Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Русаков, Предельная теорема для числа выходов за высокий уровень огибающей гауссовского стационарного случайного процесса, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 163–164

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm688>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.156.22

26 апреля 2023 г., 10:47:41

ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА ДЛЯ ЧИСЛА ВЫХОДОВ ЗА ВЫСОКИЙ УРОВЕНЬ ОГИБАЮЩЕЙ ГАУССОВСКОГО СТАЦИОНАРНОГО СЛУЧАЙНОГО ПРОЦЕССА

А. А. РУСАКОВ

Пусть $\xi_t = (\xi_{1t}, \xi_{2t})^T$ – двумерный вещественный стационарный гауссовский случайный процесс с нулевым средним. Запишем спектральное представление его первой компоненты в виде, [1],

$$\xi_{1t} = \int_0^{+\infty} \cos \lambda t du(\lambda) + \int_0^{+\infty} \sin \lambda t dv(\lambda),$$

где $u(\lambda), v(\lambda)$ – гауссовские случайные процессы с ортогональными приращениями, некоррелированные между собой, $E|du(\lambda)|^2 = E|dv(\lambda)|^2 = (dF(\lambda) + dF(-\lambda))/2$, $F(\lambda)$ – спектральная функция случайного процесса ξ_{1t} .

Пусть вторая компонента ξ_{2t} есть преобразование Гильберта процесса ξ_{1t} :

$$\xi_{2t} = \int_0^{+\infty} \sin \lambda t du(\lambda) - \int_0^{+\infty} \cos \lambda t dv(\lambda).$$

Далее, обозначим $\lambda_k = \int_{-\infty}^{+\infty} \lambda^k dF(\lambda)$ – k -й спектральный момент стационарного процесса ξ_{1t} . Ковариационная функция векторного процесса ξ_t имеет вид

$$E\xi_t \xi_{t+\tau}^T = \begin{pmatrix} r_{11}(\tau) & r_{12}(\tau) \\ -r_{12}(\tau) & r_{11}(\tau) \end{pmatrix},$$

где

$$r_{11}(t) = \int_0^{+\infty} \cos \lambda t dF(\lambda), \quad r_{12}(t) = \int_0^{+\infty} \sin \lambda t dF(\lambda).$$

Не нарушая общности, будем предполагать, что $\lambda_0 = r_{11}(0) = 1$. Огибающей случайного процесса ξ_{1t} называют случайный процесс $\mathcal{E}_t = \sqrt{\xi_{1t}^2 + \xi_{2t}^2}$, [1].

Пусть $N_u^+(\cdot)$ – точечный процесс выходов огибающей $\mathcal{E}_t$ за уровень u . Пусть D_u – круг радиуса u , а S_u – его граница, $S_u = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = u^2\}$. Пусть $N_{S_u}^+(\cdot)$ – точечный процесс выходов векторного случайного процесса ξ_t из круга D_u за границу S_u . Выброс огибающей $\mathcal{E}_t$ за уровень u соответствует выходу векторного процесса ξ_t за границу S_u круга D_u . Следовательно, выходы огибающей $\mathcal{E}_t$ за уровень u и выходы случайного процесса ξ из круга D_u порождают один и тот же точечный процесс на временной оси,

$$N_u^+(\cdot) = N_{S_u}^+(\cdot). \quad (1)$$

$N_u^+(\cdot)$ и $N_{S_u}^+(\cdot)$ определены на борелевских множествах из $[0, \infty)$. Справедлива формула для среднего числа выходов, [1], $EN_u^+(J) = |J|\mu_u^+$, где $|J|$ – длина интервала J ,

$$\mu_u^+ = u \sqrt{\frac{\lambda_2 - \lambda_1^2}{2\pi}} e^{-\frac{u^2}{2}} \quad (2)$$

– интенсивность точечного процесса $N_u^+(\cdot)$.

Везде ниже предполагается конечность второго спектрального момента, $\lambda_2 < \infty$. Отсюда в частности следует, что все пересечения окружности S_u являются п.н. либо входами, либо выходами, см. [1].

ТЕОРЕМА 1. Пусть спектральная функция $F(\lambda)$ содержит ненулевую абсолютно непрерывную составляющую в своем разложении Лебега и для некоторых $\delta_1, \delta > 0$ выполнены следующие условия:

$$|\dot{r}_{11}(0) - \dot{r}_{11}(t)| < |\ln |t||^{-(1+\delta)}, \quad |t| < \delta_1, \quad (3)$$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} (\ln t) \sqrt{r_{11}^2(t) + r_{12}^2(t)} = 0. \quad (4)$$

Тогда пересечения уровня и огибающей $\mathcal{E}_t$ стационарного гауссовского случайного процесса ξ_{1t} в масштабе времени с единицей $(\mu_u^+)^{-1}$ образуют точечные процессы, сходящиеся по распределению при $u \uparrow \infty$ к пуассоновскому точечному процессу, имеющему единичную интенсивность.

Доказательство теоремы основано на переходе к дискретному времени и использовании свойств перемешивания квантованного гауссовского процесса с дискретным временем, аналогично [2], см. также [3]. При этом мы предварительно изучаем свойства аппроксимации первого и второго моментов числа пересечений соответствующими функционалами в дискретном времени.

Рассмотрим последовательность значений векторного случайного процесса ξ_t

$$\{\xi_{kh}\}, \quad k \in \mathbb{Z} = \{0, 1, 2, \dots\},$$

и порождаемый ею квантованный точечный процесс $N_u^+(\cdot, h)$. Рассмотрим точечный процесс $N_u^+(\cdot, h)$ выходов последовательности $\{\xi_{kh}\}$ за уровень u . Имеем:

$$\mathbb{E} N_u^+([kh, (k+1)h], h) = \mathbb{P}\{\xi_{kh} \in D_u; \xi_{(k+1)h} \notin D_u\} = \mathbb{P}\{\xi_{kh} < u < \xi_{(k+1)h}\}.$$

Интенсивность точечного процесса $N_u^+(\cdot, h)$ будем обозначать $\mu_u^+(h)$, тогда

$$\mu_u^+(h) = \frac{1}{h} \mathbb{P}\{\xi_{kh} \in D_u; \xi_{(k+1)h} \notin D_u\}, \quad \mathbb{E} N_u^+([0, kh], h) = \mu_u^+(h)k.$$

Обозначим через $J_{(2)}(t) = \mathbb{E} N_{S_u}^+(J)(N_{S_u}^+(J) - 1)$ второй факториальный момент $N_{S_u}^+(\cdot)$ на интервале J длины t .

Ниже приведены две леммы из трех, на которых основано доказательство теоремы. Из утверждения леммы 1 следует, сколь малым нужно выбирать шаг квантования h , чтобы переход к квантованному процессу был корректен, т.е. чтобы $\mu_u^+(h) \sim \mu_u^+$ при $u \uparrow \infty$. Из оценки второго факториального момента в лемме 2 следует асимптотическая ординарность рассматриваемого точечного процесса $N_u^+(\cdot)$. С помощью утверждения леммы 2 оцениваются вероятности $\mathbb{P}\{N_u^+(\cdot) = 0\}$ и $\mathbb{P}\{N_u^+(\cdot) = 1\}$. Третья лемма, которая здесь не приводится, является обобщением неравенства Бермана, см. [2]. Из нее следует асимптотическая независимость числа пересечений на непересекающихся интервалах. Пусть $w = w(u)$ – положительная функция такая, что $w \uparrow \infty$ при $u \uparrow \infty$.

ЛЕММА 1. Пусть $\lambda_2 < \infty$ и шаг квантования $h = 1/(uw)$, тогда $\mathbb{P}\{\xi_t \in D_u; \xi_{t+h} \notin D_u\} \sim \mu_u^+(u)h$, когда $u \uparrow \infty$.

Пусть $T = 1/\mu_u^+$, где μ_u^+ определено в (2), а $s(u)$ – положительная возрастающая функция, $\frac{s(u)}{u} \uparrow \infty$, $\ln s(u) = o(u^2)$ при $u \uparrow \infty$.

ЛЕММА 2. Пусть случайный процесс $\xi(t)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Тогда $J_{(2)}(T/s(u)) = o(1/s(u))$ при $u \uparrow \infty$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. Крамер, М. Лидбеттер. Стационарные случайные процессы. М.: Мир, 1969.
 [2] S. M. Berman // Ann. Math. Statist. 1964. V. 35. № 2. P. 502–516. [3] V. I. Piterbarg. Asymptotic Methods in the Theory of Gaussian Processes and Fields. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1996. (Transl. Math. Monogr. V. 148.)