Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Н. П. Долбилин, Теоремы Минковского о параллелоэдрах и их обобщения, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6813>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 17:27:50

Теоремы Минковского о параллелоэдрах и их обобщения

Н. П. Долбилин

Параллелоэдр определяется как выпуклый d -мерный многогранник, *нормально* (т. е. грань-в-грань) разбивающий евклидово пространство $\mathbf{E}^d$ параллельными копиями. Минковский доказал две фундаментальные теоремы (см. [1], [2]).

ТЕОРЕМА 1 (Минковский). *Если P – d -мерный параллелоэдр, то*

- 1) P *центрально-симметричен;*
- 2) *все гиперграни многогранника P центрально-симметричны;*
- 3) *проекция P вдоль любой его $(d-2)$ -грани на дополнительную 2-плоскость есть либо параллелограмм, либо центрально-симметричный шестиугольник.*

ТЕОРЕМА 2 (Минковский). *Число $f_{d-1}(P)$ гиперграней у d -параллелоэдра P не превышает $2(2^d - 1)$; причем существует параллелоэдр P с $f_{d-1} = 2(2^d - 1)$.*

В заметке уточняются обе теоремы, и показывается, что они верны и в более общем случае, когда разбиение пространства на параллельные друг другу выпуклые многогранники не предполагается нормальным. Пусть T – нормальное разбиение на параллелоэдры и $P, P' \in T$ – такие, что $P \cap P' \neq \emptyset$. Пересечение $P \cap P'$ является гранью F^i некоторой размерности i . Грань F^i , являющуюся пересечением $P \cap P'$ двух параллелоэдров, будем называть *максимальной общей* гранью для P и P' (М.О.Г.). Подчеркнем, что не всякая грань параллелоэдра является М.О.Г. Например, в разбиении плоскости на правильные шестиугольные соты никакая вершина не является М.О.Г. (размерности 0), в то время как все стороны ячейки являются М.О.Г. (размерности 1).

Особо отметим, что для параллелоэдра каждая его гипергрань F^{d-1} является пересечением двух и только двух параллелоэдров и поэтому является М.О.Г.

Примеры параллелоэдров и их максимальных общих граней.

1. *Параллелепипед.* Все i -грани, $0 \leq i \leq d-1$, – максимальные общие.
2. *Примитивный d -параллелоэдр* – это, по определению, такой параллелоэдр, что в каждой вершине соответствующего разбиения сходится минимально возможное число (а именно $d+1$) параллелоэдров. Легко видеть, что примитивный параллелоэдр является простым многогранником. Поэтому каждый параллелоэдр P' , имеющий с P непустое пересечение, имеет с P *общую* гипергрань. В примитивном параллелоэдре никакая грань размерности меньше $d-1$ не является максимальной общей.

Из центральной симметричности параллелоэдра (теорема 1, п. 1)) легко следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. *Каждая максимальная общая грань F параллелоэдра является центрально-симметричной гранью; центр симметрии грани F является центром симметрии разбиения. Обратное, любой центр симметрии разбиения является центром симметрии некоторой М.О.Г. параллелоэдра разбиения.*

Так как любая гипергрань является максимальной общей, то утверждение 1 является усилением п. 2) теоремы 1 Минковского. Из утверждения 1 следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. *В разбиении для каждой максимальной общей грани F параллелоэдра P существует лишь один параллелоэдр P' такой, что $F = P \cap P'$.*

Параллелоэдры, сходящиеся в грани F , образуют *звезду* $\text{St}(F)$ грани F .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. *Для максимальной общей грани F звезда $\text{St}(F)$ центрально симметрична. Более того, для любого параллелоэдра $P \in \text{St}(F)$ имеется один и только один параллелоэдр $P' \in \text{St}(F)$ такой, что $P \cap P' = F$.*

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. *Если F – не максимальная общая грань, то для параллелоэдров P и $P' \in \text{St}(F)$ грань F является подгранью их общей грани: $F \subset P \cap P'$.*

Валентностью $n(F)$ грани F параллеледра назовем число параллеледров в $\text{St}(F)$. Напомним, что i -грань F^i , где $0 \leq i \leq d-2$, называется *примитивной*, если ее валентность минимальна: $n(F^i) = d+1-i$. Нетрудно вывести, что если грань F^i примитивна, то примитивна и любая ее надгрань F^j , $F^i \supset F^j$, $j > i$. В частности, в примитивном параллеледре грани всех размерностей примитивны. Примитивность $(d-2)$ -грани означает, что $n(F^{d-2}) = 3$. Из утверждений 3 и 4 немедленно следует

УТВЕРЖДЕНИЕ 5. Валентность любой $(d-2)$ -грани F^{d-2} параллеледра либо 3, либо 4. Если $n(F^{d-2}) = 4$, то $F^{d-2} - \text{М.О.Г.}$

Из утверждения 5 вытекает свойство 3) теоремы 1 Минковского.

ГИПОТЕЗА. Пусть $F^k - \text{М.О.Г.}$, тогда общее число всех граней всех размерностей в $\text{St}(F^k)$ в точности равно 3^{d-k} .

Гипотеза верна для $k = d-2$ (утверждение 5) и для $k = d-3$.

Индексом грани F назовем число $\nu(F) := 1/n(F)$. Обозначим через $\mathcal{M}$ множество всех М.О.Г. в параллеледре P .

ТЕОРЕМА. Для параллеледра выполнено равенство

$$\sum_{F \in \mathcal{M}} \nu(F) = 2^d - 1. \quad (1)$$

ИДЕЯ ДОКАЗАТЕЛЬСТВА. Пусть Λ – целочисленная решетка центров параллеледров. Λ распадается в 2^d классов: $\Lambda := \Lambda_0 \cup \Lambda_1 \cup \dots \cup \Lambda_{2^d-1}$. Здесь Λ_0 состоит из точек $\lambda \in \Lambda$, у которых все координаты в базисе решетки четные. Каждому 0/1-вектору $\mu_i = (m_1^i, \dots, m_d^i) \in \Lambda$, соответствует класс $\Lambda_i = \{\lambda \in \Lambda \mid \lambda \equiv \mu_i \pmod{2}\} = \Lambda_0 + \mu_i$. Множество середин всех отрезков с концами в точках решетки Λ образует решетку $\Gamma = \frac{1}{2}\Lambda$. Фактор Γ/Λ состоит из 2^d классов: $\Gamma/\Lambda = \{\Gamma_i \mid i = 0, 1, \dots, 2^d-1\}$, где $\Gamma_i = \Lambda_0 + \frac{1}{2}\mu_i$. Поэтому для γ_i и $\gamma'_i \in \Gamma_i$ имеем $\gamma_i - \gamma'_i \in \Lambda$, $\Gamma_0 = \Lambda$.

Пусть $\gamma \in \Gamma$ и s_γ – симметрия относительно γ , переводящая центр $O \in P_O$ в центр $O' \in P_{O'}$. Тогда $P_O s_\gamma = P_{O'}$. Ясно, что $P_O \cap \Lambda = \text{Int}(P_O) \cap \Gamma = \{O\}$. Действительно, $\partial P_O \cap \Gamma_i \neq \emptyset$ для любого $i \neq 0$, где ∂P_O – граница P_O . Пусть точка $\gamma_i \in \partial P_O$ принадлежит также еще $n_i - 1$ параллеледрам $P_{O_1}, \dots, P_{O_{n_i-1}}$. Тогда $\Gamma_i \cap \partial P_O = \{\gamma_i, \gamma_i + \vec{O_1 O}, \dots, \gamma_i + \vec{O_{n_i-1} O}\}$. Следовательно, каждый класс Γ_i имеет на границе ∂P_O в точности n_i представителей. С другой стороны, каждой точке из $(\Gamma \setminus \Lambda) \cap \partial P_O$ соответствует М.О.Г. F некоторой размерности, причем ее индекс $n(F)$ равен n_i . Обратно, каждой М.О.Г. $F \subset \partial P$ соответствует точка λ_i с $n_i = n(F)$. Поэтому в сумме (1) каждое слагаемое $1/n(F)$ соответствует одному и только одному классу Γ_i , $1 \leq i \leq 2^d - 1$, откуда следует (1).

Так как индекс гиперграни равен $1/2$, то из (1) следует, что количество гиперграней не превышает $2(2^d - 1)$. Более того, $f_{d-1} = 2(2^d - 1)$ тогда и только тогда, когда у параллеледра других М.О.Г. кроме гиперграней нет.

Теорема 1 Минковского верна для выпуклых многогранников, которые разбивают пространство параллельными копиями не обязательно нормально. Действительно, так как многогранники параллельны друг другу, то каждая гипергрань многогранника P должна иметь себе параллельную гипергрань. Доказывается, что параллельные гиперграни имеют одинаковый $(d-1)$ -объем. Поэтому многогранник центрально симметричен. Пункт 1) теоремы 1 установлен. Доказательство п. 2) опирается на то, что если выпуклый многогранник является объединением попарно неперекрывающихся центрально симметричных многогранников, то он сам центрально-симметричен.

Список литературы

- [1] H. Minkowski, *Nachr. Ges. Wiss. Göttingen*, 1897, 198–219. [2] А. Д. Александров, *Выпуклые многогранники*, Гостехиздат, М.–Л., 1950.

Н. П. Долбилин (N. P. Dolbilen)
Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: dolbilen@mi.ras.ru

Представлено В. М. Бухштабером
Принято редколлегией
06.04.2007