Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. П. Мочалина, Об одном критерии аналитической продолжимости функции S отрезка, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 161–162

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm687>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.210.77.194

26 апреля 2023 г., 17:15:36

ОБ ОДНОМ КРИТЕРИИ АНАЛИТИЧЕСКОЙ ПРОДОЛЖИМОСТИ ФУНКЦИИ С ОТРЕЗКА

Е. П. Мочалина

В анализе хорошо известен результат С. Н. Бернштейна [1]: условие $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n(f)} = \rho < 1$, $E_n(f) = \inf_{s \in p_n} \|f - s\|_{C(\Delta)}$, а f непрерывна на $\Delta = [-1; 1]$, равносильно тому, что существует аналитическое продолжение в область Γ_ρ , ограниченную эллипсом с фокусами ± 1 и суммой полуосей $1/\rho$, имеющее хотя бы одну особую точку на границе $\partial\Gamma_\rho$. Для заданной функции $f \in L_p(\Delta)$ определим величины наименьших уклонений в $L_p(\Delta)$ от $p_n = \{\sum_{j=0}^k c_j x^j, k \leq n, c_j \in \mathbb{C}\}$ и $r_{n,n} = \{g/s : g, s \in p_n\}$: $E_n = \inf_{s \in p_n} \|f - s\|$, $R_n \equiv R_n(f) = \inf_{r \in r_{n,n}} \|f - r\|$.

ТЕОРЕМА. Пусть фиксированы параметр $p \in (1; +\infty)$ и $f \in L_p[-1; 1]$. Условие $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{E_n - R_{n+1}} = \rho < 1$ необходимо и достаточно для того, чтобы f аналитически продолжалась в область Γ_ρ и на $\partial\Gamma_\rho$ имела хотя бы одну особую точку.

ЛЕММА 1. Если полином $P_n \in p_n$ задается равенством $E_n = \|f - P_n\|$, a_n — коэффициент при его старшей степени, то справедливо неравенство:

$$E_n - E_{n+1} \leq 2(1 + |a_{n+1}/a_n|) \sqrt{E_n(E_n - R_{n+1})}. \quad (1)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $m = n + 1 - \deg P_n$, $\gamma = a_n/a_{n+1}$, $T = ((1 + \gamma - \lambda x^m)P_n + \lambda \gamma P_{n+1})/(1 - \lambda x^m)$, где $\lambda \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \lambda(x)$, $|\lambda| \leq 1/2$. Так как $T \in r_{n+1, n+1}$ и $T - f = (1 - \lambda \gamma)(P_n - f) + \lambda \gamma(P_{n+1} - f) + \lambda^2 \gamma(P_{n+1} - P_n)x^m/(1 - \lambda x^m)$, то $R_{n+1} \leq |1 - \lambda \gamma|E_n + |\lambda \gamma|E_{n+1} + 4|\lambda^2 \gamma|E_n$. Выберем λ из условия $|1 - \lambda \gamma| = 1 - |\lambda \gamma|$ и перепишем последнее неравенство: $E_n - E_{n+1} \leq (E_n - R_{n+1})/|\lambda \gamma| + 4|\lambda|E_n$. Положив $2\lambda = \sqrt{(E_n - R_{n+1})/E_n} \cdot \exp(-i \arg \gamma)$, $|\gamma| \leq 1$, $2\lambda \gamma = \sqrt{(E_n - R_{n+1})/E_n}$, $|\gamma| > 1$. Завершим доказательство леммы.

Пусть $L_k(x) = \mu_k x^k + \dots$ — ортонормированный многочлен Лежандра степени k , $q = p/(p-1)$. Далее для сокращения записи постоянные, не зависящие от n , обозначаем C .

ЛЕММА 2. Если $E_n = \|f - P_n\|$, $i_n = \deg P_n$, $P_n(x) = a_n x^{i_n} + \dots$, $\tilde{f} = f - (a_n/\mu_{i_{n+1}})L_{i_n}$, $\Theta_n = R_n(\tilde{f})$, то

$$E_n - E_{n+1} \leq C \begin{cases} E_n^{1/2}(E_n - \Theta_{n+1})^{1/2}, & p \geq 2, \\ E_n^{1/p}(E_n - \Theta_{n+1})^{1/q}, & 1 < p < 2. \end{cases} \quad (2)$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Считаем, что $\deg P_{n+1} = n + 1$ (иначе $E_n = E_{n+1}$). Пусть $\lambda, b \in \mathbb{C}$, $\lambda \neq \lambda(x)$, $b \neq b(x)$, $|b| = 2$; $F_{n+1} = P_n - (a_n/\mu_{i_{n+1}})L_{i_n} - \lambda b(P_{n+1} - P_n)/(x - b)$. Тогда

$$\Theta_{n+1}^p \leq \|\tilde{f} - F_{n+1}\|^p = \|f - P_n + \lambda b(P_{n+1} - P_n)/(x - b)\|^p. \quad (3)$$

При $\alpha \in \mathbb{C}$ положим $V(t) = |\alpha + t|^p$, $t \in \Delta$. Пусть $p \geq 2$. Тогда по формуле Тейлора имеем $V(t) - V(0) - tV'(0) = t^2 V''(\zeta t)/2 \leq Ct^2(|\alpha|^{p-2} + |t|^{p-2})$. Если $\alpha = \psi/\beta$, то отсюда следует

$$|\psi + t\beta|^p \leq |\psi|^p + pt|\psi|^{p-2} \operatorname{Re}(\bar{\psi}\beta) + Ct^2|\beta|^2(|\psi|^{p-2} + |\beta|^{p-2}). \quad (4)$$

Полагаем $\phi_n = |f - P_n|^{p-2}(\bar{f} - \bar{P}_n)$, $\sigma = \int_\Delta \phi_n(P_{n+1} - P_n) dx$. Тогда $|\sigma| = |E_n^p - \int_\Delta \phi_n(f - P_{n+1}) dx| \geq (E_n - E_{n+1})E_n^{p-1}$. Если $\sigma = 0$, то $E_n = E_{n+1}$ и, следовательно, справедли-

Работа выполнена по гранту Государственной поддержки ведущих научных школ № НШ-1892.2003.1.

вость (2). Поэтому считаем $\sigma \neq 0$ и полагаем в (4) $\psi = f - P_n$, $\beta = \lambda b(P_{n+1} - P_n)/(x - b)$ при $\lambda = -|\sigma|/\sigma$ и интегрируем (4) по Δ . Используя неравенства (3), $\int_{\Delta} |\psi(x)|^{p-2} dx \leq 2\|\psi\|^{p-2}$, $\|\beta\| \leq CE_n$ и $\|\psi\| = E_n$, имеем

$$\Theta_{n+1}^p \leq E_n^p + tp \operatorname{Re} \left(\int_{\Delta} |\psi|^{p-2} \bar{\psi} \beta dx \right) + Ct^2 E_n^p = E_n^p - tp|\sigma| + tp \operatorname{Re}(A(b)) + Ct^2 E_n^p, \quad (5)$$

где $A(b) = -|\sigma|/\sigma \int_{\Delta} x \phi_n(P_{n+1} - P_n)/(x - b) dx$. Покажем, что на границе ∂U круга $U = \{b : |b| \leq 2\}$ существует хотя бы одна точка b такая, что $A(b) < 0$. Функция $A(b)$ голоморфна на $\mathbb{C} \setminus \{z : |z| \leq 1\}$. Пусть G — образ внешности круга U при отображении $\nu = A(b)$. Так как $A(\infty) = 0$, то G — ограниченная область и $0 \in G$. Граница области G пересекает отрицательную полуось действительной оси $\operatorname{Im} \nu = 0$ в точке $\nu_0 = \sup\{\nu : \nu < 0, \nu \notin G\}$. Выбрав $b = \nu^{-1}(\nu_0)$, имеем $A(b) < 0$. Теперь из (5) и (1) следует $E_n^p - \Theta_{n+1}^p \geq tE_n^{p-1}(E_n - E_{n+1}) - t^2 CE_n^p$. Выбрав $t = (E_n - E_{n+1})/(E_n C)$ и заметив, что $x^p - y^p \leq px^{p-1}$, получим (2) для $p \geq 2$.

Рассмотрим $p \in (1; 2)$. По теореме Лагранжа $V(t) - V(0) - tV'(0) = t(V'(\zeta t) - V'(0))$. При $t > 0$ оценим сверху $N = |V'(\zeta t) - V'(0)|$. Если $|\alpha| \leq t$, то, с учетом $|a+c|^{p-1} \leq |a|^{p-1} + |c|^{p-1}$, $a, c \in \mathbb{C}$, получим $N \leq 6t^{p-1}$. Пусть $|\alpha| > t$. Используя $||a|^{p-1} - |c|^{p-1}| \leq |a+c|^{p-1}$, найдем, что $N \leq p(2t/|\alpha|^{2-p} + 3t^{p-1}) < Ct^{p-1}$. Теперь из вида $V(t)$ при $\alpha = \psi/\beta$ получаем аналог (4): $|\psi + t\beta|^p \leq |\psi|^p + tp|\psi|^{p-2} \operatorname{Re}(\bar{\psi}\beta) + Ct^p |\beta|^p$. Далее, рассуждая, как и при $p \geq 2$ имеем $E_n^p - \Theta_{n+1}^p \geq tpE_n^{p-1}(E_n - E_{n+1}) - Ct^p E_n^p$, что при $t = ((E_n - E_{n+1})/E_n)^{1/(p-1)}$ доказывает лемму.

ЛЕММА 3. Пусть $E_n - R_{n+1} = O(\rho^n)$. Тогда $E_n = O(n^{2(\nu+1)}\rho^n)$, $\nu = \max\{2, q\}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $1 < p \leq 2$, $\chi_{n+1} \in r_{n+1, n+1}$: $\Theta_{n+1} = \|\tilde{f} - \chi_{n+1}\|$. Имеем $R_{n+1} \leq \|f - \chi_{n+1}\| = \|\tilde{f} - \chi_{n+1} + (a_{i_n}/\mu_{i_{n+1}})L_{i_n}\| \leq \Theta_{n+1} + 2n|a_{i_n}|/\mu_{i_{n+1}}$, $E_n - \Theta_{n+1} \leq E_n - R_{n+1} + 2n|a_{i_n}|/\mu_{i_{n+1}}$. Считаем $\alpha = 1 - \beta$, $\beta = q/(2q+2)$. Предположим, что $|a_n| \leq E_n^\alpha (E_n - R_{n+1})^\beta \mu_{i_{n+1}}$. Тогда из последнего неравенства и предположения имеем $E_n - \Theta_{n+1} \leq E_n - R_{n+1} + 2nE_n^\alpha (E_n - R_{n+1})^\beta \leq 3nE_n^\alpha (E_n - R_{n+1})^\beta$. Из леммы 2 и равенства $q/p + \alpha = q(2q+1)/(2q+2) \equiv q(1-\gamma)$ находим $E_n - E_{n+1} \leq CE_n^{1-\gamma} (E_n - R_{n+1})^\gamma$. Пусть $|a_n| \geq E_n^\alpha (E_n - R_{n+1})^\beta \mu_{i_{n+1}}$. Заметим, что $|a_{n+1}| \leq 16n\mu_{i_{n+1}} E_n$ в силу ортонормированности L_k и неравенства Гёльдера. Поэтому $|a_{n+1}/a_n| \leq 16n(E_n/(E_n - R_{n+1}))^\beta$. Отсюда и из (1) имеем $E_n - E_{n+1} \leq CnE_n^{1-\gamma} (E_n - R_{n+1})^\gamma$. Из леммы 2 легко получаем такие же неравенства при $p > 2$. Положим $\nu = \max\{2, q\}$. Так как $E_n - R_{n+1} = O(\rho^n)$, то $E_n = \sum_{m=n}^\infty (E_m - E_{m+1}) \leq CE_n^{1-\gamma} \rho^{n\gamma} \sum_{m=n}^\infty m\rho^{(m-n)\gamma} \leq Cn^2 E_n^{1-\gamma} \rho^{n\gamma}$, а значит $E_n = O(n^{2(\nu+1)}\rho^n)$.

По неравенству Никольского (см. [2]) $\|Q_n\|_{C(\Delta)} \leq Cn^{2/p} \|Q_n\|$, поэтому из условия теоремы и леммы 3 следует $\|P_{n+1} - P_n\|_{C(\Delta)} \leq Cn^{2/p} \|P_n - P_{n+1}\| \leq n^{4(\nu+1)+2/p} \rho^n$. Далее, $f = P_1 + \sum_{s=1}^\infty (P_{s+1} - P_s)$. Поскольку $|Q_n(z)| < MR^n$ на $\Gamma_{1/R}$, если только $|Q_n(x)| < M$ на Δ , то на $\Gamma_{\rho+\varepsilon}$ $|P_{s+1} - P_s| < C(\rho/(\rho+\varepsilon))^n$, а значит, ряд равномерно сходится внутри всякого эллипса, сумма полуосей которого менее $1/\rho$, и тем самым представляет там аналитическую функцию. Доказательство теоремы заканчивается применением приведенного выше результата С. Н. Бернштейна.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

[1] С. Н. Бернштейн. Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.—Л.: ОНТИ, 1937. [2] С. М. Никольский. Неравенства для целых функций конечной степени и их применение в теории дифференцируемых функций многих переменных // Труды МИАН. 1951. Т. 217. С. 135–181.