Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. А. Дремов, Об одном p -адическом множестве Жюлиа, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 151–152

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm682>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.82.47.9

26 апреля 2023 г., 14:17:34

ОБ ОДНОМ p -АДИЧЕСКОМ МНОЖЕСТВЕ ЖЮЛИА

В. А. ДРЕМОВ

В последнее время интенсивно исследуются неархимедовы динамические системы; см., например, [1]. В данной работе исследуется класс динамических систем вида $x \mapsto x^2 - \frac{a^2}{p^2}$ на множестве p -адических чисел. Рассматривается структура множества Жюлиа, определенного для этих систем по аналогии с классическим случаем, и описывается действие на нем нашего отображения, которое сводится к символической динамике. При этом доказывается, что все периодические точки лежат в основном поле.

1. ОПРЕДЕЛЕНИЯ.

p -адические числа. Зафиксируем нечетное простое p .

$\mathbb{Q}_p$ – поле p -адических чисел, $\mathbb{Z}_p$ – кольцо p -адических чисел. См. [2].

Если $x \in \mathbb{Q}_p$, то $v(x) = k$, где $x = p^k r$, $k \in \mathbb{Z}$, $r \in \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$.

$a \equiv b \pmod{p^k}$ означает, что $a - b \in p^k \mathbb{Z}_p$.

Рассматривается $\mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) = \mathbb{Q}_p \sqcup \{\infty\}$ с соответствующей топологией.

Специальные обозначения.

$T: \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p) \rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{Q}_p)$ есть квадратичное отображение $x \mapsto x^2 - \frac{a^2}{p^2}$, где $v(a) = 0$.

$x_i := T^i(x_0)$ для $i \geq 1$.

J := множество Жюлиа – минимальное инвариантное относительно как T , так и T^{-1} замкнутое множество, состоящее не менее чем из двух точек. (См. [3] по поводу равносильности с другими определениями.)

$K := \{x \mid x_n \not\rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty\}$ (отображение T выбрано так, что это множество невелико и совпадает с множеством Жюлиа).

2. ТЕОРЕМА. а) $J = K$.

б) J является замыканием множества конечных периодических точек отображения T .

3. ЛЕММА 3.1. $\forall x_0 (v(x_0) \neq -1 \Rightarrow x_n \rightarrow \infty \text{ при } n \rightarrow \infty)$.

Следствие 3.2. $\forall x_0 (x_n \not\rightarrow \infty \Rightarrow \forall k \in \mathbb{N}_0 (x_k \pm \frac{a}{p} \in \mathbb{Z}_p))$.

Для доказательства используем тот факт, что $v(x_k) = v(x_{k+1}) = -1$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ-ОБОЗНАЧЕНИЕ 3.3. Используя результат следствия 3.2, получаем

$\exists! \phi: K \rightarrow \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ такое, что $x_n - \frac{a}{p}(\phi(x)_n) \in \mathbb{Z}_p$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.4. Отображение $\phi: K \rightarrow \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ является гомеоморфизмом. (Соответствующее пространство Σ_2^+ вместе с отображением левого сдвига на нем определяется в [4]; см. также утверждение 3.5).

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Рассматриваем следующую систему

$$\{x_0 - a_0 \in \mathbb{Z}_p \ \& \ x_1 - a_1 \in \mathbb{Z}_p \ \& \ \dots \ \& \ x_s - a_s \in \mathbb{Z}_p\}. \quad (1)$$

Здесь $a_0, a_1, \dots, a_s \in \{-\frac{a}{p}, \frac{a}{p}\}$.

Индукцией по k доказывается, что все решения этой системы с $s = k$ образуют множество вида $y(k) + p^k \mathbb{Z}_p$, где $y(k) \in p^{-1} \mathbb{Z}_p$.

Теперь заметим, что уравнение $\phi(x_0) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$ равносильно тому, что система вида (1) выполняется для всех s при $a_n = \frac{a}{p} \varepsilon_n$. Значит, предел $\lim_{k \rightarrow \infty} y(k)$ не только существует, но и является единственным решением уравнения $\phi(x_0) = (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots)$. Отсюда мы получаем биективность. Непрерывность ϕ и ϕ^{-1} тоже следует из утверждения, доказанного по индукции.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.5. *Отображение $\phi: K \rightarrow \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ удовлетворяет соотношению $\phi T(x) = L\phi(x)$ для $x \in K$, где L – отображение левого сдвига, $L: (\varepsilon_0, \varepsilon_1, \dots, \varepsilon_k, \dots) \mapsto (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_{k+1}, \dots)$.*

Утверждение следует из биективности ϕ (утверждение 3.4) с учетом определения 3.3.

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.6. *Все конечные периодические точки отображения ϕ лежат в K .*

Для доказательства пользуемся утверждением 3.5 и тем, что количество конечных неподвижных точек K для T^n не более 2^n .

УТВЕРЖДЕНИЕ 3.7. *K совпадает с замыканием множества конечных периодических точек отображения T .*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Заметим, что K – замкнуто, как пересечение замкнутых множеств вида $x + p^k \mathbb{Z}_p$ (см. доказательство утверждения 3.4). А всюду плотность в K множества периодических точек отображения T следует из всюду плотности множества периодических последовательностей во множестве $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей.

Вопрос о совпадении множества Жюлиа и замыкания множества отталкивающих точек отображения рассматривался в [3]. Там сформулирована гипотеза о том, что для любого рационального отображения эти множества равны. Рассмотрены также примеры, свидетельствующие в пользу этой гипотезы.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ. Сначала докажем утверждение а).

K – инвариантно относительно T и T^{-1} . Замкнутость K следует из утверждения 3.7. Чтобы доказать минимальность, достаточно рассматривать ограничение T на K . Воспользуемся утверждением 3.5. Получим, что мы можем рассматривать только замкнутые инвариантные подмножества Y в $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ относительно действия L . Тогда, очевидно, $\forall y \in Y \forall k \in \mathbb{N}$, $\forall (a_0, a_1, \dots, a_k) \in \{-1, 1\}^{k+1} (Y \ni (a_0, a_1, \dots, a_k, y_0, y_1, y_2, \dots))$. И тогда из замкнутости Y следует, что $Y = \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$.

Теперь утверждение б) следует из утверждения 3.7.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. Yu. Khrennikov. Non-Archimedean Analysis: Quantum Paradoxes, Dynamical Systems and Biological Models. Dordrecht: Kluwer, 1997. [2] Н. Коблиц. p -адические числа, p -адический анализ и дзета-функции. М.: Мир, 1982. [3] Liang-Chung Hsia // J. London Math. Soc. (2). 2000. V. 62. № 3. P. 685–700. [4] Р. Боуэн. Методы символической динамики. М.: Мир, 1979.

Принято редколлегией
23.09.2003