Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Э. Превиато, В. З. Энольский, Ультраэллиптические солитоны, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 173–174

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6812>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.183.62

26 апреля 2023 г., 16:25:42

Ультраэллиптические солитоны

Э. Превиато, В. З. Энольский

В этом сообщении описывается обобщение “эллиптических солитонов”, т. е. двояко-периодических по первому потоку решений КП-иерархии, названных так Ж.-Л. Вердье [1] и классифицированных И. М. Кричевером [2]. Мы определяем “ультраэллиптические” решения (т. е. периодические на якобиане рода 2). Мы вводим следующий анзац:

$$\mathcal{U}(t_1, \dots, t_g) = 2 \sum_{i=1}^N \wp_{22}(\mathbf{u} - \mathbf{X}_i), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X} = \begin{pmatrix} \mathfrak{I}_i(t_3, \dots, t_g) \\ \mathfrak{X}_i(t_3, \dots, t_g) \end{pmatrix}$$

(при возможном переупорядочении времен t_k), где $\wp_{22}$ – аналог рода 2 для функции Вейерштрасса $\wp$, обобщающий анзац Кричевера. Мы вернемся к рассмотрению “прямой” спектральной задачи, классифицирующей ультраэллиптические солитоны, в одной из последующих публикаций.

ОСНОВНАЯ ТЕОРЕМА. Пусть V_g – алгебраическая кривая рода $g > 2$, и пусть $(U_{1k}, \dots, U_{gk})^T$ – k -й столбец обратной матрицы $2\omega^{-1}$ периодов нормированных голоморфных дифференциалов. g -зонное решение уравнения КП сводится к сумме ультраэллиптических солитонов, если: (i) $V_g \rightarrow V_2$ есть накрытие, (ii) в базисе гомологий, в котором τ -матрица имеет вид $\begin{pmatrix} \tau_2 & Q \\ Q^T & \tau_{g-2} \end{pmatrix}$, где Q – рациональная матрица размера $2 \times (g-2)$, выполняются следующие равенства:

$$U_{31} = \dots = U_{g1} = 0, \quad U_{32} = \dots = U_{g2} = 0.$$

Мы доказываем эту теорему, используя классическую теорию редукции матриц периодов [3] и геометрическую конструкцию подходящим образом нормированного базиса гомологий кривой, см. [4]. Мы используем затем $\wp$ -функции Клейна (определения см. в [5]) гиперэллиптической кривой рода 2, $V_2 \ni (x, y)$: $y^2 = 4x^5 + \sum_{i=0}^3 \lambda_i x^i$, $\lambda_j \in \mathbb{C}$, и разложения σ -функции при $\mathbf{u} = (0, 0)$ (недавно В. М. Бухштабер и Д. В. Лейкин [6] предъявили рекурсивные формулы для коэффициентов разложения, определив операторную алгебру Ли, зануляющую σ -функцию, см. также [7]), где получены алгебро-геометрические решения уравнения КП $\mathcal{U}_{yy} = (\mathcal{U}_t - 6\mathcal{U}_x \mathcal{U}_x - \mathcal{U}_{xx})_x$, определяемые по формуле [8]

$$\mathcal{U}(x, y, t) = -2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \log \theta(U_1 x + U_2 y + U_3 t; \tau) + C.$$

Для демонстрации существования ультраэллиптических солитонов рассмотрим гиперэллиптическую кривую рода три, $V_3 = (x, y)$ [7]:

$$y^2 = \prod_{k=1}^4 (x^2 - a_k^2) \equiv \Lambda_8 x^8 + \Lambda_6 x^6 + \dots + \Lambda_0. \quad (1)$$

Кривая допускает инволюцию $(x, y) \rightarrow (-x, y)$, накрывая при этом гиперэллиптическую кривую рода два $V_2 = (z, w)$ и эллиптическую кривую $V_1 = (Z, W)$, задаваемые уравнениями

$$w^2 = 4z \prod_{k=1}^4 (z - a_k^2), \quad W^2 = 4 \prod_{k=1}^4 (Z - a_k^2).$$

Голоморфные дифференциалы на V_3 сводятся подстановками $x^2 = z$ и $x^2 = Z$ к голоморфным дифференциалам на V_2 и V_1 (заметим, что временами потоков, соответствующих ультраэллиптической функции, являются t_1 и t_3):

$$\frac{dx}{y} = \frac{dz}{w}, \quad \frac{x^2 dx}{y} = \frac{z dz}{w} \quad \text{и} \quad \frac{x dx}{y} = \frac{dZ}{W}.$$

Рассмотрим уравнение

$$\mathfrak{P}_{3,3,3,3} = 6\mathfrak{P}_{3,3}^2 - \frac{1}{2}\Lambda_4\Lambda_8 + \Lambda_8(4\mathfrak{P}_{1,3} - 3\mathfrak{P}_{2,2}) + \Lambda_6\mathfrak{P}_{3,3}, \quad (2)$$

ассоциированное с кривой (1), где символ $\mathfrak{P}_{i,j}$ введен для того, чтобы отличить функцию Клейна $\wp$ кривой (1) от функции Клейна рода 2. Для получения стандартного уравнения КП на функцию $\mathcal{U}(x, y, t)$ следует продифференцировать (2) дважды по u_3 и положить $2\mathfrak{P}_{3,3}(t, y, x) = \mathcal{U}(x, y, t)$ и $\Lambda_0 = 0$.

Введем анзац

$$\mathfrak{P}_{3,3}(t, y, x) = \sum_{i=1}^N \wp_{2,2}(\mathbf{u} - \mathbf{X}_i), \quad \mathbf{u} = \begin{pmatrix} t \\ x \end{pmatrix}, \quad \mathbf{X}_i = \begin{pmatrix} F_i(y) \\ G_i(y) \end{pmatrix}, \quad (3)$$

где функция $\wp_{2,2}$ разрешает КдВ-иерархию, ассоциированную с кривой V_2 . Определим неизвестные функции $F_i(y)$, $G_i(y)$, подставляя (3) в (2) (заметим, что $N = 2$) и полагая $\mathbf{u} \rightarrow \mathbf{X}_i$. Мы используем разложение σ -функции кривой V_2 и получаем уравнение:

$$\begin{aligned} \left(\frac{dF_1(y)}{dy} \right)^2 &= 4\wp_{2,2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) - \frac{4}{3}\Lambda_4, & \frac{d^2G_1(y)}{dy^2} &= -14\wp_{2,2,2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2), \\ \frac{dG_1(y)}{dy} \left(\frac{dG_1(y)}{dy} + 2\frac{dF_1(y)}{dy} \right) &= 0. \end{aligned}$$

Нетривиальные решения этой системы можно получить, положив

$$\frac{dG_k(y)}{dy} + 2\frac{dF_k(y)}{dy} = 0, \quad k = 1, 2, \quad \frac{dF_1(y)}{dy} = -\frac{dF_2(y)}{dy}.$$

Последние равенства приводят к геометрическому условию (выделяющему locus)

$$\wp_{2,2,2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) + 4\wp_{1,2,2}(\mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2) = 0.$$

Мы полагаем, что этот locus совпадает с КдВ-locusом при дальнейших редукциях, но заметим, что, в отличие от случая эллиптических солитонов, двухчастичный locus может оказаться непустым.

Список литературы

- [1] J. L. Verdier, *Algebraic analysis*, Vol. 2, Academic Press, Boston, MA, 1988, 901–910.
 [2] И. М. Кривчер, *Функц. анализ и его прилож.*, **14**:4 (1980), 45–54. [3] H. Poincaré, *Bull. Soc. Math. France*, **12** (1884), 124–143. [4] H. H. Martens, *Curves, Jacobians, and abelian varieties* (Amherst, MA, USA, 1990), Contemp. Math., **136**, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1992, 287–296. [5] V. M. Buchstaber, V. Z. Enolskii, D. V. Leykin, *Solitons, geometry and topology: on the crossroad*, Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2, **179**, eds. V. M. Buchstaber, S. P. Novikov, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1997, 1–33. [6] В. М. Бухштабер, Д. В. Лейкин, *Функц. анализ и его прилож.*, **36**:4 (2002), 18–34. [7] H. F. Baker, *An introduction to the theory of multiply-periodic functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1907. [8] И. М. Кривчер, *Функц. анализ и его прилож.*, **11**:1 (1977), 15–31.

Э. Превиато (E. Previato)

Boston University, USA

E-mail: ep@bu.edu

Представлено И. М. Кривчером

Принято редколлегией

06.04.2007

В. З. Энольский (V. Z. Enol'skii)

Институт магнетизма НАН Украины

E-mail: vze@ma.hw.ac.uk