Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. С. Мищенко, О трех законах арксинуса, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 159–160

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm686>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.197.130.99

26 апреля 2023 г., 13:34:36

О ТРЕХ ЗАКОНАХ АРКСИНУСА

А. С. Мищенко

Пусть $(X_t)_{t \geq 0}$ – некоторый случайный процесс. Определим следующие процессы:

$$\theta(X)_t := \arg \sup_{s \leq t} X_s, \quad \gamma(X)_t := \int_0^t \mathbb{I}_{\{X_s \geq 0\}} ds, \quad g(X)_t := \sup\{s : s \leq t, X_s = 0\},$$

где $\arg \sup_{s \leq t} X_s := \inf\{s : s \leq t, X_s = S(X)_t\}$, $S(X)_t := \sup_{s \leq t} X_s$. Если $(B_t)_{t \geq 0}$ – стандартное броуновское движение, то, как известно, величины $\theta(B)_1$, $\gamma(B)_1$ и $g(B)_1$ имеют одинаковую плотность распределения $f(x) = 1/(\pi\sqrt{x(1-x)})$. Все эти три утверждения носят название **закона арксинуса** и доказываются независимо.

Данная работа раскрывает причины совпадения распределений этих функционалов броуновского движения. Обнаруженная связь между величинами θ и γ позволяет вычислить в явном виде совместное распределение $P(\gamma(X)_t \in dx, L(X)_t \in dy, X_t \in dz)$, где $L(X)_t$ обозначает локальное время в нуле процесса X , а в качестве X рассматриваются броуновское движение со сносом $X_t = B_t^\mu = B_t + \mu t$ и броуновские мосты $X_t = \beta_t^{u,x} = B_t + \frac{t}{u}(x - B_u)$, $t < u$.

Рассмотрим сначала величины $\theta(B)_t$ и $g(B)_t$. Докажем, что они имеют одно и то же распределение, без ссылки на его явный вид.

ТЕОРЕМА 0. При каждом фиксированном t справедливо равенство $\theta(B)_t \stackrel{\text{law}}{=} g(B)_t$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Из теоремы Леви (см., например, [1; гл. IV (2.3)]), в частности, следует совпадение по распределению следующих процессов: $(S(B)_t - B_t)_{t \geq 0} \stackrel{\text{law}}{=} (|B_t|)_{t \geq 0}$. Но $g(B)_t = \sup\{s : s \leq t, |B_s| = 0\}$, а $\theta(B)_t = \sup\{s : s \leq t, S(B)_s - B_s = 0\}$, из чего следует утверждение теоремы.

Изучим теперь связь между величинами $\theta(B)_t$ и $\gamma(B)_t$. Обратимся к дискретному аналогу броуновского движения – простейшему симметричному случайному блужданию. Будем обозначать дискретные аналоги введенных выше процессов теми же буквами, но с волной. Пусть $\{\xi_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ – независимые одинаково распределенные случайные величины с $P(\xi_n = 1) = P(\xi_n = -1) = 1/2$. Определим процесс $\tilde{B}_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$ и положим

$$\tilde{S}_n := \sup_{k \leq n} \tilde{B}_k, \quad \tilde{\theta}_n := \inf\{k : k \leq n, \tilde{B}_k = \tilde{S}_n\}, \quad \tilde{\gamma}_n := \#\{k : k \leq n, \tilde{B}_k > 0\},$$

$$\tilde{K}_n := \tilde{S}_n \wedge (\tilde{S}_n - \tilde{B}_n), \quad \tilde{N}_n := \#\{k : 0 < k \leq n, B_{k-1} = 1, B_k = 0\},$$

где $\#A$ обозначает количество элементов в множестве A . В этих обозначениях справедлива ключевая

ТЕОРЕМА 1. При каждом $n \in \mathbb{N}$ имеет место равенство совместных распределений

$$(\tilde{\theta}_n, \tilde{K}_n, \tilde{B}_n) \stackrel{\text{law}}{=} (\tilde{\gamma}_n, \tilde{N}_n, \tilde{B}_n). \quad (1)$$

Вернемся теперь к случаю непрерывного времени. В дальнейшем будем обозначать $K(X)_t := S(X)_t \wedge (S(X)_t - X_t)$. Для броуновского движения $(B_t)_{t \geq 0}$ имеет место аналогичная

ТЕОРЕМА 2. При каждом $t \in \mathbb{R}$ справедливо равенство

$$(\theta(B)_t, 2K(B)_t, B_t) \stackrel{\text{law}}{=} (\gamma(B)_t, L(B)_t, B_t). \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО заключается в применении к формуле (1) следующего усиления принципа инвариантности Донскера–Прохорова. Внося незначительные изменения в рассуждения статьи [2], можно доказать, что $(\tilde{B}_s^m, \tilde{N}_s^m)_{s \leq t} \xrightarrow{w} (B_s, \frac{L(B)_s}{2})_{s \leq t}$ при $m \rightarrow \infty$, где $(\tilde{X}_s^m)_{s \leq t}$ – кусочно-линейный случайный процесс, построенный по точкам $(k/m, \tilde{X}_k/\sqrt{m})$, $k \leq [tm]$, $\tilde{X} = \tilde{B}, \tilde{N}$. Несмотря на то, что θ_t, γ_t не являются непрерывными функционалами в $C([0, t])$, можно проверить, что множества их точек разрыва имеют винеровскую меру 0. Итак, (2) следует из единственности слабого предела мер.

Вычислим теперь в явном виде распределение, фигурирующее в (2).

ТЕОРЕМА 3. Совместное распределение $(\gamma(B)_t, L(B)_t, B_t)$ задается формулой

$$\begin{aligned} P(\gamma(B)_t \in dx, L(B)_t \in dy, B_t \in dz) &= \rho(x, y, z) dx dy dz, \quad 0 \leq x \leq t, \quad y \geq 0, \quad z \in \mathbb{R}, \\ \rho(x, y, z) &= \frac{y(y+2|z|)}{8\pi(x(t-x))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{(y+z+|z|)^2}{8x} - \frac{(y-z+|z|)^2}{8(t-x)}\right\}. \end{aligned} \quad (3)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Совместное распределение $(\theta(B)_t, S(B)_t, B_t)$ при фиксированном t известно (см., например, [3; 1.1.13.8, с. 180]) и задается формулой

$$P(\theta(B)_t \in dx, S(B)_t \in dy, B_t \in dz) = \frac{y(y-z)}{\pi(x(t-x))^{3/2}} \exp\left\{-\frac{y^2}{2x} - \frac{(y-z)^2}{2(t-x)}\right\} dx dy dz,$$

пользуясь которой вместе с равенством (2) можно получить выражение (3).

Пусть теперь $(X_s)_{s \leq t}$ — некоторый непрерывный случайный процесс. Будем обозначать $P_t^X := \text{Law}(X_s, s \leq t)$. Предположим, что существует плотность $\frac{dP_t^X}{dP_t^B}$, причем она имеет вид

$$\frac{dP_t^X}{dP_t^B}(\omega) = D^X(\omega_t), \quad \omega \in C([0, t]),$$

для некоторой функции D^X , т.е. зависит лишь от значения траектории в последний момент времени. Очевидно, что в этом случае

$$P(\gamma(X)_t \in dx, L(X)_t \in dy, X_t \in dz) = \rho(x, y, z) D^X(z) dx dy dz, \quad (4)$$

где $\rho(v, y, z)$ определена в (3).

Как хорошо известно, для броуновского движения со сносом $(B_s^\mu)_{s \leq t}$ имеет место формула

$$\frac{dP_t^{B^\mu}}{dP_t^B}(\omega) = D_t^{B^\mu}(\omega_t) = \exp\left\{\mu\omega_t - \frac{\mu^2}{2}t\right\}. \quad (5)$$

Для броуновского моста $(\beta_s^{u,x})_{s \leq t}$, $t < u$, исходя из задающего его стохастического дифференциального уравнения (см. [1; гл. IV (3.18)]), используя теорему Гирсанова и производя интегрирование по частям в стохастическом интеграле, можно получить формулу

$$\frac{dP_t^{\beta^{u,x}}}{dP_t^B}(\omega) = D_t^{\beta^{u,x}}(\omega_t) = \sqrt{\frac{u}{u-t}} \exp\left\{-\frac{(\omega_t-x)^2}{2(u-t)} + \frac{x^2}{2u}\right\}. \quad (6)$$

Итак, справедливо

СЛЕДСТВИЕ. Совместное распределение тройки $(\gamma(B^\mu)_t, L(B^\mu)_t, B_t^\mu)$ задается формулами (4), (3), (5) для любого $t > 0$, а распределение тройки $(\gamma(\beta^{u,x})_t, L(\beta^{u,x})_t, \beta_t^{u,x})$ — формулами (4), (3), (6) для $0 < t < u$.

Автор благодарит своего научного руководителя профессора А. Н. Ширяева за постановку задачи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] D. Revuz, M. Yor. Continuous Martingales and Brownian Motion. Berlin: Springer-Verlag, 1999. [2] A. S. Cherny, A. N. Shiryaev, M. Yor // Теория вероятн. и ее примен. 2002. Т. 47. № 3. С. 498–516. [3] А. Бородин, П. Салминен. Справочник по броуновскому движению. СПб.: Изд-во “Лань”, 2000.