Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Людковский, Структура групп диффеоморфизмов неархимедовых многообразий, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 155–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm684>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.227.88.159

26 апреля 2023 г., 10:40:52

СТРУКТУРА ГРУПП ДИФФЕОМОРФИЗМОВ НЕАРХИМЕДОВЫХ МНОГООБРАЗИЙ

С. В. Лютковский

Данная заметка посвящена структуре групп диффеоморфизмов (ГД) многообразий, как локально компактных, так и нелокально компактных, над неархимедовыми полями $\mathbf{K}$, где $\mathbf{C}_{\mathbf{P}} \supset \mathbf{K} \supset \mathbf{Q}_{\mathbf{P}}$. Доказано, что ГД является простой и совершенной. Разделенные разности $\Phi^n f$ и их непрерывность определены для локально $\mathbf{K}$ -выпуклых пространств (ЛВП), где $0 < n \in \mathbb{R}$ [1]. С их помощью определяются различные классы гладкости групп $G(t, M) := C_0^{t, \text{id}}(M) \cap \text{Hom}(M)$ для многообразий M на полных ЛВП, где $0 \leq t \leq \infty$. Они называются группами гомеоморфизмов при $0 \leq t < 1$, а ГД при $1 \leq t \leq \infty$ [1]–[4]. Для многообразия M , вложенного в шар радиуса r нормированного пространства определена ГД $G(an_r, M) := C_0^{an_r, \text{id}}(M) \cap \text{Hom}(M)$ аналитических диффеоморфизмов. Класс $C_0^{t, \text{id}}$ отличается от $C^{t, \text{id}}$ условием, что он является пополнением семейства функций f с $\text{supp}(f_{i,j} - \text{id}_{i,j})$ и $\text{range}(f_{i,j} - \text{id}_{i,j})$, конечномерными над $\mathbf{K}$ (сначала для ЛВП, а потом многообразий с помощью карт (U_j, ϕ_j) атласа $\text{At}(M)$), где $f_{i,j} := \phi_i \circ f \circ \phi_j^{-1}$, U_j открыты в M .

ТЕОРЕМА. Пусть группа $G := G(t, M)$ задана для многообразия M , где $0 \leq t \leq \infty$ или $t = an_r$, $r > 0$. Тогда G простая и совершенная группа.

Используя процедуру пополнения равномерного пространства, сведем доказательство к $G(t, M)$ с полными M и $\mathbf{K}$.

(А) Рассмотрим сначала $G = G(t, M)$ с $t \geq 1$ или $t = an_r$, а также открыто-замкнутую подгруппу W из [1], [4], каждый элемент которой принадлежит хотя бы одной однопараметрической локальной подгруппе. Если $f, g \in W$, то существуют векторные поля A_f и A_g класса C_0^t на M и однопараметрические подгруппы $f^q, g^q \subset W$, $q \in B(\mathbf{K}, 0, 1)$, такие, что $\partial f^q / \partial q = A_f f^q$ и $\partial g^q / \partial q = A_g g^q$, где $A_f(x) = A_f^i(x) \partial_i$, суммирование ведется по $i \in I$, I – направленное множество. Пусть A^i класса C_0^τ с $\tau = \infty$ при $1 \leq t \leq \infty$ или $\tau = t$ при $t = an_r$, тогда элементы вида $\exp(qA(x))x$ плотны в W при таких t , где $A = A^i \partial_i$, $q \in B(\mathbf{K}, 0, 1)$. Для $B = \bar{A}^i \partial_i$ с $\bar{A}^i = \delta_{i,j}$, где $j \in I$ фиксировано, $\delta_{i,j} = 1$ при $i = j$ и $\delta_{i,j} = 0$ при $i \neq j \in I$, $W \ni \exp(qB)x \neq \text{id}$. Если задано $C \in \text{Vect}_0(\tau, M)$ с $\tau = \infty$ или an_r , $\|C\|_{\tau'} \leq p^{-2}$ ($\tau' \in \mathbb{N}$ или $\tau' = an_r$ соответственно), то существует $A \in \text{Vect}_0(\tau, M)$ с $\|A\|_{\tau'} \leq p^{-2}$ такое, что коммутатор векторных полей $[A, B] = C$. В самом деле, $[A, B] = A^i (\partial_i B^k \delta_{k,j}) \partial_j - B^k \delta_{k,j} (\partial_j A^i) \partial_i = -(\partial_j A^i) \partial_i = C^i \partial_i$. В силу §§ 79.1 и 80.3 в [5] существует антидифференцирование $P(x^j)$ по переменной x^j (в локальных координатах атласа $\text{At}(M)$) такое, что $A^i(x) = -(P(x^j) C^i)(x)$. Отсюда вытекает, что $[W, W] = W$, т.е. коммутант $[W, W]$ совпадает с W , где $[W, W]$ – минимальная подгруппа в W , порожденная подмножеством $\{[g, f] := g \circ f \circ g^{-1} \circ f^{-1} \mid g, f \in W\}$. Таким образом, W – совершенная группа.

Предположим, что имеется нормальная подгруппа V в W , отличная от единичной $\{e\}$ и W , тогда $gVg^{-1} = V$ для любого $g \in W$. Пусть $v \subset w$ – соответствующие им подмножества в алгебре $\text{Vect}_0(\tau, M)$, тогда $[v, w] \subset v$, где $[A, B]$ – коммутатор в алгебре $\text{Vect}_0(\tau, M)$. Поэтому существуют $A \in w \setminus v$ и $0 \neq B \in v$. Поскольку $[v, w] \subset v$, то $[p^2 \partial_i, B] \in v$ для любых i , т.е. можно полагать, что существуют $i \in I$ с $a(0, B^i) \neq 0$. Для $\text{Vect}_0(an_r, M)$ получим уравнения вида $\sum_{i, m+n=k+e_i} (b(n, C^i) b(m-e_i, B^j) - b(m, B^i) b(n-e_i, C^j)) = b(k, A^j)$, следовательно, решая их рекуррентно (в порядке возрастания $|m|$, $\text{Ord}(m)$ и j), найдем $B \in v$ и $C \in w$, для которых $[C, B] = A$. Это возможно, так как для любого $c_l = p^{-l}$, $l \in \mathbb{N}$, семейство $\{(i, |n| < \text{Ord}(n)) : |b(n, A^i)| r^{|n|} > c_l\}$ конечно при $A \in \text{Vect}_0(an_r, M)$, где m – мультииндекс, $b(k, A^j) \in \mathbf{K}$.

Локально аналитические функции [5] плотны в $C_0(t, M \rightarrow X)$ для остальных $1 \leq t \leq \infty$, следовательно, $[v, w] = w$ и получается противоречие. Таким образом, W является простой группой, т.е. не содержит нормальных подгрупп V с $V \neq \{e\}$ и $V \neq W$ одновременно.

Группа G представима в виде дизъюнктного объединения левых классов смежности $g_i W$, $G = \bigcup_{j \in \mathbb{N}} g_j W$, так что $\rho_0^t(g_j, g_k) > p^{-2}$ при $j \neq k$, следовательно, для выбранных $\{g_j : j \in \mathbb{N}\}$ с $g_1 = e = \text{id}$ и для любого $f \in G \setminus W$ существуют единственные j и $f_2 \in W$ в $f = g_j f_2$. Из $\overline{Q}_m(x+c) = \overline{Q}_m(x)$ при $|m| > 0$ и всех $x \in B(\mathbf{K}, 0, 1)$ следует, что $c = 0$, где $n = \text{Ord}(m)$, $\overline{Q}_m$ – базисные полиномы Амис. Тогда, перебирая $g \in W$ вида $(\text{id} + \xi \overline{Q}_m(x) e_i)$, $\xi \in B(\mathbf{K}, 0, p^{-2})$, получим, что $[G \setminus W, W] \subset G \setminus W$ и $\{gfg^{-1} : g \in W\} \neq \{f\}$ для любых $f \in G \setminus W$, следовательно, $[G, G] = G$.

Пусть имеется нормальная подгруппа $V \subset G$, $V \neq e$, $V \neq G$. Тогда для любых f и $g \in V$ с $f g^{-1} \in W$ получим, что $f g^{-1} = e$, так как $V \cap W$ является нормальной подгруппой в W , следовательно, V дискретна и $\rho_0^t(f, g) > p^{-2}$ для любых $f \neq g \in V$. Тогда $h f h^{-1} = f$ для любых $h \in W$, но это противоречит приведенным выше рассуждениям. Таким образом, G – простая совершенная группа.

(В) При $0 \leq t < 1$ группа $G(1, M)$ плотна в топологической группе $G(t, M)$, следовательно, $G(t, M)$ также проста и совершенна.

Общий случай для многообразий на ЛВП получается с помощью того, что ЛВП является проективным пределом нормированных пространств, что дает также разложение функций в пределы обратных спектров функций на нормированных пространствах, а потом, используя карты, получаем W . При этом W замкнуто в тихоновской и открыто-замкнуто в ящичной топологиях соответственно, наследуемых проективным пределом как подмножеством произведения и т. д. в каждой из этих топологий (см. подробнее [4]).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. V. Ludkovsky // Ann. Math. Blaise Pascal. 2000. V. 7. № 2. P. 19–80. [2] С. В. Людковский // Теорет. и матем. физика. 1999. Т. 119. № 3. С. 698–711. [3] С. В. Людковский // УМН. 1996. Т. 51. № 2. С. 169–170. [4] S. V. Ludkovsky. A structure and representations of diffeomorphism groups of non-Archimedean manifolds. Preprint. Los Alamos: Los Alamos Nat. Lab. math.GR/0004126, 2000. [5] W. H. Schikhof. Ultrametric Calculus. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1984.