размерности $d = 2, 3$) тензора напряжения Рейнольдса

$$\text{RT}(u_\nu)(x, t) = \lim_{\nu \rightarrow 0} ((u_\nu - \bar{u}) \otimes (u_\nu - \bar{u})), \quad (73)$$

который возникает в процессе перехода к слабому пределу в решениях уравнений Навье–Стокса u_ν при $\nu \rightarrow 0$ (ср. (45)). (Отметим, что $\text{RT}(u_\nu)(x, t)$ не зависит от вязкости ν , но зависит от последовательности $\{u_\nu\}$.) Эта точка зрения будет сравниваться далее с подходами статистической теории турбулентности (см. п. 6.2).

Пусть $\{u_\nu, p_\nu\}$ – последовательность слабых решений Лерэ–Хопфа системы Навье–Стокса, снабженной нулевыми граничными условиями Дирихле в области Ω (имеющей физические границы). В силу энергетического неравенства (44) (которое в некоторых случаях может быть равенством),

$$\frac{1}{2}|u_\nu(\cdot, t)|^2 + \nu \int_0^t |\nabla u_\nu(\cdot, t)|^2 dt \leq \frac{1}{2}|u(\cdot, 0)|^2, \quad (74)$$

последовательность решений $\{u_\nu\}$ сходится (по модулю перехода к подпоследовательности) при $\nu \rightarrow 0$ в *-слабой топологии банахова пространства $L^\infty((0, T); L^2(\Omega))$ к бездивергентному векторному полю $\bar{u}$, а последовательность распределений $\{\nabla p_\nu\}$ сходится к распределению $\nabla \bar{p}$. Кроме того, пара

$\{\bar{u}, \bar{p}\}$ удовлетворяет системе уравнений

$$\nabla \cdot \bar{u} = 0 \quad \text{в } \Omega, \quad \bar{u} \cdot \vec{n} = 0 \quad \text{на } \partial\Omega, \quad (75)$$

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \cdot \text{RT}(u_\nu) + \nabla \bar{p} = 0 \quad \text{в } \Omega \quad (76)$$

(ср. (46)). Для изучения поведения решений внутри области рассмотрим произвольное открытое подмножество Ω' , замыкание которого является компактным подмножеством Ω , т.е. $\bar{\Omega}' \subseteq \Omega$. Предполагая, что предельная функция $\bar{u}$ принадлежит пространству $L^2((0, T); H^1(\Omega))$, рассмотрим функцию

$$v_\nu = a(x)(u_\nu - \bar{u}),$$

где $a(x) \in \mathcal{D}(\Omega)$, $a(x) \equiv 1$ при всех $x \in \Omega'$. Тогда из (74) и сделанных предположений получаем, что последовательность v_ν удовлетворяет равномерной оценке

$$\nu \int_0^\infty \int_\Omega |\nabla v_\nu|^2 dx \leq C. \quad (77)$$

Значит, последовательность v_ν является (в терминологии работы [51]) $\sqrt{\nu}$ -осциллирующей. В соответствии с этим вводится детерминированный спектр корреляции, или *преобразование Вигнера* в масштабной шкале $\sqrt{\nu}$:

$$\widehat{\text{RT}(v_\nu)}(x, t, k) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}_y^d} e^{ik \cdot y} \left(v_\nu \left(x - \frac{\sqrt{\nu}}{2} y \right) \otimes v_\nu \left(x + \frac{\sqrt{\nu}}{2} y \right) \right) dy.$$

С помощью обратного преобразования Фурье находим, что

$$v_\nu(x, t) \otimes v_\nu(x, t) = \int_{\mathbb{R}_k^d} \widehat{\text{RT}(v_\nu)}(x, t, k) dk. \quad (78)$$

Тензор $\widehat{\text{RT}(v_\nu)}(x, t, k)$ является основным объектом изучения в разделе 1 работы [51]. С точностью до перехода к некоторой подпоследовательности тензор $\widehat{\text{RT}(v_\nu)}(x, t, k)$ сходится слабо при $\nu \rightarrow 0$ к неотрицательной симметричной матричнозначной мере $\widehat{\text{RT}}(x, t, dk)$, которая называется *мерой Вигнера* или *спектром Вигнера*. Кроме того, внутри открытого подмножества Ω' слабый предел $\bar{u}$ является решением уравнения

$$\partial_t \bar{u} + \nabla \cdot (\bar{u} \otimes \bar{u}) + \nabla \cdot \int_{\mathbb{R}_k^d} \widehat{\text{RT}}(x, t, dk) + \nabla \bar{p} = 0.$$

Спектр Вигнера имеет следующие свойства.

i) Он определяется с помощью двухточечной корреляционной формулы.

ii) Этот спектр является локальным объектом, зависящим от переменных.

Точнее, для любой функции $\phi \in \mathcal{D}(\Omega)$ выполнено:

$$\begin{aligned} \lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}_y^d} e^{ik \cdot y} \left((\phi v_\nu) \left(x - \frac{\sqrt{\nu}}{2} y \right) \otimes (\phi v_\nu) \left(x + \frac{\sqrt{\nu}}{2} y \right) \right) dy \right) \\ = |\phi(\cdot)|^2 \widehat{\text{RT}}(x, t, dk). \end{aligned} \quad (79)$$

Следовательно, конструкция $\widehat{\text{RT}}(x, t, dk)$ не зависит от выбора функции $a(x)$ и открытого подмножества Ω' .

iii) Спектр Вигнера служит *критерием турбулентности*: точки (x, t) , в окрестности которых последовательность u_ν остается гладкой и сходится локально и строго к $\bar{u}$ при $\nu \rightarrow 0$, характеризуются соотношением

$$\text{Trace}(\widehat{\text{RT}}(x, t, dk)) = 0. \quad (80)$$

iv) Он является *микролокальным объектом*. На самом деле этот спектр зависит только от поведения спектра Фурье последовательности $\phi(x)v_\nu$ (а в действительности $\phi(x)u_\nu$) в *частотной полосе*

$$A \leq |k| \leq \frac{B}{\sqrt{\nu}}.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.1. Для любой пары строго положительных констант (A, B) и для любых тестовых функций $(\psi(k), \phi(x), \theta(t)) \in C_0^\infty(\mathbb{R}_k^d) \times C_0^\infty(\mathbb{R}_x^d) \times C_0^\infty(\mathbb{R}_t^+)$ выполнено предельное соотношение

$$\begin{aligned} & \int_0^\infty \int \psi(k) |\phi(x)|^2 \theta(t) \text{Trace}(\widehat{\text{RT}}(u_\nu))(x, t, dk) dx dt \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \int_0^\infty \theta(t) \int_{A \leq |k| \leq \frac{B}{\sqrt{\nu}}} (\psi(\sqrt{\nu} k) (\widehat{\phi v_\nu}, \widehat{\phi v_\nu})) dk dt. \end{aligned} \quad (81)$$

Единственное отличие этого представления от формулы, приведенной в [51], состоит в том, что в ней слабый предел $\bar{u}$ вычтен из последовательности u_ν . Формула (78) вместе с энергетической оценкой является первым результатом в утверждении 1.7 из работы [51], а соотношение (81) выводится из формулы (1.32) в [51] с помощью наблюдения, что слабая сходимост последовательности $(u_\nu - \bar{u})$ к 0 влечет соотношение

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \left(\int_0^\infty \theta(t) \int_{|k| \leq A} (\psi(\sqrt{\nu} k) (\widehat{\phi v_\nu}, \widehat{\phi v_\nu})) dk dt \right) = 0.$$

6.2. Энергетический спектр в статистической теории турбулентности. Оказывается, что спектр Вигнера, изучавшийся в предыдущем пункте, связан с детерминированной версией “спектра турбулентности”, который является классическим понятием в статистической теории турбулентности. Обе точки зрения можно соотнести, если ввести однородные случайные величины. Пусть $(\mathfrak{M}, \mathfrak{F}, dm)$ обозначает лежащее в основе вероятностное пространство. Случайная величина $u(x, \mu)$ называется однородной, если для любой функции F математическое ожидание $F(u(x, \mu))$, а именно величина

$$\langle F(u(x, \cdot)) \rangle = \int_{\mathfrak{M}} F(u(x, \mu)) dm(\mu),$$

не зависит от x , т.е.

$$\nabla_x (\langle F(u(x, \cdot)) \rangle) = 0.$$

В частности, если $u(x, \mu)$ является однородной случайной векторнозначной функцией, то

$$\langle u(x + r, \cdot) \otimes u(x, \cdot) \rangle = \left\langle u\left(x + \frac{r}{2}, \cdot\right) \otimes u\left(x - \frac{r}{2}, \cdot\right) \right\rangle, \quad (82)$$

что приводит к следующему результату.

УТВЕРЖДЕНИЕ 6.2. Пусть $u(x, \mu)$ является однородной случайной величиной, ее преобразование Фурье обозначим через $\hat{u}(k, \mu)$. Тогда

$$\langle \hat{u}(k, \cdot) \otimes \overline{\hat{u}(k, \cdot)} \rangle = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik \cdot r} \left\langle u\left(x + \frac{r}{2}, \cdot\right) \otimes u\left(x - \frac{r}{2}, \cdot\right) \right\rangle dr. \quad (83)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Приведем рассуждения для однородной, периодической по переменной x случайной величины, которая имеет куб периодов со стороной $2\pi L$. Тогда формула (83) получается при переходе к пределу, когда длина L стремится к бесконечности. С помощью разложения в ряд Фурье в области $(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d$ получаем

$$\begin{aligned} \hat{u}(k, \mu) \otimes \overline{\hat{u}(k, \mu)} &= \frac{1}{(2\pi L)^{2d}} \int_{(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d} \int_{(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d} (u(y, \mu) e^{-i \frac{k \cdot y}{L}} \otimes u(y', \mu) e^{i \frac{k \cdot y'}{L}}) dy' dy \\ &= \frac{1}{(2\pi L)^{2d}} \int_{(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d} e^{-i \frac{k \cdot r}{L}} \int_{(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d} (u(y, \mu) \otimes u(y + r, \mu)) dy dr. \end{aligned}$$

Усреднение по вероятностной мере dm , использование однородности случайной величины $u(x, \mu)$ и интегрирование по dy приводят к равенству

$$\langle \hat{u}(k, \cdot) \otimes \overline{\hat{u}(k, \cdot)} \rangle = \frac{1}{(2\pi L)^d} \int_{(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d} e^{-i \frac{k \cdot r}{L}} \left\langle u_\nu\left(y + \frac{r}{2}, \cdot\right) \otimes u_\nu\left(y - \frac{r}{2}, \cdot\right) \right\rangle dr. \quad (84)$$

Утверждение 6.2 доказано.

Теперь, предполагая, что, в дополнение к однородности, математическое ожидание тензора двухточечной корреляции $\langle u(x + r, \cdot) \otimes u(x, \cdot) \rangle$ является *изотропной* функцией (т.е. она не зависит от направления вектора r , а только от его длины), получаем следующую формулу:

$$\begin{aligned} \langle \hat{u}(k, \cdot) \otimes \overline{\hat{u}(k, \cdot)} \rangle &= \frac{1}{(2\pi L)^d} \int_{(\mathbb{R}/2\pi LZ)^d} e^{-i \frac{k \cdot r}{L}} \left\langle u_\nu\left(y + \frac{r}{2}, \cdot\right) \otimes u_\nu\left(y - \frac{r}{2}, \cdot\right) \right\rangle dr \\ &= \frac{E(|k|)}{S_{d-1}|k|^{d-1}} \left(I - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right), \end{aligned}$$

где $S_1 = 2\pi$, $S_2 = 4\pi$, что определяет спектр турбулентности $E(|k|)$.

Из однородности следует, что решение системы Навье–Стокса удовлетворяет локальному соотношению энергетического баланса, которое принято называть соотношением Кармана–Хаузерса (ср. (85) далее). Точнее, пусть пара $\{u_\nu, p_\nu\}$ обозначает решение уравнений Навье–Стокса в области Ω (с нулевыми условиями Дирихле при наличии физической границы, а в противном случае рассматривается все пространство или ставятся периодические граничные условия)

$$\partial_t u_\nu + \nabla \cdot (u_\nu \otimes u_\nu) - \nu \Delta u_\nu + \nabla p_\nu = f.$$

Здесь u_ν и p_ν – случайные величины, зависящие от (x, t) . В дальнейшем мы будем опускать обозначение зависимости от μ везде, где это не вызовет путаницы.

Умножаем систему Навье–Стокса на $u_\nu(x, t, \mu)$ и предполагаем, что после этого получается следующее равенство:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} \partial_t |u_\nu(x, t, \mu)|^2 - \nabla_x \cdot ((\nu \nabla_x u_\nu - p_\nu I) u_\nu)(x, t, \mu) \\ + \nu |\nabla_x u_\nu(x, t, \mu)|^2 = f(x, t) \cdot u_\nu(x, t, \mu), \end{aligned}$$

которое в двумерном случае является установленным фактом, а для трехмерной системы Навье–Стокса в классе решений Каффарелли–Кона–Ниренберга известен лишь ослабленный вариант этого соотношения, в котором равенство заменено на неравенство (ср. (43)).

Благодаря условию однородности величина

$$\langle ((\nu \nabla_x u_\nu - p_\nu I) u_\nu)(x, t, \cdot) \rangle$$

не зависит от x , и поэтому

$$\langle \nabla_x \cdot ((\nu \nabla_x u_\nu - p_\nu I) u_\nu)(x, t, \cdot) \rangle = \nabla_x \cdot \langle ((\nu \nabla_x u_\nu - p_\nu I) u_\nu)(x, t, \cdot) \rangle = 0.$$

И тогда получается поточечное энергетическое соотношение

$$\frac{1}{2} \partial_t \langle |u_\nu(x, t, \cdot)|^2 \rangle + \nu \langle |\nabla u_\nu(x, t, \cdot)|^2 \rangle = \langle f(x, t) \cdot u_\nu(x, t, \cdot) \rangle. \quad (85)$$

Это равенство называется соотношением Кармана–Хауэрса, и из него следует, что величины

$$\epsilon = \langle |u_\nu(x, t, \cdot)|^2 \rangle \quad \text{и} \quad \varepsilon(\nu) = \frac{1}{t} \int_0^t \nu \langle |\nabla u_\nu(x, s, \cdot)|^2 \rangle ds$$

равномерно ограничены по времени при разумных предположениях для внешней силы.

Наконец, предположим, что случайный процесс является стационарным по времени. Тогда из уравнения (85) выводится *априорная* оценка для средней скорости диссипации энергии

$$\varepsilon(\nu) = \nu \langle |\nabla u_\nu(x, t, \cdot)|^2 \rangle,$$

которая не зависит от (x, t) . Теперь для внешней силы f , действующей только в низших модах Фурье, можно предполагать существование области, называемой инерциальным диапазоном, где спектр турбулентности $E(|k|)$ ведет себя в соответствии с универсальным степенным законом. Термин “инерциальный” означает тот факт, что в этом диапазоне волновых чисел энергия спускается каскадом от низких мод к высоким без утечки энергии. Таким образом, в этом диапазоне отсутствует эффект вязкости и здесь действует лишь инерциальный член $(u \cdot \nabla)u$. Объединяя вместе сформулированные выше предположения: однородность, изотропность и стационарность случайного процесса, а также существование инерциального диапазона размера

$$A \leq |k| \leq B\nu^{-\frac{1}{2}},$$

в котором спектр ведет себя по степенному закону, получаем в итоге, применяя соображения размерности в трехмерном случае, “закон Колмогорова”:

$$E(|k|) \simeq \varepsilon(\nu)^{\frac{2}{3}} |k|^{-\frac{5}{3}}. \quad (86)$$

Важно помнить, что этот вывод базируется на анализе случайных семейств решений. Поэтому из формулы (86) и равенства (84) вытекает тот факт, что решения в среднем имеют спектр, который в турбулентном режиме ведет себя по предписанному правилу

$$\begin{aligned} & \langle \hat{u}_\nu(k, t, \cdot) \otimes \overline{\hat{u}_\nu(k, t, \cdot)} \rangle \\ &= \frac{1}{(2\pi L)^d} \int_{(\mathbb{R}/L\mathbb{Z})^d} e^{-i \frac{k \cdot r}{L}} \left\langle u_\nu \left(y + \frac{r}{2}, t, \cdot \right) \otimes u_\nu \left(y - \frac{r}{2}, t, \cdot \right) \right\rangle dr \\ &\simeq \frac{\varepsilon(\nu)^{\frac{2}{3}} |k|^{-\frac{5}{3}}}{4\pi |k|^{d-1}} \left(I - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.1. Основная сложность для строгого обоснования приведенного вывода состоит в построении вероятностной меры dm на ансамбле решений системы Навье–Стокса, которая удовлетворяла бы условиям однородности, изотропности и стационарности. Кроме того, конструкция такой меры должна быть равномерной, когда вязкость ν стремится к 0. См., например, книги [52], и [53], а также имеющиеся там ссылки, для дальнейшего изучения этой весьма непростой проблемы.

Другая сложность (которая также является спорным моментом) состоит в обосновании спектра инерциального диапазона со степенным законом. В книге [53] (см. также [54]), в частности, установлено существование инерциального диапазона волновых чисел, где имеется прямой энергетический каскад. Однако для этого инерциального диапазона строгое обоснование степенного закона не известно.

Тем не менее, конструкция степенного закона спектра часто используется для контрольной проверки численных вычислений и экспериментов. Поскольку желательно иметь один проход эксперимента или один прогон численного моделирования, то используется теорема Биркгофа, которая соответствует предположению эргодичности. Это позволяет заменить среднее по случайному ансамблю усреднением по времени. К примеру, можно считать в присутствии внешней силы, что кроме стационарности *для почти любого решения* (т.е. для почти любого μ) выполнено равенство

$$\lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_\nu \left(y + \frac{r}{2}, t, \mu \right) \otimes u_\nu \left(y - \frac{r}{2}, t, \mu \right) dt = \left\langle u_\nu \left(y + \frac{r}{2}, t, \cdot \right) \otimes u_\nu \left(y - \frac{r}{2}, t, \cdot \right) \right\rangle,$$

которое приводит к следующему соотношению для почти любого решения u_ν :

$$\begin{aligned} & \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T u_\nu(k, t, \mu) \otimes \overline{\hat{u}_\nu(k, t, \mu)} dt \\ &= \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ik \cdot r} \left\langle u_\nu \left(y + \frac{r}{2}, t, \cdot \right) \otimes u_\nu \left(y - \frac{r}{2}, t, \cdot \right) \right\rangle dr \\ &= \langle \hat{u}(k, t, \cdot) \otimes \overline{\hat{u}(k, t, \cdot)} \rangle \simeq \frac{\varepsilon(\nu)^{\frac{2}{3}} |k|^{-\frac{5}{3}}}{4\pi |k|^{d-1}} \left(I - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right). \end{aligned}$$

6.3. Сравнение детерминированного и статистического спектров.

Детерминистическая точка зрения исходит из семейства решений u_ν динамики Навье–Стокса с вязкостью $\nu > 0$ и интерпретирует явление турбулентности в терминах поведения слабого предела (асимптотического поведения таких последовательностей при $\nu \rightarrow 0$) со спектром Вигнера

$$\begin{aligned} & \widehat{\text{RT}}(x, t, dk) \\ &= \lim_{\nu \rightarrow 0} \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}_y^d} e^{ik \cdot y} \left((u_\nu - \bar{u}) \left(x - \frac{\sqrt{\nu}}{2} y, t \right) \otimes (u_\nu - \bar{u}) \left(x + \frac{\sqrt{\nu}}{2} y, t \right) \right) dy. \end{aligned}$$

Как уже отмечалось, этот объект является локальным (он учитывает зависимость от (x, t)). Кроме того, можно определить носитель турбулентности для такого семейства решений, как носитель меры $\text{Trase } \widehat{\text{RT}}(x, t, dk)$. Конечно, нахождение этого носителя является чрезвычайно сложной задачей, которая зависит от конфигурации. Это можно проиллюстрировать словами Леонар-

до да Винчи, которые часто цитируются в работах по данной теме, например, в [55; с. 112]:

doue la turbolenza dellacqua sigenera
doue la turbolenza dellacqua simantiene plughò
*doue la turbolenza dellacqua siposa.*¹

К этому моменту без дополнительных предположений ничего нельзя сказать, кроме того, что формула (81) указывает на существование существенного, если не “инерциального”, диапазона

$$A \leq |k| \leq \frac{B}{\sqrt{\nu}}. \quad (87)$$

С другой стороны, статистическая теория турбулентности исходит из предположений, которые трудно сформулировать строго математически, относительно существования статистики (вероятностной меры), для которой двухточечные корреляции любого семейства решений u_ν уравнений Навье–Стокса являются однородными и изотропными. При выполнении этих предположений доказываются свойства убывания спектра турбулентности. Кроме того, с помощью простых соображений размерности из этих условий выводится следующая формула для средних решений относительно вероятностной меры $dm(\mu)$ в инерциальном диапазоне:

$$\langle |\hat{u}_\nu(k, t, \cdot)|^2 \rangle = \frac{1}{(2\pi)^4} \frac{E(|k|)}{|k|^2} \simeq (\varepsilon(\nu))^{\frac{2}{3}} |k|^{-\frac{11}{3}}. \quad (88)$$

Наконец, предполагая и используя стационарность (по времени) этих двухточечных корреляций и, кроме того, применяя иногда эргодическую теорему Биркгофа, получаем возможность обосновать следующую формулу, справедливую для почти любого решения:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_0^T (\hat{u}_\nu(k, t, \mu) \otimes \overline{\hat{u}_\nu(k, t, \mu)}) dt \\ = \langle \hat{u}_\nu(k, t, \cdot) \otimes \overline{\hat{u}_\nu(k, t, \cdot)} \rangle \simeq \frac{(\varepsilon(\nu))^{\frac{2}{3}} |k|^{-\frac{5}{3}}}{4\pi |k|^{d-1}} \left(I - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right). \end{aligned}$$

ЗАМЕЧАНИЕ 6.2. Можно рассмотреть дальнейшие связи этих двух спектральных концепций.

i) Предположим, что спектр Вигнера в окрестности точки (x_0, t_0) является изотропным. Зададим локальную среднюю скорость диссипации энергии по формуле

$$\varepsilon_{(x_0, t_0)}(\nu) = \nu \int_0^\infty \int_\Omega |\phi(x, t)|^2 |\nabla u_\nu(x, t)|^2 dx dt, \quad (89)$$

¹В русском издании книги [55], на с. 123, приводится такой перевод этих строк:

где турбулентность воды возбуждается
где турбулентность воды сохраняется надолго
где турбулентность воды затихает.

где функция ϕ локализована в окрестности точки (x_0, t_0) . Тогда можно доказать, что для $|k|$ в диапазоне, заданном неравенствами (87),

$$\begin{aligned} & \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d_y} e^{ik \cdot y} \left((u_\nu - \bar{u}) \left(x - \frac{\sqrt{\nu}}{2} y, t \right) \otimes (u_\nu - \bar{u}) \left(x + \frac{\sqrt{\nu}}{2} y, t \right) \right) dy \\ & \simeq \varepsilon_{(x_0, t_0)}(\nu) |k|^{-\frac{11}{3}} \left(I - \frac{k \otimes k}{|k|^2} \right), \end{aligned}$$

когда ν стремится к нулю.

ii) Поскольку силы в большом масштабе, а также граничные эффекты приводят к нарушению изотропности, условие изотропности может быть выполнено лишь в малом пространственном масштабе, т.е. вдали от указанных эффектов. Отметим, что спектр Вигнера является локализованным и использует лишь волновые числа в высокочастотном диапазоне (т.е. в малом пространственном масштабе). Поэтому разумно попытаться найти достаточные условия, которые гарантировали бы изотропность спектра Вигнера.

iii) Другой подход для установления существования инерциального диапазона для прямого каскада энергии в трехмерном пространстве и для прямого каскада энтропии в двумерном пространстве представлен в работе [53] (см. также имеющиеся там ссылки). Этот метод основан на статистически стационарных решениях уравнений Навье–Стокса. Они являются не зависящими от времени вероятностными мерами, которые инвариантны относительно разрешающего оператора уравнений Навье–Стокса. Кроме того, в [54] приведены некоторые не вполне строгие обоснования степенного закона Колмогорова для спектра энергии.

7. Задачи Прандтля и Кельвина–Гельмгольца

В данном разделе предполагается, что последовательность решений $\{u_\nu\}$ уравнений Навье–Стокса с граничными условиями прилипания (если есть физическая граница) сходится к решению уравнений Эйлера. Тогда в силу теоремы Като 5.1 имеется соотношение

$$\lim_{\nu \rightarrow 0} \nu \int_0^T \int_{\{x \in \Omega: d(x, \partial\Omega) < \nu\}} |\nabla u_\nu(x, t)|^2 dx dt = 0. \quad (90)$$

Однако в силу того, что тангенциальная составляющая скорости решения уравнений Эйлера не равна нулю на границе при $\nu \rightarrow 0$, может появиться пограничный слой. Но, с одной стороны, размеры пограничного слоя должны согласовываться с условием (90); а с другой стороны, уравнения, моделирующие поведение в этом пограничном слое, должны отражать тот факт, что задача является весьма неустойчивой. Это происходит из-за того, что неустойчивость (а возможно, и сингулярность), которая возникла около границы, не остается там, но выходит за пределы этой области из-за наличия нелинейного члена адвекции в уравнениях Навье–Стокса. Этим объясняется сложность уравнений Прандтля (УП) пограничного слоя.

Имеется несколько причин для сравнения уравнений Прандтля с задачей Кельвина–Гельмгольца (КГ):

1. Несмотря на недоказанность некоторых основных моментов, связанных с задачей КГ, с математической точки зрения она разработана лучше, чем задача УП. Однако обе эти задачи имеют похожие свойства возникновения и развития неустойчивости и сингулярности.

2. На уровне моделирования, особенно для задач, связанных с воздушным следом за самолетом или с вихрями, порождаемыми концами крыльев, остается неясным вопрос о возможности описания турбулентности, исходя из сингулярностей задачи КГ или УП (или их обеих)!

Для простоты эти задачи будут рассматриваться в двумерном пространстве, а для задачи УП – в полуплоскости $x_2 > 0$.

7.1. Пограничный слой Прандтля. Начнем с рассмотрения двумерной системы Навье–Стокса в полуплоскости $x_2 > 0$ с условиями прилипания на границе $u^\nu(x_1, 0, t) \equiv 0$:

$$\partial_t u_1^\nu - \nu \Delta u_1^\nu + u_1^\nu \partial_{x_1} u_1^\nu + u_2^\nu \partial_{x_2} u_1^\nu + \partial_{x_1} p^\nu = 0, \quad (91)$$

$$\partial_t u_2^\nu - \nu \Delta u_2^\nu + u_1^\nu \partial_{x_1} u_2^\nu + u_2^\nu \partial_{x_2} u_2^\nu + \partial_{x_2} p^\nu = 0, \quad (92)$$

$$\partial_{x_1} u_1^\nu + \partial_{x_2} u_2^\nu = 0, \quad (93)$$

$$u_1^\nu(x_1, 0, t) = u_2^\nu(x_1, 0, t) = 0 \quad \text{при } x_1 \in \mathbb{R}, \quad (94)$$

и предположим, что внутри области (отделенно от границы) векторное поле $u^\nu(x_1, x_2, t)$ сходится к решению $u_{\text{int}}(x_1, x_2, t)$ уравнений Эйлера с теми же начальными данными. Тангенциальная составляющая этого решения на границе $x_2 = 0$ и давление обозначаются через

$$U(x_1, t) = u_1^{\text{int}}(x_1, 0, t), \quad \tilde{P}(x_1, t) = p(x_1, 0, t).$$

Введем масштабный параметр $\varepsilon = \sqrt{\nu}$. Учитывая, что нормальная компонента скорости на границе равна нулю, можно применить следующий анзац, который соответствует пограничному слою в параболическом уравнении с частными производными:

$$\begin{pmatrix} u_1^\nu(x_1, x_2) \\ u_2^\nu(x_1, x_2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \tilde{u}_1^\nu(x_1, x_2/\varepsilon) \\ \varepsilon \tilde{u}_2^\nu(x_1, x_2/\varepsilon) \end{pmatrix} + u^{\text{int}}(x_1, x_2). \quad (95)$$

Подставив правую часть (95) в систему Навье–Стокса, обозначив новые переменные (x_1, x_2) через

$$X_1 = x_1, \quad X_2 = \frac{x_2}{\varepsilon}$$

и устремив ε к нулю, получаем формально следующие уравнения:

$$\tilde{u}_1(x_1, 0, t) + U_1(x_1, 0, t) = 0, \quad (96)$$

$$\partial_{x_2} \tilde{p}(x_1, x_2) = 0 \quad \Rightarrow \quad \tilde{p}(x_1, x_2, t) = \tilde{P}(x_1, t), \quad (97)$$

$$\partial_t \tilde{u}_1 - \partial_{x_2}^2 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 \partial_{x_1} \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \partial_{x_2} \tilde{u}_1 = \partial_{x_1} \tilde{P}(x_1, t), \quad (98)$$

$$\partial_{x_1} \tilde{u}_1 + \partial_{x_2} \tilde{u}_2 = 0, \quad \tilde{u}_1(x_1, 0) = \tilde{u}_2(x_1, 0) = 0 \quad \text{при } x_1 \in \mathbb{R}, \quad (99)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \tilde{u}_1(x_1, x_2) = \lim_{x_2 \rightarrow \infty} \tilde{u}_2(x_1, x_2) = 0. \quad (100)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.1. Для подтверждения обоснованности уравнений Прандтля отметим, что формула (95) не противоречит теореме Като 5.1. Точнее, благодаря (95) имеем

$$\nu \int_0^T \int_{\Omega \cap \{d(x, \partial\Omega) \leq c\nu\}} |\nabla u^\nu(x, s)|^2 dx ds \leq C\sqrt{\nu}.$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.2. Следующий пример, построенный в работе Э. Гренье [56], показывает, что разложение Прандтля не может выполняться всегда. В случае, когда решения рассматриваются в области

$$(\mathbb{R}_{x_1}/\mathbb{Z}) \times \mathbb{R}_{x_2}^+,$$

Гренье исходит из решений u_{ref}^ν уравнений Навье–Стокса с нулевым давлением, заданных по формуле

$$\begin{aligned} u_{\text{ref}}^\nu &= (u_{\text{ref}}(t, y/\sqrt{\nu}), 0), \\ \partial_t u_{\text{ref}} - \partial_Y u_{\text{ref}} &= 0, \end{aligned}$$

где $Y = y/\sqrt{\nu}$. Используя подходящую заданную явно функцию u_{ref} , а также некоторые точные результаты о неустойчивости, далее строится решение уравнений Эйлера вида

$$\tilde{u} = u_{\text{ref}} + \delta v + O(\delta^2 e^{2\lambda t}) \quad \text{при} \quad 0 < t < \frac{1}{\lambda \log \delta}.$$

Затем показывается, что вихрь, порождаемый границей для решения уравнений Навье–Стокса (с теми же начальными данными), получается слишком сильным, чтобы допустить сходимость в разложении Прандтля. Тем не менее, можно опять обнаружить, что в этом примере используются решения с бесконечной энергией. Было бы интересно знать, можно ли модифицировать этот пример так, чтобы он принадлежал классу решений с конечной энергией; а затем проанализировать, как модифицированное решение с конечной энергией могло бы нарушить критерий Като, сформулированный в теореме 5.1.

Важно отметить, что математические свойства задачи УП проявляют патологическую ситуацию, которую они призваны смоделировать. Прежде всего, можно доказать следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.1. Пусть $T > 0$ – фиксированный положительный момент времени, и пусть $(U(x, t), P(x, t)) \in C^{2+\alpha}(\mathbb{R}_t \times (\mathbb{R}_{x_1} \times \mathbb{R}_{x_2}^+))$ является гладким решением двумерных уравнений Эйлера, которое удовлетворяет в момент времени $t = 0$ условию согласованности $U_1(x_1, 0, t) = U_2(x_1, 0, t) = 0$ (отметим, что лишь граничное условие $U_2(x_1, 0, t) = 0$ сохраняется в динамике Эйлера). Тогда следующие утверждения эквивалентны:

- i) уравнения Прандтля с начальными данными $\tilde{u}(x, 0) = 0$, граничными условиями $\tilde{u}_1(x_1, 0, t) = U_1(x_1, 0, t)$ в (96) и правой частью в (97), заданной по формуле $\tilde{P}(x_1, t) = P(x_1, 0, t)$, имеют гладкое решение $\tilde{u}(x, t)$ при $0 < t < T$;
- ii) решение $u_\nu(x, t)$ уравнений Навье–Стокса с начальными данными $u_\nu(x, 0) = U(x, 0)$ и с нулевыми условиями на границе $x_1 = 0$ сходится в пространстве $C^{2+\alpha}$ к решению уравнений Эйлера при $\nu \rightarrow 0$.

Тот факт, что утверждения i) и ii) могут нарушаться для некоторого времени t , связан с появлением зоны отчуждения и с возникновением турбулентности. Это можно хорошо проиллюстрировать, анализируя уравнения Прандтля, записанные в следующей упрощенной форме:

$$\partial_t \tilde{u}_1 - \partial_{x_2}^2 \tilde{u}_1 + \tilde{u}_1 \partial_{x_1} \tilde{u}_1 + \tilde{u}_2 \partial_{x_2} \tilde{u}_1 = 0, \quad \partial_{x_1} \tilde{u}_1 + \partial_{x_2} \tilde{u}_2 = 0, \quad (101)$$

$$\tilde{u}_1(x_1, 0) = \tilde{u}_2(x_1, 0) = 0 \quad \text{при} \quad x_1 \in \mathbb{R}, \quad (102)$$

$$\lim_{x_2 \rightarrow \infty} \tilde{u}_1(x_1, x_2) = 0, \quad (103)$$

$$\tilde{u}_1(x_1, x_2, 0) = \tilde{u}_0(x_1, x_2). \quad (104)$$

Регулярность при отсутствии отчуждения соответствует теореме Олейник из [57]. В этой работе доказано, что глобальные гладкие решения приведенной выше системы существуют при условии, что начальный профиль является монотонным, т.е. удовлетворяет условию

$$\tilde{u}(x, 0) = (\tilde{u}_1(x_1, x_2), 0), \quad \partial_{x_2} \tilde{u}_1(x_1, x_2) \neq 0.$$

А с другой стороны, начальные условия со “свойствами зацикливания”, которые приводят к взрыву за конечное время, построены в работах [58] и [59]. Интересная особенность этих примеров заключается в том, что взрыв происходит в основном не на границе, а внутри области.

Отмеченная патология свидетельствует о высокой неустойчивости задачи УП. Это происходит из-за определения $\tilde{u}_2$ с помощью $\tilde{u}_1$ в уравнении

$$\partial_{x_1} \tilde{u}_1 + \partial_{x_2} \tilde{u}_2 = 0.$$

Следовательно, только для аналитических начальных данных (на самом деле, достаточно аналитичности по тангенциальным переменным) можно получить (используя абстрактный вариант теоремы Коши–Кавалевской) локальное существование гладкого решения уравнения Прандтля на конечном интервале времени и сходимости к решению уравнений Эйлера на этом интервале (см. [60]–[62]).

7.2. Задача Кельвина–Гельмгольца. Задача Кельвина–Гельмгольца (КГ) состоит в изучении эволюции решений двумерных уравнений Эйлера

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0 \quad (105)$$

с начальным вихрем $\omega(x, 0)$, который является мерой, сосредоточенной на кривой $\Gamma(0)$.

Такая постановка уже проще, чем в задаче УП, поскольку патология, однажды возникнув, будет концентрироваться на кривой. Кроме того, динамика в этом случае наследует общие свойства двумерной динамики. В частности, она будет подчиняться уравнению

$$\partial_t (\nabla \wedge u) + (u \cdot \nabla) (\nabla \wedge u) = 0,$$

откуда следует сохранение (для гладких решений) плотности вихря. Следовательно, можно гарантировать существование слабого решения, когда начальный вихрь $\omega(x, 0)$ является мерой Радона. Впервые это было доказано в работе [19] в предположении, что начальная мера является знакоопределенной. Позже этот результат был обобщен для ситуаций, когда смены знака являются достаточно простыми (см. [50]). Однако этот замечательный положительный результат был подпорчен примером неединственного решения в работе [21].

Для гладких решений КГ, т.е. таких, что вихрь ω является ограниченной мерой Радона с носителем на кривой $\Sigma_t = \{r(\lambda, t), \lambda \in \mathbb{R}\}$, поле скорости задается при $x \notin \Sigma_t$ по закону Био–Савара

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \int \frac{x - r'}{|x - r'|^2} \omega(r', t) ds' \\ &:= \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \int \frac{x - r(\lambda', t)}{|x - r(\lambda', t)|^2} \omega(r(\lambda', t), t) \frac{\partial s(\lambda', t)}{\partial \lambda'} d\lambda'. \end{aligned} \quad (106)$$

Здесь $r(\lambda, t)$ при $\lambda \in \mathbb{R}$ определяет параметризацию кривой Σ_t , функция $s(\lambda, t) = |r(\lambda, t)|$ обозначает длину соответствующей дуги, а матрица $R_{\frac{\pi}{2}}$ задает поворот на угол $\frac{\pi}{2}$ против часовой стрелки:

$$R_{\frac{\pi}{2}} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Кроме того, когда x стремится к кривой Σ_t , поле скорости u имеет двухсторонние пределы $u_{\pm}$. В силу условия несжимаемости получается свойство непрерывности для нормальной компоненты поля скорости, т.е.

$$u_{-} \cdot \vec{n} = u_{+} \cdot \vec{n}.$$

Здесь и далее $\vec{\tau}$ и $\vec{n}$ обозначают единичные тангенциальные и нормальные векторы кривой Σ_t соответственно. Кроме того, среднее

$$\langle u \rangle = \frac{u_{+} + u_{-}}{2}$$

задается с помощью главного значения сингулярного интеграла в формуле (106):

$$v = \langle u \rangle = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \text{ p. v. } \int \frac{x - r'}{|x - r'|^2} \omega(r', t) ds'. \quad (107)$$

Используя операции с распределениями, можно показать, что пока кривая Σ_t остается гладкой, поле скорости u , определенное выше, являясь слабым решением уравнений Эйлера

$$\partial_t u + \nabla \cdot (u \otimes u) + \nabla p = 0, \quad \nabla \cdot u = 0,$$

эквивалентно плотности вихря ω и кривая Σ_t удовлетворяет связанной системе уравнений

$$\omega_t - \partial_s (\omega (\partial_t r - v) \cdot \vec{\tau}) = 0, \quad (108)$$

$$(r_t - v) \cdot \vec{n} = 0, \quad (109)$$

$$v(r, t) = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \text{ p. v. } \int \frac{r - r'}{|r - r'|^2} \omega(r', t) ds'. \quad (110)$$

Уравнения (108), (109) и (110) не полностью определяют $r(\lambda, t)$. Это связано с возможностью выбора различных параметризаций кривой Σ_t . Предполагая, что $\omega \neq 0$, можно ввести новую параметризацию $\lambda(t, s)$, которая сводит задачу к уравнению

$$\partial_t r(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi} R_{\frac{\pi}{2}} \text{ p. v. } \int \frac{r(\lambda, t) - r(\lambda', t)}{|r(\lambda, t) - r(\lambda', t)|^2} d\lambda', \quad (111)$$

или, введя комплексную переменную $z = r_1 + ir_2$, где $r = (r_1, r_2)$, получить уравнение Биркгофа–Ротта

$$\partial_t \bar{z}(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi i} \text{ p. v. } \int \frac{d\lambda'}{z(\lambda, t) - z(\lambda', t)}. \quad (112)$$

ЗАМЕЧАНИЕ 7.3. Отметим некоторые математические аналогии задачи КГ с задачей УП.

1. Как и в задаче УП, для эволюционного уравнения (112) имеется результат о локальном по времени существовании и единственности в классе аналитических начальных данных. Его можно получить, применяя вариант теоремы Коши–Кавалевской (см. [63].)

2. Как и для УП, здесь можно построить решения, взрывающиеся за конечное время.

3. При численном моделировании и экспериментировании с задачей КГ обнаруживается сингулярное поведение, очень похожее на явления, которые можно наблюдать в задаче с граничными условиями прилипания, когда вязкость стремится к нулю.

Лучший путь понять структуру задачи КГ состоит в использовании инвариантности уравнений Эйлера по времени и по пространственным переменным, а также относительно вращений. При этом следует рассмотреть слабое решение двумерной динамики Эйлера: или на всей плоскости $\mathbb{R}^2$, удовлетворяющее

$$u \in C((-T, T); L^2(\mathbb{R}^2)), \quad T > 0,$$

или с периодическими граничными условиями, удовлетворяющее

$$u \in C((-T, T); L^2((\mathbb{R}/\mathbb{Z})^2)).$$

Пусть в малой окрестности $\mathcal{U}$ точки $(t = 0, z = 0)$ вихрь концентрируется на гладкой кривой в комплексной плоскости и имеет следующий вид:

$$z(\lambda, t) = (\alpha t + \beta(\lambda + \varepsilon f(\lambda, t))), \quad f(0, 0) = \nabla f(0, 0) = 0. \quad (113)$$

Тогда, используя соотношения $\nabla \cdot u = 0$, $\nabla \wedge u = \omega$ и закон Био–Савара, получаем

$$\varepsilon|\beta|^2 \partial_t \bar{f}(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi i} \text{p. v.} \int_{\{z(t, \lambda') \in \mathcal{U}\}} \frac{d\lambda'}{(\lambda - \lambda') \left(1 - \varepsilon \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'}\right)} + E(z(\lambda, t)). \quad (114)$$

Здесь и далее $E(z)$ обозначает “остаточный член”, который аналитичен по z . Теперь воспользуемся разложением

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2\pi} \text{p. v.} \int \frac{d\lambda'}{(\lambda - \lambda') \left(1 - \varepsilon \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'}\right)} d\lambda' \\ &= \frac{\varepsilon}{2\pi} \text{p. v.} \int \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{(\lambda - \lambda')^2} d\lambda' + \sum_{n \geq 2} \frac{\varepsilon^n}{2\pi} \text{p. v.} \int \frac{(f(\lambda, t) - f(\lambda', t))^n}{(\lambda - \lambda')^{(n+1)}} d\lambda' \end{aligned} \quad (115)$$

и применим следующие формулы для преобразования Гильберта:

$$\frac{1}{2\pi} \text{p. v.} \int \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'} d\lambda' = -\frac{i}{2} \text{sgn}(D_\lambda) f, \quad (116)$$

$$\frac{1}{2\pi} \text{p. v.} \int \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{(\lambda - \lambda')^2} d\lambda' = |D_\lambda| f, \quad (117)$$

чтобы вывести из (114) и (115) тот факт, что вещественная и мнимая части функции $f(\lambda, t) = X(\lambda, t) + iY(\lambda, t)$ являются локальными решениями системы

$$\partial_t X = \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| Y + \varepsilon R_1(X, Y) + E_1(X, Y), \quad (118)$$

$$\partial_t Y = \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| X + \varepsilon R_2(X, Y) + E_2(X, Y), \quad (119)$$

или

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 + \frac{1}{4|\beta|^4} \partial_\lambda^2 \right) X = \varepsilon \left(\partial_t R_1(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| R_2(X, Y) \right) \\ + \partial_t E_1(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| E_2(X, Y), \end{aligned} \quad (120)$$

$$\begin{aligned} \left(\partial_t^2 + \frac{1}{4|\beta|^4} \partial_\lambda^2 \right) Y = \varepsilon \left(\partial_t R_2(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| R_1(X, Y) \right) \\ + \partial_t E_2(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| E_1(X, Y). \end{aligned} \quad (121)$$

В (120) и (121) члены

$$\partial_t E_1(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| E_2(X, Y) \quad \text{и} \quad \partial_t E_2(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| E_1(X, Y)$$

являются первыми производными от аналитических функций от (X, Y) , а выражения

$$\partial_t R_1(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| R_2(X, Y) \quad \text{и} \quad \partial_t R_2(X, Y) - \frac{1}{2|\beta|^2} |D_\lambda| R_1(X, Y)$$

являются вторыми производными аналитических функций с малым множителем ε . Следовательно, с точностью до малого возмущения задача КГ ведет себя как эллиптическое уравнение второго порядка с постоянными коэффициентами. Из этого факта получается ряд важных следствий.

1. Этим объясняется, почему задача для рассматриваемого эволюционного уравнения является корректной только на малом промежутке времени и лишь для начальных данных, принадлежащих классу аналитических функций. Данная задача выглядит как решение эллиптического уравнения с условиями Дирихле и Неймана одновременно.

2. Появляется метод построения решения, которое взрывается за конечное время.

3. С помощью некоторых соображений регулярности объясняется очень сильное сингулярное поведение решений после первого разрушения его регулярности.

Обсудим эти три обстоятельства более подробно.

7.2.1. Локальность решения. Когда кривая Σ_t является графиком некоторой функции $y = y(x, t)$, уравнения (108)–(110) приобретают вид

$$y_t + y_x v_1 = v_2, \quad \partial_t \omega + \partial_x (v_1 \omega) = 0, \quad (122)$$

$$v_1(t, x) = -\frac{1}{2\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{y(x, t) - y(x', t) \omega(x', t)}{(x - x')^2 + (y(x, t) - y(x', t))^2} dx', \quad (123)$$

$$v_2(t, x) = \frac{1}{2\pi} \text{p. v.} \int_{\mathbb{R}} \frac{(x - x') \omega(x', t)}{(x - x')^2 + (y(x, t) - y(x', t))^2} dx', \quad (124)$$

где $(v_1, v_2) = v$ – среднее скорости, заданное по формуле (107). Следовательно, приведенные выше уравнения содержат две неизвестные функции: $y(x, t)$ и $\omega(x, t)$, как и в случае уравнения Биркгофа–Ротта (112), где имеются две неизвестные компоненты $r(s, t) = (x(s, t), y(s, t))$ или, в комплексной записи,

$z(s, t) = x(s, t) + iy(s, t)$. На самом деле, поскольку уравнение Биркгофа–Ротта было выведено с помощью выбора плотности вихря в качестве параметра, сам вихрь получается по формуле

$$\omega(s, t) = \frac{1}{|\partial_s z(s, t)|}.$$

В силу того, что система является локальным возмущением некоторого эллиптического уравнения, наложение двух ограничений при $t = 0$ подобно решению эллиптического уравнения одновременно с граничными условиями Дирихле и Неймана. Известно, что при отсутствии жесткой совместимости условий (это связано с так называемым оператором Дирихле–Неймана) такая задача может быть решена только локально и с аналитическими начальными данными. По этой причине решение системы (122)–(124) строится локально по времени при условии, что функции $y(x, 0)$ и $\omega(x, 0)$ являются аналитическими.

7.2.2. Особенности. Для построения решений с особенностями используется похожая идея и, кроме того, делается обращение времени для двумерного уравнений Эйлера. Точнее, если необходимо построить решения, которые являются сингулярными в момент $t = 0$ и регулярными на интервале $(0, T]$, то, сделав замену переменной времени t на $T - t$, достаточно построить гладкое решение на интервале $[0, T)$, которое взрывается в момент времени $t = T$. Первый результат в этом направлении был получен в [64]; начальные условия для вихря в момент $t = 0$ опускаются, и предполагается, что решение $y(x, t)$ стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Тогда можно рассмотреть систему (122)–(124) как краевую задачу Дирихле с заданной функцией $y(x, t)$ при $t = 0$ и с условием ее стремления к нулю при $t \rightarrow \infty$. С помощью метода возмущений доказывается следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.2. *Существует число $\varepsilon > 0$ такое, что для любого начального условия, удовлетворяющего оценке*

$$y(x, 0) = \int e^{ix\xi} g(\xi) d\xi, \quad \text{причем} \quad \int |g(\xi)| d\xi \leq \varepsilon, \quad (125)$$

задача (122)–(124) имеет и притом единственное решение, которое стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Кроме того, это решение является аналитическим (относительно (x, t)) при всех $t > 0$.

Как уже отмечалось выше, этот результат относится к возникновению особенности. Он дает (с заменой времени t на $T - t$) примеры решений, которые являются аналитическими некоторое время, но которые становятся менее регулярными, чем это допускается уравнением (125). На самом деле, в численных экспериментах из работ [65] и [66] было обнаружено, что первое разрушение регулярности возникает в виде острия на кривой $r(\lambda, t)$. Это дало мотивацию в работе Р. Кафлиша и О. Орелланы [22] ввести функцию

$$f_0(\lambda, t) = (1 - i) \left\{ (1 - e^{-\frac{i}{2} - i\lambda})^{1+\sigma} - (1 - e^{-\frac{i}{2} + i\lambda})^{1+\sigma} \right\} \quad (126)$$

со следующими свойствами:

- i) для любого $t > 0$ отображение $\lambda \mapsto f(\lambda, t)$ является аналитическим;
- ii) при $t = 0$ отображение $\lambda \mapsto f(0, \lambda)$ не принадлежит пространству Гёльдера $C^{1+\sigma}$, но оно принадлежит каждому пространству $C^{1+\sigma'}$ при $0 < \sigma' < \sigma$;
- iii) функция

$$z_0(\lambda, t) = \lambda + \varepsilon f_0(\lambda, t)$$

является решением линеаризованного уравнения Биркгофа–Ротта, точнее, имеет место равенство

$$\partial_t \overline{f(\lambda, t)} = \frac{1}{2\pi} \text{p. v.} \int \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{(\lambda - \lambda')^2} d\lambda'. \quad (127)$$

Следовательно, используя эллиптичность этого линейного оператора, можно доказать методом возмущений следующее утверждение.

УТВЕРЖДЕНИЕ 7.3. *Для достаточно малого $\varepsilon > 0$ существует функция $r_\varepsilon(\lambda, t)$ со следующими свойствами:*

- i) *функция $\lambda \mapsto r_\varepsilon(\lambda, t)$ является аналитической при $t > 0$;*
- ii) *функция $\lambda + \varepsilon(f_0(\lambda, t) + r_\varepsilon(\lambda, t))$ является решением уравнения Биркгофа–Ротта (112);*
- iii) *функция $\lambda \mapsto r_\varepsilon(\lambda, t)$ равномерно (по $\lambda \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}_+$) ограничена в C^2 .*

В качестве следствия из утверждения 7.3 (с обращением времени) можно установить существование аналитических решений уравнения Биркгофа–Ротта (112), скажем, на интервале $0 \leq t < T$, таких, что в момент времени $t = T$ отображение $\lambda \mapsto z(\lambda, t)$ не принадлежит классу $C^{1+\sigma}$ в точке $\lambda = 0$.

7.2.3. Аналитичность и патологическое поведение после разрушения регулярности. Локальное сведение задачи КГ к уравнению

$$\varepsilon|\beta|^2 \partial_t \bar{f}(\lambda, t) = \frac{1}{2\pi i} \text{p. v.} \int_{z(\lambda', t) \in \mathcal{U}} \frac{d\lambda'}{(\lambda - \lambda')(1 - \varepsilon \frac{f(\lambda, t) - f(\lambda', t)}{\lambda - \lambda'})} + E(z(\lambda, t)) \quad (128)$$

очевидно требует *некоторых предположений* о регулярности для функции $z(\lambda, t)$ в окрестности точки $(0, 0)$. Однако если это сведение справедливо, то благодаря эллиптичности решение принадлежит классу C^∞ и даже является аналитическим. Следовательно, возникает некоторый порог (скажем, **T**) в поведении решений КГ. Существование такого *порога регулярности* хорошо известно при изучении задач со свободной границей. Этот порог характеризуется тем фактом, что любая функция, имеющая регулярность сильнее, чем **T**, на самом деле является аналитической и что могут существовать решения, менее регулярные, чем **T**. Из этого свойства выводится следующее важное практическое следствие: регулярность решений, которые являются гладкими при $t < T$ и сингулярными после момента времени $t = T$, нельзя повысить при $t \geq T$ решениями, которые являются более регулярными, чем порог **T**. В противном случае сформулированная выше теорема ведет к противоречию. Этот факт объясняет, почему после разрушения регулярности решение становится очень сингулярным.

Например, в [4] (а также в [67] для локальной версии) было показано, что любое решение, которое в окрестности некоторой точки принадлежит классу $C_t^\sigma(C_\lambda^{1+\sigma})$, обязано быть аналитическим. Как следствие этого, если бы решение, построенное (с заменой времени t на $T - t$) по методу Кафлиша–Орелланы [22], могло быть продолжено после $t = T$, оно не могло бы принадлежать любому пространству Гёльдера $C^{1+\sigma'}$.

Следовательно, сложная (нерешенная) проблема заключается в определении этого порога регулярности, из которого вытекает аналитичность. К настоящему моменту наилучший (насколько известно авторам) результат имеется в работах [5], [6]. Условие $C_{\text{loc}}^\alpha(\mathbb{R}_t; C_{\text{loc}}^{1+\beta}(\mathbb{R}_\lambda))$ заменено на $H_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}_t \times \mathbb{R}_\lambda)$. Оценки получены явно с использованием теорем Г. Давида [42], которые утверждают,

что для любых кривых $\Gamma: s \mapsto \xi(s)$, параметризованных длиной дуги, интегральный оператор Коши

$$C_{\Gamma}(f) = \text{p.v.} \int \frac{f(s')}{\xi(s) - \xi(s')} d\xi(s')$$

ограничен в пространстве $L^2(ds)$.

Важность этого улучшения объяснена численным экспериментом в [68]. Интересно отметить, что эти результаты применимы к логарифмическим спиральям $r = e^{\theta}$, $\theta \in \mathbb{R}$, но не к алгебраическим спиральям бесконечной длины. Обнаружено, что из чашечной сингулярности решение эволюционирует в спираль, которая ведет себя как алгебраическая спираль, и поэтому она имеет бесконечную длину. В работе [69] дано объяснение, почему спираль должна иметь бесконечную длину.

После возникновения первой особенности решение становится сильно нерегулярным. Это приводит к понятию *слабых решений* (решений, которые являются менее регулярными, чем порог $\mathbf{T}$) не для самих уравнений Эйлера, а для уравнения Биркгофа–Ротта. Например, в работах [5], [6] дается следующее определение.

Слабым решением называется функция из $\mathbb{R}$ в $\mathbb{C}$, $\alpha \mapsto z(\alpha, t)$, для которой выполнено соотношение

$$\partial_t \left(\int \bar{z}(\alpha, t) \eta(\alpha) d\alpha \right) = \frac{1}{4\pi i} \iint \frac{\eta(\alpha) - \eta(\beta)}{z(\alpha, t) - z(\beta, t)} d\alpha d\beta$$

для любой $\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Тем не менее, задача в целом остается нерешенной, поскольку отсутствует теорема о существовании такого решения. Более того, по физическим соображениям слабые решения уравнения Биркгофа–Ротта должны давать слабые решения несжимаемых уравнений Эйлера, однако это не всегда так, что проиллюстрировано в примере Прандтля–Мунка (ср. [70]) с начальной вихревой пеленой

$$\omega_0(x_1, x_2) = \frac{x_1}{\sqrt{1 - x_1^2}} (\chi_{(-1,1)}(x_1) \otimes \delta(x_2)), \quad (129)$$

где $\chi_{(-1,1)}$ – характеристическая функция интервала $(-1, 1)$. В силу закона Био–Савара вихрь v постоянен:

$$v = \left(0, -\frac{1}{2} \right). \quad (130)$$

Решение уравнения Биркгофа–Ротта задается формулой

$$x_1(t) = x_1(0), \quad x_2(t) = \frac{t}{2}, \quad \omega(x_1, x_2, t) = \omega_0\left(x_1, x_2 + \frac{t}{2}\right).$$

Но, с другой стороны, в работе [70] замечено, что скорость u , ассоциированная с этим вихрем, не является даже слабым решением уравнений Эйлера. На самом деле, выполнены равенства

$$\nabla \cdot u = 0 \quad \text{и} \quad \partial_t u + \nabla_x \cdot (u \otimes u) + \nabla p = F, \quad (131)$$

где F задается формулой

$$F = \frac{\pi}{8} \left(\delta\left(x_1 + 1, x_2 + \frac{t}{2}\right) - \delta\left(x_1 - 1, x_2 + \frac{t}{2}\right), 0 \right). \quad (132)$$

Это дало основания в [71] предложить более слабое определение, которое допускает большую свободу параметров и может оказаться более приспособленным в такой ситуации.

Первый автор выражает признательность организаторам семинара по математической гидродинамике, который состоялся в Москве в июне 2006 г., за возможность прочитать лекцию по данной теме. Авторы благодарят за теплое гостеприимство институт Вольфганга Паули в Вене и центр Бернулли при Федеральной политехнической школе в Лозанне, где выполнялись части этой работы. Работа частично поддержана грантом NSF № DMS-0504619, грантом BSF № 2004271 и грантом ISF № 120/06.

Список литературы

- [1] S. Montgomery-Smith, “Finite time blow up for a Navier–Stokes like equation”, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **129**:10 (2001), 3025–3029.
- [2] H. Bellout, S. Benachour, E. S. Titi, “Finite-time singularity versus global regularity for hyper-viscous Hamilton–Jacobi-like equations”, *Nonlinearity*, **16**:6 (2003), 1967–1989.
- [3] T. Kato, “Remarks on zero viscosity limit for non stationary Navier–Stokes flows with boundary”, *Seminar on nonlinear partial differential equations* (Berkeley, 1983), Math. Sci. Res. Inst. Publ., **2**, ed. S. S. Chern, Springer, New York, 1984, 85–98.
- [4] G. Lebeau, “Régularité du problème de Kelvin–Helmholtz pour l’équation d’Euler 2d”, *ESAIM Control Optim. Calc. Var.*, **8** (2002), 801–825.
- [5] S. Wu, “Recent progress in mathematical analysis of vortex sheets”, *Proceedings of the international congress of mathematicians. Vol. III. Invited lectures* (Beijing, China, 2002), Higher Ed. Press, Beijing, 2002, 233–242.
- [6] S. Wu, “Mathematical analysis of vortex sheets”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **59**:8 (2006), 1065–1206.
- [7] A. J. Majda, A. L. Bertozzi, *Vorticity and incompressible flow*, Cambridge Texts Appl. Math., **27**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.
- [8] C. Marchioro, M. Pulvirenti, *Mathematical theory of incompressible nonviscous fluids*, Appl. Math. Sci., **96**, Springer-Verlag, New York, 1994.
- [9] L. Lichtenstein, “Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik homogener, unzusammendrückbarer, reibungsloser Flüssigkeiten und die Helmholtzschen Wirbelsätze”, *Math. Z.*, **23**:1 (1925), 89–154; “Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. Zweite Abhandlung. Nichthomogene, unzusammendrückbare, reibungslose Flüssigkeiten”, *Math. Z.*, **26**:1 (1927), 196–323; “Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. III. Permanente Bewegungen einer homogenen, inkompressiblen, zähen Flüssigkeit”, *Math. Z.*, **28** (1928), 387–415; “Über einige Existenzprobleme der Hydrodynamik. IV. Stetigkeitssätze. Eine Begründung der Helmholtz–Kirchhoffschen Theorie geradliniger Wirbelfäden”, *Math. Z.*, **32**:1 (1930), 608–640.
- [10] C. Bardos, S. Benachour, “Domaine d’analyticité des solutions de l’équation d’Euler dans un ouvert de $\mathbb{R}^n$ ”, *Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa Cl. Sci.* (4), **4**:4 (1977), 647–687.
- [11] J. T. Beale, T. Kato, A. Majda, “Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations”, *Comm. Math. Phys.*, **94**:1 (1984), 61–66.
- [12] A. Ferrari, “On the blow-up of solutions of the 3-D Euler equations in a bounded domain”, *Comm. Math. Phys.*, **155**:2 (1993), 277–294.
- [13] H. Kozono, T. Ogawa, Y. Taniuchi, “Navier–Stokes equations in the Besov space near L^∞ and BMO”, *Kyushu J. Math.*, **57**:2 (2003), 303–324.
- [14] Y. Meyer, *Wavelets and operators*, vol. I, Cambridge Stud. Adv. Math., **37**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1992.

- [15] G. Ponce, “Remarks on a paper “Remarks on the breakdown of smooth solutions for the 3-D Euler equations” by J. T. Beale, T. Kato and A. Majda”, *Comm. Math. Phys.*, **98**:3 (1985), 349–353.
- [16] P. Constantin, C. Fefferman, A. Madja, “Geometric constraints on potential singular solutions for the 3-D Euler equation”, *Comm. Partial Differential Equations*, **21**:3–4 (1996), 559–571.
- [17] P. Constantin, “Euler equations, Navier–Stokes equations and turbulence”, *Mathematical foundation of turbulent viscous flows* (Martina Franca, Italy, 2003), Lecture Notes in Math., **1871**, eds. M. Cannone, T. Miyakawa, Springer, Berlin, 2006, 1–43.
- [18] В. И. Юдович, “Нестационарные течения идеальной несжимаемой жидкости”, *ЖВМ и МФ*, **3** (1963), 1032–1066.
- [19] J.-M. Delort, “Existence de nappes de tourbillon en dimension deux”, *J. Amer. Math. Soc.*, **4**:3 (1991), 553–586.
- [20] V. Scheffer, “An inviscid flow with compact support in space-time”, *J. Geom. Anal.*, **3**:4 (1993), 343–401.
- [21] A. Shnirelman, “On the nonuniqueness of weak solution of the Euler equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **50**:12 (1997), 1261–1286.
- [22] R. Caffisch, O. Orellana, “Singular solutions and ill-posedness for the evolution of vortex sheets”, *SIAM J. Math. Anal.*, **20**:2 (1989), 293–307.
- [23] K. Ohkitani, J. D. Gibbon, “Numerical study of singularity formation in a class of Euler and Navier–Stokes flows”, *Phys. Fluids*, **12**:12 (2000), 3181–3194.
- [24] T. Hou, C. Li, *Dynamic stability of the 3D axi-symmetric Navier–Stokes equations with swirl*, [arXiv:math.AP/0608295](https://arxiv.org/abs/math/0608295).
- [25] J. Leray, “Étude de diverses équations intégrales nonlinéaires et de quelques problèmes que pose l’hydrodynamique”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **12** (1933), 1–82.
- [26] J. Leray, “Essai sur les mouvements plans d’une liquide visqueux que limitent des parois”, *J. Math. Pures Appl.* (9), **13** (1934), 331–418.
- [27] J. Leray, “Sur le mouvement d’un liquide visqueux emplissant l’espace”, *Acta Math.*, **63**:1 (1934), 193–248.
- [28] E. Hopf, “Ein allgemeiner Endlichkeitssatz der Hydrodynamik”, *Math. Ann.*, **117**:1 (1941), 764–775.
- [29] E. Hopf, “Über die Anfangswertaufgabe für die hydrodynamischen Grundgleichungen”, *Math. Nachr.*, **4** (1951), 213–231.
- [30] E. Hopf, “On nonlinear partial differential equations”, *Lecture series of the symposium on partial differential equations* (Berkeley, 1955), Univ. Kansas Press, Lawrence, 1957, 1–29.
- [31] О. А. Ладыженская, “Шестая проблема тысячелетия: уравнения Навье–Стокса, существование и гладкость”, *УМН*, **58**:2 (2003), 45–78; англ. пер.: O. A. Ladyzhenskaya, “Sixth problem of the millennium: Navier–Stokes equations, existence and smoothness”, *Russian Math. Surveys*, **58**:2 (2003), 251–286.
- [32] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, “Partial regularity of suitable weak solutions of the Navier–Stokes equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **35**:6 (1982), 771–831.
- [33] B. E. Launder, D. B. Spalding, *Lectures in mathematical models of turbulence*, Academic Press, London–New York, 1972.
- [34] B. Mohammadi, O. Pironneau, *Analysis of the k-epsilon turbulence model*, RAM Res. Appl. Math., Masson, Paris; Wiley, Chichester, 1994.
- [35] S. B. Pope, *Turbulent flows*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2000.
- [36] J. S. Smagorinsky, “General circulation experiments with the primitive equations”, *Monthly Weather Rev.*, **91**:3 (1963), 99–164.
- [37] L. Onsager, “Statistical hydrodynamics”, *Nuovo Cimento*, **6**:2 (suppl.) (1949), 279–287.

- [38] G. L. Eyink, “Energy dissipation without viscosity in ideal hydrodynamics. I. Fourier analysis and local energy transfer”, *Phys. D*, **78**:3–4 (1994), 222–240.
- [39] P. Constantin, W. E, E. S. Titi, “Onsager’s conjecture on the energy conservation for solutions of Euler’s equation”, *Comm. Math. Phys.*, **165**:2 (1994), 207–209.
- [40] P.-L. Lions, *Mathematical topics in fluid mechanics. Vol. 1. Incompressible models*, Oxford Lecture Ser. Math. Appl., **3**, Clarendon Press, Oxford, 1996.
- [41] P. Constantin, C. Foias, *Navier–Stokes equations*, Chicago Lectures in Math., Univ. Chicago Press, Chicago, IL, 1988.
- [42] G. David, “Courbes corde-arc et espaces de Hardy généralisés”, *Ann. Inst. Fourier (Grenoble)*, **32**:3 (1982), 227–239.
- [43] C. Bardos, F. Golse, D. Levermore, “Fluid dynamic limits of kinetic equations. I. Formal derivations”, *J. Statist. Phys.*, **63**:1–2 (1991), 323–344.
- [44] Z. R. DiPerna, P.-L. Lions, “On the Cauchy problem for Boltzmann equations: global existence and weak stability”, *Ann. of Math. (2)*, **130**:2 (1989), 321–366.
- [45] F. Golse, L. Saint-Raymond, “The Navier–Stokes limit of the Boltzmann equation for bounded collision kernels”, *Invent. Math.*, **155**:1 (2004), 81–161.
- [46] L. Saint-Raymond, “Convergence of solutions to the Boltzmann equation in the incompressible Euler limit”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **166**:1 (2003), 47–80.
- [47] C. Cheverry, “Propagation of oscillations in real vanishing viscosity limits”, *Comm. Math. Phys.*, **247**:3 (2004), 655–695.
- [48] C. Bardos, “Existence et unicité de la solution de l’équation d’Euler en dimension deux”, *J. Math. Anal. Appl.*, **40**:3 (1972), 769–790.
- [49] P. Constantin, J. Wu, “The inviscid limit for non-smooth vorticity”, *Indiana Univ. Math. J.*, **45**:1 (1996), 67–81.
- [50] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes, Z. Xin, “Existence of vortex sheets with reflection symmetry in two space dimensions”, *Arch. Ration. Mech. Anal.*, **158**:3 (2001), 235–257.
- [51] P. Gérard, P. Markowich, N. Mauser, F. Poupaud, “Homogenization limits and Wigner transforms”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **50**:4 (1997), 323–379.
- [52] М. И. Вишик, А. В. Фурсиков, *Математические проблемы статистической механики*, Наука, М., 1980; англ. пер.: М. Vishik, A. Fursikov, *Mathematical problems of statistical hydromechanics*, Math. Appl. (Soviet Ser.), **9**, Kluwer, Dordrecht, 1988.
- [53] C. Foias, O. Manely, R. Rosa, R. Temam, *Navier–Stokes equations and turbulence*, Encyclopedia Math. Appl., **83**, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2001.
- [54] C. Foias, “What do the Navier–Stokes equations tell us about turbulence?”, *Harmonic analysis and nonlinear differential equations* (Riverside, CA, USA, 1995), Contemp. Math., **208**, Providence, RI, Amer. Math. Soc., 1997, 151–180.
- [55] U. Frisch, *Turbulence. The legacy of A. N. Kolmogorov*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1995; рус. пер.: У. Фриш, *Турбулентность. Наследие Колмогорова*, Фазис, М., 1998.
- [56] E. Grenier, “On the nonlinear instability of Euler and Prandtl equations”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **53**:9 (2000), 1067–1109.
- [57] О. А. Олейник, “К математической теории пограничного слоя для нестационарного течения несжимаемой жидкости”, *ПММ*, **30**:5 (1966), 801–821; англ. пер.: О. А. Oleinik, “On the mathematical theory of boundary layer for an unsteady flow of incompressible fluid”, *J. Appl. Math. Mech.*, **30**:5 (1966), 951–974.
- [58] W. E, B. Engquist, “Blowup of solutions to the unsteady Prandtl’s equation”, *Comm. Pure Appl. Math.*, **50**:12 (1997), 1287–1293.
- [59] W. E, “Boundary layer theory and the zero-viscosity limit of the Navier–Stokes equation”, *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.)*, **16**:2 (2000), 207–218.

- [60] K. Asano, “Zero-viscosity limit of the incompressible Navier–Stokes equations. II”, *Mathematical analysis of fluid and plasma dynamics*, I (Kyoto, 1986), Sūrikaiseikikenkyūsho Kōkyūroku, **656**, Kyoto Univ., Kyoto, 1988, 105–128.
- [61] R. Caffisch, M. Sammartino, “Navier–Stokes equations on a circular domain: construction of the solution and zero viscosity limit”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.*, **324**:8 (1997), 861–866.
- [62] M. Cannone, M. C. Lombardo, M. Sammartino, “Existence and uniqueness for Prandtl equations”, *C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. I Math.*, **332**:3 (2001), 277–282.
- [63] C. Sulem, P.-L. Sulem, C. Bardos, U. Frisch, “Finite time analyticity for the two and three dimensional Kelvin–Helmholtz instability”, *Comm. Math. Phys.*, **80**:4 (1981), 485–516.
- [64] J. Duchon, R. Robert, “Global vortex sheet solutions of Euler equations in the plane”, *J. Differential Equations*, **73**:2 (1988), 215–224.
- [65] D. W. Moore, “The spontaneous appearance of a singularity in the shape of an evolving vortex sheet”, *Proc. Roy. Soc. London. Ser. A*, **365**:1720 (1979), 105–119.
- [66] D. Meiron, G. Baker, S. Orszag, “Analytic structure of vortex sheet dynamics. I. Kelvin–Helmholtz instability”, *J. Fluid Mech.*, **114** (1982), 283–298.
- [67] V. Kamotski, G. Lebeau, “On 2D Rayleigh–Taylor instabilities”, *Asymptot. Anal.*, **42**:1–2 (2005), 1–27.
- [68] R. Krasny, “Computation of vortex sheet roll-up in Trefftz plane”, *J. Fluid Mech.*, **184** (1987), 123–155.
- [69] S. Wu, “Well-posedness in Sobolev spaces of the full water wave problem in 2-D”, *Invent. Math.*, **130**:1 (1997), 39–72.
- [70] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes, M. O. Souza, “On the equation satisfied by a steady Prandtl–Munk vortex sheet”, *Commun. Math. Sci.*, **1**:1 (2003), 68–73.
- [71] M. C. Lopes Filho, H. J. Nussenzveig Lopes, S. Schochet, *A criterion for the equivalence of the Birkhoff–Rott and Euler description of vortex sheet evolution*, [arXiv:math.AP/0502215](https://arxiv.org/abs/math.AP/0502215).

К. Бардос (C. Bardos)

Université Paris VII – Denis Diderot;
 Université Pierre et Marie Curie, Paris, France
E-mail: bardos@ann.jussieu.fr

Поступила в редакцию
 02.04.2007

Э.С. Тити (E. S. Titi)

University of California, Irvine, USA;
 Weizmann Institute of Science, Rehovot, Israel
E-mail: etiti@math.uci.edu