Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Д. В. Миллионщиков, Деформации градуированных алгебр Ли и симплектические структуры, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 157–158

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm685>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 11:50:16

ДЕФОРМАЦИИ ГРАДУИРОВАННЫХ АЛГЕБР ЛИ И СИМПЛЕКТИЧЕСКИЕ СТРУКТУРЫ

Д. В. Миллионщиков

Симплектические нильмногообразия являются важным классом примеров симплектических многообразий, не допускающих кэлеровой структуры. Вопрос о существовании симплектической формы на нильмногообразии G/Γ решается в терминах алгебры Ли $\mathfrak{g}$ нильпотентной группы Ли G . В [1] и [2] было рассмотрено интересное семейство симплектических градуированных нильпотентных алгебр Ли $\mathcal{V}_n$, $n = 2k$ (и соответствующих нильмногообразий), заданных базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями

$$[e_i, e_j] = \begin{cases} (j-i)e_{i+j}, & i+j \leq n, \\ 0, & i+j > n, \end{cases} \quad \omega_{2k+1}^{\mathcal{V}} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=2k+1} (j-i)e^i \wedge e^j,$$

где замкнутая 2-форма $\omega_{2k+1}^{\mathcal{V}}$ определяет симплектическую структуру, а $e^1, \dots, e^{2k}$ обозначают двойственный к $e_1, \dots, e_{2k}$ базис 1-форм.

Алгебры $\mathcal{V}_n$ являются примером филиформных алгебр Ли – нильпотентных алгебр Ли $\mathfrak{g}$ с максимальной для их размерности $\dim \mathfrak{g}$ длиной $s = \dim \mathfrak{g} - 1$ нижнего центрального ряда. Идеалы $\{C^i \mathfrak{g} = [\mathfrak{g}, C^{i-1} \mathfrak{g}]\}$ нижнего центрального ряда нильпотентной алгебры Ли $\mathfrak{g}$ определяют ее конечную убывающую фильтрацию C . Для фильтрованной таким образом филиформной алгебры $\mathfrak{g}$ размерности однородных компонент ее присоединенной градуированной алгебры Ли $\mathrm{gr}_C \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^{n-1} (\mathrm{gr}_C \mathfrak{g})_i$ ($(\mathrm{gr}_C \mathfrak{g})_i = C^i \mathfrak{g} / C^{i+1} \mathfrak{g}$) равны: $\dim(\mathrm{gr}_C \mathfrak{g})_1 = 2$, $\dim(\mathrm{gr}_C \mathfrak{g})_2 = \dots = \dim(\mathrm{gr}_C \mathfrak{g})_{n-1} = 1$. Простейшим примером филиформной алгебры является алгебра $\mathfrak{m}_0(n)$, заданная базисом $e_1, e_2, \dots, e_n$ и коммутационными соотношениями $[e_1, e_i] = e_{i+1}$, $i = 2, \dots, n-1$ (соотношения вида $[e_i, e_j] = 0$ мы будем далее опускать). Алгебра $\mathfrak{m}_0(2k)$ обладает симплектической структурой $\omega_{2k+1}^{\mathfrak{m}_0} = \frac{1}{2} \sum_{i+j=2k+1} (-1)^i e^i \wedge e^j$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Пусть $\mathfrak{g}$ – симплектическая филиформная алгебра Ли. Тогда $\mathrm{gr}_C \mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_0(2k)$ и, значит, существует базис $e_1, \dots, e_{2k}$ в $\mathfrak{g}$ (так называемый адаптированный базис, введенный в [3]) такой, что

$$[e_i, e_j] = \sum_{l=0}^{2k-i-j} c_{ij}^l e_{i+j+l}, \quad i+j \leq 2k.$$

Набор идеалов $L^k \mathfrak{g} = \langle e_k, \dots, e_n \rangle$, $k = 1, \dots, n$, определяет фильтрацию L алгебры $\mathfrak{g}$, причем присоединенная градуированная алгебра Ли $\mathrm{gr}_L \mathfrak{g} = \bigoplus_{i=1}^n (\mathrm{gr}_L \mathfrak{g})_i$ является симплектической и $\dim(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g})_i = 1$, $i = 1, \dots, n$.

Алгебра $\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}$ может быть задана базисом и коммутационными соотношениями $[e_i, e_j] = c_{ij}^0 e_{i+j}$, $i+j \leq 2k$. Коцепные комплексы $(C^*(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}), d)$, $(C^*(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}, \mathrm{gr}_L \mathfrak{g}), d)$ и соответствующие когомологии допускают вторую градуировку (вес) $C^*(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}) = \bigoplus_p C_{(p)}^*(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g})$, $C^*(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}, \mathrm{gr}_L \mathfrak{g}) = \bigoplus_p C_{(p)}^*(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}, \mathrm{gr}_L \mathfrak{g})$, $p(e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_q}) = i_1 + i_2 + \dots + i_q$, $p(e_n \otimes e^{i_1} \wedge e^{i_2} \wedge \dots \wedge e^{i_q}) = n - (i_1 + i_2 + \dots + i_q)$.

УТВЕРЖДЕНИЕ 2. Форма ω является симплектической для $\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}$, если и только если $\omega = \omega_{2k+1} + \omega'$, где ω_{2k+1} – однородная симплектическая форма веса $2k+1$, а ω' – произвольный коцикл с однородными слагаемыми с весами $< 2k+1$.

Для доказательства достаточно заметить, что $H_{(p)}^2(\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}) = 0$ при $p > 2k+1$, а $p(\omega^k) = p(e^1 \wedge e^2 \wedge \dots \wedge e^{2k}) = k(2k+1)$. Градуированные филиформные алгебры вида $\mathrm{gr}_L \mathfrak{g}$ классифицированы в [4], элементарные когомологические вычисления показывают, что в размерностях

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00659) и гранта РФИ-Россия N 04495UL.

$2k \geq 12$ есть только две (с точностью до изоморфизма) симплектические градуированные филиформные алгебры: это $\mathfrak{m}_0(2k)$ и $\mathcal{V}_{2k}$.

В данной заметке мы рассматриваем алгебры $\mathfrak{g}$ такие, что $\mathrm{gr}_C \mathfrak{g} \cong \mathfrak{m}_0(n)$, $\mathrm{gr}_L \mathfrak{g} \cong \mathcal{V}_n$. Для каждой из них можно выбрать базис такой, что

$$[e_i, e_j] = (j - i)e_{i+j} + \sum_{l=1}^{n-i-j} c_{ij}^l e_{i+j+l}.$$

Алгебру $\mathfrak{g}$ будем рассматривать как специальную $\mathbb{Z}_{>0}$ -деформацию $(\mathcal{V}_n, [\cdot, \cdot] + \Psi)$, где $\Psi = \Psi_1 + \Psi_2 + \dots + \Psi_{n-3}$, $\Psi_l \in C_{(l)}^2(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$. Уравнение деформации $d\Psi + \frac{1}{2}[\Psi, \Psi] = 0$ можно записать как систему уравнений на однородные компоненты [5]:

$$d\Psi_1 = 0, \quad d\Psi_2 + \frac{1}{2}[\Psi_1, \Psi_1] = 0, \quad \dots, \quad d\Psi_{n-6} + \frac{1}{2} \sum_{i+j=n-6} [\Psi_i, \Psi_j] = 0.$$

УТВЕРЖДЕНИЕ 3. Полупрямое произведение $G_n = \mathbb{K}^* \ltimes UT_n$ подгруппы $\mathbb{K}^*$ диагональных матриц $\{\alpha^i \delta_j^i\}$ и подгруппы UT_n нижнетреугольных матриц с единицами на главной диагонали действует на аффинном многообразии V_n $\mathbb{Z}_{>0}$ -деформаций $\mathcal{V}_n$ заменами канонического базиса: $\varphi(e_i) = \alpha^i e_i + \sum_{j>i} a_{ij} e_j$. Две $\mathbb{Z}_{>0}$ -деформации $(\mathcal{V}_n, [\cdot, \cdot] + \Psi)$ и $(\mathcal{V}_n, [\cdot, \cdot] + \tilde{\Psi})$ задают изоморфные алгебры Ли тогда и только тогда, когда они лежат в одной орбите O_Ψ этого G_n -действия.

Рассмотрим убывающую фильтрацию $\tilde{L}$ комплекса $(C^*(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n), d)$, где подпространство $\tilde{L}^k C^*(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ порождено формами с такими, что $\mathrm{Im} s \subset L^k \mathcal{V}_n$. Фильтрация $\tilde{L}$ определяет спектральную последовательность $E_r^{p,q}$, сходящуюся к $H^*(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$.

ЛЕММА 1. Пусть $n \geq 16$, тогда $\dim H^2(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n) = 10$, в частности, подпространство $\bigoplus_{i>0} H_{(i)}^2(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ порождается коциклами $\psi_{n,i}$, соответствующими элементам $[\psi_{n,i}] = e_{n+7-i} \otimes [e^2 \wedge e^5 - 3e^3 \wedge e^4]$, $i = 11, \dots, 7$, из $E_1 = \mathcal{V}_n \otimes H^*(\mathcal{V}_n)$.

Часть коциклов $H^2(\mathcal{V}_n, \mathcal{V}_n)$ с отрицательными весами найдена в [6].

УТВЕРЖДЕНИЕ 4. При $n \geq 16$ многообразие V_n $\mathbb{Z}_{>0}$ -деформаций содержит 5-мерную плоскость $\Gamma_n \cong \mathbb{K}^5 = \{x_1 \psi_{n,11} + \dots + x_5 \psi_{n,7}\}$. Произвольная орбита O_Ψ^l действия UT_n на V_n пересекает Γ_n в единственной точке.

ТЕОРЕМА 1. При $n \geq 16$ существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{M}_n$ классов изоморфных $\mathbb{Z}_{>0}$ -деформаций $\mathcal{V}_n$ и пространством орбит $O(G_n/UT_n, \Gamma_n)$, где $G_n/UT_n = \mathbb{K}^*$ действует на $\Gamma_n = \mathbb{K}^5$ следующим образом:

$$\tilde{\rho}_n(\alpha)(x_1, x_2, \dots, x_5) = (\alpha^{n-11} x_1, \alpha^{n-10} x_2, \dots, \alpha^{n-7} x_5), \quad \alpha \in \mathbb{K}^*.$$

В четномерном случае подпространство симплектических алгебр выделяется уравнением $x_1 = 0$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. К. Бабенко, И. А. Тайманов // УМН. 1998. Т. 53. № 5. С. 225–226. [2] В. М. Бухштабер // УМН. 1999. Т. 54. № 4. С. 161–162. [3] М. Vergne // Bull. Soc. Math. France. 1970. V. 98. P. 81–116. [4] Д. В. Миллионщиков // УМН. 2002. Т. 57. № 2. С. 197–198. [5] A. Nijenhuis, R. W. Richardson, Jr. // J. Math. Mech. 1967. V. 17. № 1. P. 89–105. [6] А. Фиаловски // УМН. 1983. Т. 38. № 1. С. 201–202.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: million@mech.math.msu.su

Принято редколлегией
23.09.2003