Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Е. Миронов, Коммутирующие разностные операторы с полиномиальными коэффициентами, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6848>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.95.254.165

26 апреля 2023 г., 07:21:49

Коммутирующие разностные операторы с полиномиальными коэффициентами

А. Е. Миронов

В этой работе в рамках одноточечной конструкции найдены коммутирующие разностные операторы ранга 2, отвечающие кривой рода 1, коэффициенты которых являются полиномами от дискретной переменной.

Совместные собственные функции коммутирующих разностных операторов

$$L_1 = \sum_{N_-}^{N_+} u_i(n) T^i, \quad L_2 = \sum_{M_-}^{M_+} v_i(n) T^i,$$

где T – оператор сдвига по дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$, параметризуются спектральной кривой Γ , заданной в $\mathbb{C}^2$ некоторым полиномом $Q(\lambda, \mu)$:

$$L_1 \psi(n, P) = \lambda \psi(n, P), \quad L_2 \psi(n, P) = \mu \psi(n, P), \quad P = (\lambda, \mu) \in \Gamma.$$

Рангом l пары операторов L_1, L_2 называется размерность пространства совместных собственных функций в точке $P \in \Gamma$ общего положения. При $l = 1$ функция $\psi(n, P)$ выражается через тета-функцию кривой Γ и коэффициенты операторов легко восстанавливаются [1]. При $l > 1$ нахождение функции $\psi(n, P)$ сводится к решению задачи Римана и найти эту функцию в явном виде не удастся. И. М. Кричевером и С. П. Новиковым [1] (см. также [2]) предложен метод отыскания коэффициентов операторов, называемый методом деформации параметров Тюринга, который не требует нахождения $\psi(n, P)$. Ими показано, что коэффициенты операторов можно восстановить из решений уравнений на параметры Тюринга голоморфных стабильных расслоений, которые однозначно задаются функцией $\psi(n, P)$, при этом коэффициенты операторов зависят от произвольных l функциональных параметров. А именно, ими показано, что для восстановления коэффициентов операторов достаточно найти матричную функцию

$$\chi(n, P) = \Psi(n+1, P) \Psi^{-1}(n, P),$$

где $\Psi(n, P)$ – матрица Вронского, построенная по некоторому базису в пространстве совместных собственных функций. Используя метод деформации параметров Тюринга, Кричевер и Новиков нашли операторы ранга 2, отвечающие эллиптической кривой. При этом коэффициенты операторов выражены через ζ - и $\wp$ -функции Вейерштрасса от двух функциональных параметров.

В этой работе указаны спектральные данные для операторов ранга 2, отвечающих кривой рода 1, коэффициенты которых выражаются через элементарные функции от функциональных параметров. В частности, мы укажем операторы, которые, как и их гладкие аналоги – операторы Диксмье [3], имеют полиномиальные коэффициенты.

Пусть кривая Γ задана в $\mathbb{C}^2$ уравнением

$$w^2 = F(z) = z^4 + c_2 z^2 + c_1 z + 1.$$

Кривая Γ допускает голоморфную инволюцию $\sigma: \Gamma \rightarrow \Gamma$, $\sigma(z, w) = (z, -w)$. При $l = 2$ матрица $\chi(n, P)$ имеет вид

$$\chi(n, P) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \chi_1(n, P) & \chi_2(n, P) \end{pmatrix}, \quad P = (z, w) \in \Gamma.$$

Мы рассматриваем случай, когда инволюция σ не изменяет χ_1 , т. е.

$$\chi_1(n, P) = \chi_1(n, \sigma(P)). \quad (1)$$

ТЕОРЕМА 1. *Функции $\chi_1(x, P)$ и $\chi_2(x, P)$ имеют вид*

$$\chi_1 = \frac{c(n)}{z - \gamma(n)} + \frac{c(n)}{\gamma(n) - \gamma(n+1)}, \quad \chi_2 = \frac{1}{2z} + \frac{a(n)}{2(z - \gamma(n))} + \frac{w\gamma(n)}{2z(\gamma(n) - z)} + d(n),$$

где

$$c(n) = \frac{\gamma(n-1)(a^2(n) - F(\gamma(n)))}{4\gamma(n)(\gamma(n) - \gamma(n-1))}, \quad d(n) = \frac{(a(n+1) - 1)\gamma(n) + (a(n) + 1)\gamma(n+1)}{2(\gamma(n) - \gamma(n+1))\gamma(n+1)},$$

$\gamma(n)$, $a(n)$ – произвольные функции дискретной переменной $n \in \mathbb{Z}$.

ТЕОРЕМА 2. *При $a(n) = n + 1$, $\gamma(n) = n$ операторы имеют полиномиальные по n коэффициенты. Оператор второго порядка имеет вид*

$$\begin{aligned} L_2 = & T^2 + 2(n+2)T - \left(\frac{n^4}{2} + n^3 - \frac{1}{2}(1 - c_2)n^2 - \frac{1}{2}(8 - c_1 - c_2)n \right) \\ & - \frac{1}{2}(n^3 + (c_2 - 1)n + c_1 - 2)(n^2 + n - 1)T^{-1} \\ & + \frac{1}{16}(n^3 + (c_2 - 1)n + c_1 - 2)(n^3 - 3n^2 + (2 + c_2)n + c_1 - c_2 - 2) \\ & \times (n+1)(n-2)T^{-2}. \end{aligned}$$

Отметим, что аналог редукции (1) в гладком случае мы использовали в [4] для нахождения коммутирующих дифференциальных операторов ранга 2, рода 2.

Список литературы

- [1] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *Функц. анализ и его прилож.*, **12:4** (1978), 41–52.
 [2] И. М. Кричевер, С. П. Новиков, *УМН*, **58:3** (2003), 51–88. [3] Ж. Диксмье, *Математика*, **13:4** (1969), 16–44. [4] А. Е. Миронов, *Матем. сб.*, **195:5** (2004), 103–114.

А. Е. Миронов (A. E. Mironov)
 Институт математики им. С. Л. Соболева
 СО РАН, Новосибирск;
 Новосибирский государственный университет
E-mail: mironov@math.nsc.ru

Представлено И. М. Кричевером
 Принято редколлегией
 27.04.2007