Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. А. Тайманов, С. П. Царев, Двумерные операторы Шрёдингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным L_2 -ядром, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 217–218

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6817>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 35.173.137.237

26 апреля 2023 г., 15:06:27

Двумерные операторы Шрёдингера с быстро убывающим рациональным потенциалом и многомерным L_2 -ядром

И. А. Тайманов, С. П. Царёв

В этой заметке мы указываем, как с помощью преобразования Мутара построить явные примеры двумерных операторов Шрёдингера $L = -\Delta + u(x, y)$ с быстро убывающим потенциалом и многомерным ядром, содержащим гладкие квадратично суммируемые функции. В указанных ниже явных примерах потенциал $u(x, y)$ и квадратично суммируемые решения $\psi(x, y)$ уравнения $L\psi = 0$ являются гладкими рациональными функциями от x и y . В наилучшем указанном случае потенциал u и собственные функции ψ убывают как $1/r^8$ и $1/r^3$ соответственно, где $r^2 = x^2 + y^2$. Построенные потенциалы являются точно решаемыми на нулевом уровне энергии в том смысле, что все решения уравнения $L\psi = 0$ строятся по гармоническим функциям и построение сводится к квадратурам.

Для операторов с потенциалами, убывающими настолько быстро, существует хорошая спектральная теория [1], [2]. В одномерном случае существование квадратично суммируемых собственных функций на нулевом уровне энергии невозможно. Обратная спектральная задача для многомерных операторов Шрёдингера на фиксированном уровне энергии была впервые поставлена в [3], где рассматривались двойкопериодические потенциалы. В случае быстро убывающих потенциалов она исследовалась в основном для уровней энергии, которые либо положительны [4], либо лежат ниже основного состояния [5].

Преобразование Мутара сопоставляет двумерному оператору Шрёдингера

$$L = -\Delta + u = -\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) + u(x, y)$$

оператор Шрёдингера $\tilde{L}$ с потенциалом $\tilde{u}$: $\tilde{L} = -\Delta + \tilde{u} = -\Delta + (u - 2\Delta \log \omega)$, где ω – некоторое решение уравнения $L\omega = 0$, что влечет равенство $\tilde{u} = 2(\omega_x^2 + \omega_y^2)/\omega^2 - u$. По каждому решению φ уравнения $L\varphi = 0$ строится решение $\tilde{\varphi}$ уравнения $\tilde{L}\tilde{\varphi} = 0$: $(\omega\tilde{\varphi})_x = -\omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_y$, $(\omega\tilde{\varphi})_y = \omega^2\left(\frac{\varphi}{\omega}\right)_x$. Построение $\tilde{\varphi}$ по φ сводится к квадратурам и функция $\tilde{\varphi}$ однозначно определена по модулю слагаемых вида $C\omega^{-1}$, где $C = \text{const}$. Учитывая эту неоднозначность, мы для удобства обозначим преобразование Мутара через M_ω : $\tilde{u} = M_\omega(u)$, $\tilde{\varphi} = M_\omega(\varphi)$. Отметим также, что $\tilde{L}\omega^{-1} = 0$.

В случае, когда потенциал u зависит только от x : $u = u(x)$, и $\omega(x, y) = f(x)e^{ky}$, мы имеем $L = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + A^\top A + k^2$, где $A = -\frac{\partial}{\partial x} + \frac{f_x}{f}$, $A^\top = \frac{\partial}{\partial x} + \frac{f_x}{f}$, и преобразование Мутара сводится к преобразованию Дарбу одномерного оператора $L' = -\frac{\partial^2}{\partial x^2} + (u + k^2)$, а именно $L \rightarrow \tilde{L} = -\frac{\partial^2}{\partial y^2} + AA^\top + k^2$. Итерации преобразования Дарбу, начинающиеся с потенциала $u_0 = 0$ и $f(x) = x$, дают все точно решаемые рациональные одномерные потенциалы [6]. Все эти потенциалы сингулярны.

Общая схема построения. Рассмотрим преобразования Мутара оператора Шрёдингера с потенциалом u_0 , отвечающие функциям ω_1 и ω_2 , и обозначим соответствующие потенциалы через u_1 и u_2 . Функции вида $M_{\omega_1}(\omega_2)$ определены с точностью до слагаемых вида C/ω_1 и удовлетворяют уравнению $(-\Delta + u_1)\psi = 0$. Аналогичное верно для функций вида $M_{\omega_2}(\omega_1)$. Зафиксируем некоторую функцию θ_1 из класса $M_{\omega_1}(\omega_2)$

Работа выполнена при поддержке РФФИ (гранты 06-01-00094а, 06-01-00814а), комплексного интеграционного проекта 2.15 СО РАН, Института Макса Планка по математике (И.А.Т.) и DFG Research Unit 565 “Polyhedral Surfaces” (TU-Berlin, С.П.Ц.).

и в качестве представителя класса $M_{\omega_2}(\omega_1)$ возьмем функцию $\theta_2 = -(\omega_1/\omega_2)\theta_1$. Применим теперь к оператору $(-\Delta + u_1)$ преобразование Мутара, отвечающее функции θ_1 , а к оператору $(-\Delta + u_2)$ – преобразование Мутара, отвечающее функции θ_2 . Имеет место известная лемма.

ЛЕММА 1. $M_{\theta_1}(u_1) = M_{\theta_2}(u_2) = u$, а функции $\psi_1 = 1/\theta_1$ и $\psi_2 = 1/\theta_2$ удовлетворяют уравнению $L\psi = 0$, где $L = -\Delta + u$.

В этой конструкции есть свободный параметр, связанный с выбором функции θ_1 из класса $M_{\omega_1}(\omega_2)$. Он в ряде случаев позволяет контролировать несингулярность потенциала u и функций ψ_1 и ψ_2 .

ПРИМЕР 1. Пусть $u_0 = 0$, $\omega_1 = x + 2(x^2 - y^2) + xy$ и $\omega_2 = x + y + \frac{3}{2}(x^2 - y^2) + 5xy$. При некотором выборе θ_1 (мы опускаем явную формулу вследствие ее громоздкости) мы получаем

$$u = -\frac{5120(1 + 8x + 2y + 17x^2 + 17y^2)}{(160 + 4x^2 + 4y^2 + 16x^3 + 4x^2y + 16xy^2 + 4y^3 + 17(x^2 + y^2)^2)^2}, \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \psi_1 &= \frac{x + 2x^2 + xy - 2y^2}{160 + 4x^2 + 4y^2 + 16x^3 + 4x^2y + 16xy^2 + 4y^3 + 17(x^2 + y^2)^2}, \\ \psi_2 &= \frac{2x + 2y + 3x^2 + 10xy - 3y^2}{160 + 4x^2 + 4y^2 + 16x^3 + 4x^2y + 16xy^2 + 4y^3 + 17(x^2 + y^2)^2}. \end{aligned} \quad (2)$$

ТЕОРЕМА 1. Потенциал u вида (1) является гладким, рациональным и убывает как $1/r^6$ при $r \rightarrow \infty$.

Функции ψ_1 и ψ_2 вида (2) – гладкие, рациональные, убывают как $1/r^2$ при $r \rightarrow \infty$ и порождают двумерное подпространство в ядре оператора $L = -\Delta + u: L_2(\mathbb{R}^2) \rightarrow L_2(\mathbb{R}^2)$.

ПРИМЕР 2. Пусть $u_0 = 0$, $\omega_1 = x + \frac{x^2 - y^2 - 3xy}{5} + 2(-x^3 - 3x^2y + 3xy^2 + y^3)$ и $\omega_2 = x + y + \frac{x^2 - y^2}{2} - \frac{xy}{5} - 4(3x^2y - y^3)$. При хорошем выборе θ_1 мы получаем гладкий рациональный потенциал u , убывающий как $1/r^8$, и гладкие рациональные функции ψ_1 и ψ_2 , лежащие в L_2 -ядре оператора Шрёдингера с потенциалом u и убывающие как $1/r^3$. Мы опускаем явные формулы вследствие их громоздкости.

По-видимому, увеличивая степень затравочных гармонических полиномов ω_1 и ω_2 , мы для любого $N > 0$ можем получить потенциалы u и собственные функции ψ_1 и ψ_2 , убывающие быстрее, чем $1/r^N$.

Авторы благодарят П. Г. Гриневича и С. П. Новикова за полезные обсуждения.

Список литературы

- [1] Л. Д. Фаддеев, “Обратная задача квантовой теории рассеяния”, Итоги науки и техники. Современ. проблемы матем., **3**, ВИНТИ, М., 1974, 93–180. [2] Р. Г. Новиков, Г. М. Хенкин, УМН, **42:3** (1987), 93–152. [3] Б. А. Дубровин, И. М. Кричевер, С. П. Новиков, Докл. АН СССР, **229:1** (1976), 15–19. [4] П. Г. Гриневич, С. В. Манаков, Функци. анализ и его прилож., **20:2** (1986), 14–24. [5] П. Г. Гриневич, С. П. Новиков, Функци. анализ и его прилож., **22:1** (1988), 23–33. [6] Н. Airault, Н. Р. McKean, J. Moser, Comm. Pure Appl. Math., **30:1** (1977), 95–148.

И. А. Тайманов (I. A. Taimanov)
Институт математики СО РАН, Новосибирск
E-mail: taimanov@math.nsc.ru

Представлено С. П. Новиковым
Принято редколлегией
20.04.2007

С. П. Царёв (S. P. Tsarev)
Institut für Mathematik, Technische Universität Berlin, Germany;
Красноярский государственный педагогический университет
E-mail: sptsarev@mail.ru