Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Ю. Т. Лисица, О (ко)гомологически локально связных пространствах, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 153–154

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm683>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 13:39:09

О (КО)ГОМОЛОГИЧЕСКИ ЛОКАЛЬНО СВЯЗНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Ю. Т. Лисица

Автором в [1] были введены сильные пограничные гомологические группы $\overline{H}_m^{br}(X; G) = \lim_{\rightarrow \mu} \overline{H}_m(X, K^\mu; G)$ и сильные пограничные когомологические группы $\overline{H}_{br}^m(X; G) = H^m(\operatorname{holim}_{\leftarrow \mu} C^*(X, K^\mu; G))$ вполне регулярного топологического пространства X с коэффициентами в абелевой группе G . Здесь $K^\mu \subseteq X$, $\mu \in M$, — все компактные подмножества в X , упорядоченные по вложению, $\overline{H}_m(X, K^\mu; G) \stackrel{\text{def}}{=} H_m(\operatorname{holim}_{\leftarrow \lambda} C_*(\underline{X}, \underline{K}^\mu; G))$ — сильные относительные гомологические группы (определенные с помощью ANR -резольвции Мардешича $\underline{p} = (p_\lambda): (X, K^\mu) \rightarrow (\underline{X}, \underline{K}^\mu) = ((X_\lambda, K_\lambda^\mu), p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$, $X_\lambda, K_\lambda^\mu \in ANR$, [2] и соответственно обратной системы сингулярных комплексов $C_*(X_\lambda, K_\lambda^\mu; G)$, а $C^*(X, K^\mu; G)$ — относительные коцепные комплексы Александера–Спеньера и $\operatorname{holim}_{\leftarrow}$ — функтор гомотопического обратного предела. Эти группы связывают окончательным образом классические гомологические группы с компактными носителями $\overline{H}_m^c(X; G) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{\rightarrow \mu} \overline{H}_m(K^\mu; G)$ и сильные гомологические группы $\overline{H}_m(X; G) \stackrel{\text{def}}{=} H_m(\operatorname{holim}_{\leftarrow \lambda} C_*(X_\lambda; G))$, с помощью следующей длинной точной последовательности:

$$\cdots \rightarrow \overline{H}_m^c(X; G) \xrightarrow{\overline{\mu}_m} \overline{H}_m(X; G) \rightarrow \overline{H}_m^{br}(X; G) \rightarrow \overline{H}_{m-1}^c(X; G) \rightarrow \cdots, \quad (1)$$

и соответственно когомологические группы Александера–Спеньера $H^m(X; G)$ и сильные когомологические группы $\overline{H}^m(X; G) \stackrel{\text{def}}{=} H^m(\operatorname{holim}_{\leftarrow \mu} C^*(K^\mu; G))$, введенными автором [6], в виде длинной точной последовательности:

$$\cdots \rightarrow \overline{H}^{m-1}(X; G) \rightarrow \overline{H}_{br}^m(X; G) \rightarrow H^m(X; G) \xrightarrow{\overline{\lambda}^m} \overline{H}^m(X; G) \rightarrow \cdots. \quad (2)$$

Спрашивается: когда естественные гомоморфизмы $\overline{\mu}_m: \overline{H}_m^c(X; G) \rightarrow \overline{H}_m(X; G)$ и $\overline{\lambda}^m: H^m(X; G) \rightarrow \overline{H}^m(X; G)$ являются изоморфизмами для любого целого m ? Что эквивалентно вопросу о тривиальности сильных пограничных (ко)гомологических групп.

Ответ на этот вопрос для сильных пограничных (ко)гомологий дают следующие теоремы.

ТЕОРЕМА 1. Если для каждого $\mu \in M$ существует такое $\mu' \geq \mu$, что $i_{\mu'}^{\mu}: \overline{H}_m(K^{\mu'}; G) \rightarrow \overline{H}_m(X; G)$ является эпиморфизмом, а $\operatorname{Ker}(i_{\mu}^{\mu}: \overline{H}_m(K^\mu; G) \rightarrow \overline{H}_m(X; G)) = \operatorname{Ker}(i_{\mu}^{\mu\mu'}: \overline{H}_m(K^\mu; G) \rightarrow \overline{H}_m(K^{\mu'}; G))$, то $\overline{\mu}_m$ — изоморфизм. Если в дополнение к этому $i_{m+1}^{\mu'}: \overline{H}_{m+1}(K^{\mu'}; G) \rightarrow \overline{H}_{m+1}(X; G)$ является эпиморфизмом, то $\overline{H}_{m+1}^{br}(X; G) = 0$.

ТЕОРЕМА 2. Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует такое $\lambda' \geq \lambda$, что $i_{\lambda'n}^{\lambda}: \overline{H}_n^c(X; G) \rightarrow H_n(X_{\lambda'}; G)$ является мономорфизмом для любого $n \geq m-1$, а $\operatorname{Im}(i_{\lambda n}^{\lambda}: \overline{H}_n^c(X; G) \rightarrow H_n(X_\lambda; G)) = \operatorname{Im}(p_{\lambda\lambda'n}: \overline{H}_n^c(X_{\lambda'}; G) \rightarrow H_n(X_\lambda; G))$ для всех $n \geq m$, то $\overline{H}_n^{br}(X; G) = 0$ для всех $n \geq m$ и, следовательно, $\overline{\mu}_n$ является изоморфизмом для всех $n \geq m$ и мономорфизмом для $n = m-1$. Более того, $\overline{H}_n(X; G) \approx H_n(X; G)$ для всех $n \geq m$.

ТЕОРЕМА 3. Пусть X — паракомпактное хаусдорфово пространство, являющееся гомотопически локально связным в любой размерности по отношению к классическим гомологиям с компактными носителями, т.е. $X \in hlc_G^\infty$. Тогда $\overline{H}_m^{br}(X; G) = 0$ для любого целого m и, следовательно, $\overline{\mu}_m$ является изоморфизмом для любого m .

ТЕОРЕМА 4. Если для каждого $\mu \in M$ существует такое $\mu' \geq \mu$, что $i^{\mu'}: H^n(X; G) \rightarrow H^n(K^{\mu'}; G)$ является мономорфизмом для всех $n \leq t + 1$ и $\text{Im}(i^{\mu'}: H^n(X; G) \rightarrow H^n(K^{\mu'}; G)) = \text{Im}(i^{\mu'}: H^n(K^{\mu'}; G) \rightarrow H^n(K^{\mu}; G))$ для всех $n \leq t$, то $\overline{H}_{br}^n(X; G) = 0$ для всех $n \leq t + 1$ и, следовательно, $\overline{\lambda}^n$ – изоморфизм для всех $n \leq t$ и мономорфизм для $n = t + 1$. Более того, $\overline{H}^n(X; G) \approx \varprojlim_{\mu} H^n(K^{\mu}; G)$.

ТЕОРЕМА 5. Если для каждого $\lambda \in \Lambda$ существует такое $\lambda' \geq \lambda$, что $i_{\lambda'}^m: H^m(X_{\lambda}; G) \rightarrow \overline{H}^m(X; G)$ является эпиморфизмом, а $\text{Ker}(p_{\lambda\lambda'}^m: H^m(X_{\lambda}; G) \rightarrow H^m(X_{\lambda'}; G)) = \text{Ker}(i_{\lambda'}^m: H^m(X_{\lambda}; G) \rightarrow \overline{H}^m(X; G))$, то $\overline{\lambda}^m$ – изоморфизм. Если в дополнение к этому $i_{\lambda'}^{m-1}$ является эпиморфизмом, то $\overline{H}_{br}^m(X; G) = 0$.

ТЕОРЕМА 6. Пусть X – паракомпактное хаусдорфово пространство, являющееся когомологически локально связным в размерности t по отношению к сильным когомологиям, т.е. $X \in sclc_G^t$. Тогда $\overline{H}_{br}^n(X; G) = 0$ для всех $n \leq t$ и, следовательно, $\overline{\lambda}^n$ – изоморфизм для всех $n \leq t$ и мономорфизм для $n = t + 1$.

Непосредственным следствием части этой теории, касающейся гомологически и когомологически локально связных пространств, являются следующие теоремы, представляющие самостоятельный интерес.

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\underline{p} = (p_{\lambda}): X \rightarrow \underline{X} = (X_{\lambda}, p_{\lambda\lambda'}, \Lambda)$ – резольвция Мардешича пространства X и X_{λ} – паракомпактные хаусдорфовы пространства, являющиеся гомологически локально связными во всех размерностях по отношению к сингулярным гомологиям и гомологиям с компактными носителями, т.е. $X_{\lambda} \in HLC_G^{\infty} \cap hlc_G^{\infty}$, $\lambda \in \Lambda$. Тогда соответствующий сингулярный про-цепной комплекс $C_*(\underline{X}; G)$ естественным образом определяет сильные гомологические группы $\overline{H}_m(X; G)$ для любого целого m .

ТЕОРЕМА 8. Пусть (X, A) – замкнутая пара наследственно паракомпактных хаусдорфовых пространств, являющихся (ко)гомологически локально связными в размерности t по отношению к гомологиям с компактными носителями, сильными когомологиями и четовскими когомологиями соответственно, т.е. $X, A \in hlc^m$, $X, A \in sclc^m$ и $X, A \in clc^m$. Тогда фактор-пространство X/A также является (ко)гомологически локально связным в размерности t соответственно, т.е. $X/A \in hlc^m$, $X/A \in sclc^m$ и $X/A \in clc^m$ соответственно.

Существуют примеры пространств, показывающие, что, вообще говоря, сильные пограничные (ко)гомологии могут быть нетривиальны [4; с. 247–257]. Доказательство теоремы 1 простое, в отличие от доказательства теоремы 2, которое требует нетривиального построения ANR-резольвции Мардешича пространства X с подсистемами из ANR-резольвций для каждого компакта K^{μ} в X . Доказательства теорем 3 и 6 весьма длинные и требуют привлечения спектральной последовательности покрытия как для гомологий, так и для когомологий [5], аддитивной теоремы для сильных когомологий и теоремы типа Брауна–Адамса о представимости сильных когомологий [3], а также многочисленных результатов из теории гомотопических обратных пределов и резольвент Мардешича.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Ju. T. Lisica. Strong border homology and cohomology // International Conference on Geometric Topology II, Dubrovnik, 2002. [2] S. Mardešić // Tsukuba J. Math. 1984. V. 8. № 1. P. 81–93. [3] Ju. T. Lisica. Strong shape with compact supports and strong cohomology // International Conference on Topology and its Applications, Ohrid, 2000. [4] Ю. Т. Лисица. Когерентные гомотопии, гомологии, когомологии и сильная теория шейпов // Дисс. ... докт. физ.-матем. наук. М.: МГУ, 2001. [5] C. N. Lee // Michigan Math. J. 1967. V. 14. P. 207–217. [6] Yu. T. Lisica // Lecture Notes in Math. 1987. V. 1283. P. 148–163.

Принято редколлегией
23.09.2003