Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. М. Вершик, Универсальное пространство Урысона, метрические тройки Громова и случайные метрики на натуральном ряде, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 57–64

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm69>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.45.116

26 апреля 2023 г., 14:59:12

УДК 515.512.556

УНИВЕРСАЛЬНОЕ ПРОСТРАНСТВО УРЫСОНА,
МЕТРИЧЕСКИЕ ТРОЙКИ ГРОМОВА
И СЛУЧАЙНЫЕ МЕТРИКИ НА НАТУРАЛЬНОМ РЯДЕ

А. М. ВЕРШИК

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	57
1. Универсальное пространство Урысона	58
2. Метрические тройки Громова	59
3. Случайные метрики на натуральном ряде и пространство Урысона ..	62
Список литературы	64

Введение

В одной из своих последних работ [1], увидевшей свет уже после неожиданной смерти автора, П. С. Урысон определил и изучил так называемое универсальное метрическое пространство. Эта работа не получила широкой известности, хотя того заслуживает. Я узнал о ней только в 1992 году во время работы над статьей [2], в которой была отмечена связь универсального пространства Урысона и расстояния Громова–Хаусдорфа между метрическими пространствами.

Как отметил П. С. Урысон, его работа была инициирована вопросом, заданным ему М. Фреше, об универсальности какого-либо банахова или гильбертова пространства. Но построение П. С. Урысона оказалось более глубоким. На первый взгляд, работа [1] выдержана в духе топологических увлечений тех лет, однако живая идея, содержащаяся в ней, выглядит весьма современно. Я еще раз вспомнил о ней во время обсуждений другой замечательной идеи М. Л. Громова, а именно, того, что ниже названо метрическими тройками, и обратил его внимание на пространство Урысона. В английском издании его книги [3] приведены некоторые новые соображения на этот счет. Цель настоящей заметки – проиллюстрировать связи этих двух тем между собой и соединить еще с одной вероятностной идеей, а также поставить некоторые задачи, связанные с этим кругом вопросов.

Работа частично поддержана грантом INTAS-94-3420.

1. Универсальное пространство Урысона

ТЕОРЕМА [1]. *Существует полное сепарабельное метрическое (=польское) пространство U , обладающее тремя свойствами.*

- 1) (Универсальность) *Всякое польское пространство может быть изометрично отображено в U .*
- 2) (Однородность) *Любые два конечных изометричных (=конгруэнтных) подмножества пространства U могут быть переведены одно в другое изометрией всего пространства U .*
- 3) (Единственность) *Свойства 1) и 2) определяют пространство U с точностью до изометрии однозначно.*

Это пространство будем называть *универсальным пространством Урысона*. Построение пространства – несложно. П. С. Урысон строит его с помощью прямой конструкции, начиная со счетного метрического пространства, универсального в классе конечных метрических пространств с рациональной метрикой, а затем пополняет его до U . Заметим, что универсальных пространств много; наиболее популярна замеченная после выхода работы П. С. Урысона С. Банахом и С. Мазуром универсальность пространства $C([0, 1])$, но оно не является однородным. Преимущество пространства Урысона, по сравнению с универсальными банаховыми пространствами, видимо, недостаточно оцененное в литературе, (см., например, [4]) – в его единственности с точностью до изометрии и в максимально возможной транзитивности действия группы его изометрий. П. С. Урысон доказывает, что пространство U связно и локально связно, как и сфера $S_\varepsilon(x) = \{y : \text{dist}(x, y) = \varepsilon\}$ для любой его точки x ; эта сфера является в том же смысле универсальным пространством для всех польских пространств с диаметром, не превышающим 2ε . Как отмечает редактор двухтомника сочинений П. С. Урысона (П. С. Александров) в примечаниях к работе [1], было бы хорошо дать более явную реализацию этого важного геометрического объекта. Мы делаем далее некоторый шаг в этом направлении, а пока сделаем несколько замечаний, связанных с понятием универсального пространства Урысона. Сначала очевидные следствия, соединяющие его с более поздними понятиями.

СЛЕДСТВИЕ. 1) *Пространство U является пространством Александрова (А. Д.), в том смысле, что расстояние между любыми двумя точками есть инфимум длин спрямляемых кривых, их соединяющих (фактически это отмечено уже в работе П. С. Урысона).*

2) *Расстояние Громова–Хаусдорфа (см. [3]) между метрическими пространствами X и Y может вычисляться по формуле*

$$d(X, Y) = \inf \{ \tilde{\rho}(i(X), j(Y)) \},$$

где $\inf$ берется по всем вложениям i, j пространств X, Y соответственно в пространство Урысона, а $\tilde{\rho}$ – метрика на подмножествах (метрика Хаусдорфа) этого пространства (см. [2]).

Из n -кратной при любом натуральном n изометрической транзитивности действия группы $G(U)$ – изометрий пространства U – вытекает, что это очень богатая и интересная группа.

ВОПРОС. *Описать группу $G(U)$. Какие у нее имеются линейные представления? Какова ее алгебраическая и топологическая структура? Есть ли у нее естественный инфинитезимальный аналог?*

Эти вопросы, по-видимому, ранее не обсуждались.

Выше говорилось о сфере в пространстве Урысона как об универсальном однородном пространстве в классе польских пространств с диаметром не выше фиксированного. Точно так же можно поставить вопрос об универсальном однородном пространстве, например, для метрических компактов, ε -энтропия которых не выше заданного роста, и т. д.

2. Метрические тройки Громова

Классификация польских пространств с точностью до изометрии – необозримая задача. Более точно, эта классификация не является в современной терминологии “гладкой” – см. [10]. Предположим, что на польском пространстве (X, ρ) задана произвольная борелевская вероятностная мера μ . По известной теореме (В. А. Рохлин, [5]) пара (X, μ) изоморфна в смысле теории меры стандартному пространству с мерой (пространству Лебега). В частности, если эта мера непрерывна, то всякое польское пространство с борелевской вероятностной мерой изоморфно отрезку $[0, 1]$ с лебеговой мерой. Оказывается, между необозримой классификацией польских пространств (X, ρ) с точностью до изометрии и тривиальной классификацией пар (X, μ) , как пространств с мерой, лежит удачная промежуточная задача, предложенная М. Л. Громовым, о классификации метрических пространств (X, ρ, μ) с борелевской вероятностной мерой с точностью до изометрий, сохраняющих меру. Эта классификация оказалась обозримой, в отличие от первой, и нетривиальной, в отличие от второй классификации. Она и составляет теорему Громова, к которой мы и переходим, слегка изменив ее форму. Назовем *метрической тройкой* польское пространство X с метрикой ρ и борелевской вероятностной мерой μ – (X, ρ, μ) . В дальнейшем, не умаляя общности, будем всегда считать, что носитель меры есть все пространство (т.е. все открытые непустые множества имеют положительную меру). Две тройки (X, ρ, μ) и (X', ρ', μ') *метрически* (в смысле и метрики, и меры, – в русской литературе слово “метрически” употребляется в обоих смыслах, но здесь смысл общий) *изоморфны*, или просто *изоморфны*, если существует изометрия, отображающая первое пространство на второе и переводящая меру μ в меру μ' . Этот тип изоморфизма, как проиллюстрировано в [3], полезен в спектральной геометрии, а также в эргодической теории и, особенно, в асимптотических задачах. Но главное в том, что соответствующая классификация оказывается весьма конструктивной. Построим полную систему инвариантов метрических троек относительно этого изоморфизма. Рассмотрим множество R бесконечных *матриц расстояний*, т.е. симметричных матриц с вещественными неотрицательными коэффициентами $r_{i,j}$, $i, j \in \mathbb{N}$, равными нулю на главной диагонали и удовлетворяющими неравенству треугольника:

$$r_{i,j} + r_{j,k} \geq r_{i,k},$$

(не требуется, чтобы внедиагональные элементы были отличны от нуля). Множество R есть выпуклый конус в векторном пространстве всех бесконечных, вещественных,

симметричных матриц, замкнутый в слабой топологии этого пространства. Пусть X^∞ – произведение счетного числа копий пространства X . Отображение $\phi: X^\infty \rightarrow R$ сопоставляет каждой счетной последовательности $\{x_i\} \in X^\infty$, $i \in \mathbb{N}$, матрицу расстояний $(\rho(x_i, x_j))$, $i, j \in \mathbb{N}$. Введем на X^∞ произведение мер μ^∞ с сомножителем μ , и пусть M_μ есть ϕ -образ этой меры на пространстве R .

ТЕОРЕМА (см. [3]). *Две метрические тройки (X, ρ, μ) и (X', ρ', μ') изоморфны тогда и только тогда, когда меры M_μ и $M_{\mu'}$ на R – совпадают.*

Таким образом, классификация метрических троек по Громову – “гладкая”, т.е. классы изоморфных троек имеют хорошую параметризацию, а пространство классов есть множество некоторых мер на R .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Если тройки изоморфны, то совпадение мер M_μ и $M_{\mu'}$ – очевидно. Нетривиальна достаточность совпадения, которая мгновенно следует из эргодической теоремы. Действительно, если M_μ и $M_{\mu'}$ совпадают, то существует хотя бы одна матрица из R (на самом деле таковы почти все матрицы по этой мере), прообраз которой в X^∞ (соответственно в X'^∞), в силу эргодической теоремы (закона больших чисел), есть равномерно распределенная в X относительно μ (соответственно в X' относительно μ') всюду плотная (поскольку меры имеют полный носитель) последовательность. Эти две последовательности, как метрические пространства, изометричны, так как их матрицы расстояний совпадают; изометрия продолжается до изометрии пополнений, а их равномерная распределенность гарантирует нужное сохранение мер при изометрии, что и требовалось доказать.

Опишем теперь условия на меры M_μ на множестве R , возникающие как образы при отображениях ϕ . Прежде всего, они *инвариантны относительно действия на R бесконечной симметрической группы S_∞* , одновременно переставляющей строки и столбцы матриц, поскольку они представляют собой ϕ -образы произведения мер, инвариантных относительно всех (не только финитных) перестановок. По той же причине меры M_μ *эргодичны* относительно этого действия. Но этих условий недостаточно. Например, точечная мера, сосредоточенная на матрице, у которой вне главной диагонали стоят единицы, а на ней – нули, отвечает обоим условиям, но, с одной стороны, – это матрица расстояний счетного дискретного пространства, расстояние между любыми двумя различными точками которого равно единице, а в то же время, дельта-мера может отвечать только одноточечному пространству.

Другое необходимое условие, которому удовлетворяют все меры M_μ , состоит в следующем:

для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что

$$(*) \quad M_\mu \left\{ r \in R : \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{j : 1 \leq j \leq n, \min_{1 \leq i \leq N} r_{i,j} < \varepsilon\}}{n} > 1 - \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon.$$

Это свойство меры M_μ вытекает из известной теоремы о том, что для всякой вероятностной меры в польском пространстве существует сигма-компакт полной меры (см. [6]). Если неравенство для предела, стоящее в скобках в условии (*), заменить на неравенство для всех достаточно больших j , т.е. наложить условие:

для всякого $\varepsilon > 0$ существует такое натуральное N , что

$$(**) \quad M_\mu \left\{ r \in R : \text{для любых } j > N \quad \min_{1 \leq i \leq N} r_{i,j} < \varepsilon \right\} > 1 - \varepsilon,$$

то мы получим необходимое и достаточное условие компактности пространства X . Достаточность доказывается просто: матрицы расстояний, удовлетворяющие условию в скобках, отвечают последовательностям, у которых первые N элементов образуют ε -сеть. Поскольку мера таких матриц положительна при всех ε , то пространство содержит конечную ε -сеть при любом ε . Необходимость – очевидна.

Точно так же, но уже с помощью эргодической теоремы, доказывается общая

ТЕОРЕМА. *Всякая борелевская вероятностная мера M на множестве матриц расстояний R , инвариантная и эргодическая относительно действия S_∞ и удовлетворяющая условию (*), совпадает с мерой M_μ для некоторой метрической тройки (X, ρ, μ) .*

Множество всех мер, описанных теоремой, обозначим через $\mathbb{M}$. Оно, таким образом, и служит множеством классов изоморфизма метрических троек.

Введем слабую топологию на пространстве мер $\mathbb{M}$, индуцированную слабой топологией на R . Из предыдущего следует, что тем самым введена топология в пространстве классов изоморфизма метрических троек. Возможно и более полное описание мер из множества $\mathbb{M}$. Заметим, например, что матричные элементы (стоящие выше главной диагонали), вообще говоря, не являются независимыми относительно мер $M \in \mathbb{M}$ – в этом легко убедиться, рассмотрев совместное распределение трех элементов $r_{1,2}$, $r_{1,3}$, $r_{2,3}$, подчиняющихся неравенству треугольника. Более того, элементы одной строки (например, первой) также не являются, вообще говоря, независимыми, так как соответствующая одной строке мера – S_∞ -инвариантна, но не эргодична. Поучительно рассмотреть, например, меру M_μ , соответствующую единичному кубу в $\mathbb{R}^n$, снабженному лебеговой мерой и евклидовой метрикой. Еще интересней дать описание меры M_μ для тройки $(C[0, 1], \rho, w)$, где ρ – обычная метрика, порожденная $\max$ -нормой на $C[0, 1]$, а w – винеровская мера. Все это дает новые примеры эргодических, инвариантных относительно симметрической группы мер на пространстве бесконечных матриц. Имеются более глубокие свойства независимости и асимптотической независимости мер из $\mathbb{M}$. Упомянем попутно, что описанию мер, инвариантных относительно того или иного действия симметрической группы, мер на пространстве бесконечных матриц, вне связи с рассматриваемым здесь вопросом, посвящен ряд работ см. [8], [9]; описание в [9] – неполно, хотя метод отыскания мер (эргодический метод), изложенный там, применим и к нашему случаю. Подобные задачи имеют применения в теории вероятности и комбинаторике. Инвариантные и эргодические относительно действия симметрической группы меры на матрицах расстояний можно было бы назвать “виртуальными метрическими тройками”. Очень интересен вопрос о поведении спектров случайных матриц расстояний, распределенных в соответствии с такими мерами или мерами из $\mathbb{M}$.

Функция $N(\varepsilon)$, минимизирующая при заданном ε число N в условии (*), есть не что иное, как ε -энтропия метрического пространства с мерой (т.е. минимальное число точек, объединение ε -окрестностей которых имеет меру не меньшую, чем $1 - \varepsilon$),

рассмотренная еще в первых работах А. Н. Колмогорова по теории информации [7] и многократно переоткрывавшаяся позже.

На меру $M_\mu = \phi(\mu^\infty)$ можно также смотреть как на инвариант метрики ρ , как функции от двух переменных на пространстве $X \times X$ относительно одновременного действия (на каждый из аргументов) группы преобразований пространства с мерой (X, μ) , сохраняющих меру μ .

Задача о метрической (в смысле теории меры) классификации измеримых функций одного аргумента решена В. А. Рохлиным, полной системой инвариантов служат распределение функции и инварианты разбиения на прообразы точек; однако классификация функций двух и более переменных остается не решенной в целом. Случай метрик – особый, здесь, как мы видели, полным инвариантом классов служит совместное распределение парных расстояний независимых счетных систем точек. Совместные распределения конечных наборов матричных элементов относительно мер доставляют конечно-частичные инварианты, которых, вообще говоря, недостаточно для восстановления всей меры.

Общий план исследований (см. [3]) состоит в том, чтобы по мере M_μ заключать о тех или иных инвариантных относительно изоморфизма свойствах тройки (X, ρ, μ) или о свойствах (X, ρ) и, наоборот, задавая меру $M_\mu \in \mathbb{M}$, строить пространства с заданными свойствами. Кроме того, вводя ту или иную топологию или метрику на мерах из $\mathbb{M}$, можно изучать аппроксимационные и асимптотические свойства метрических троек, точнее, классов их метрического изоморфизма. В качестве одного из примеров мы применяем ниже этот подход к пространству Урысона.

3. Случайные метрики на натуральном ряде и пространство Урысона

Взглянем на наше построение с иной стороны. Всякая матрица расстояний порождает (полу)метрику на натуральном ряде, а пополнение по ней дает польское пространство. Если матрица – случайна, то и метрика на натуральном ряде – случайна. Но если распределение этих матриц, т.е. мера μ на R , принадлежит $\mathbb{M}$, мы получаем случайные метрики на натуральном ряде, соответствующие случайному выбору различных счетных всюду плотных множеств одного и того же пространства, причем элементы этих множеств выбираются независимо и с одним и тем же распределением. Посмотрим, как получить таким образом пространство Урысона, снабженное мерой. Описать матрицу расстояний для какой-нибудь счетной всюду плотной последовательности в пространстве Урысона – и значит определить это пространство, что сделано в [1]. Но можно задавать не просто одну матрицу расстояний, т.е. не одно, ничем не выделенное счетное всюду плотное множество будущего пространства, а описывать случайное плотное множество относительно некоторой меры с полным носителем в этом пространстве, т.е. меру $M \in \mathbb{M}$ на R или класс метрического изоморфизма, соответствующий тройке (U, ρ, μ) , где (U, ρ) – пространство Урысона, μ – мера с полным носителем на нем. Произвольность выбора плотного счетного множества в (U, ρ) заменяется произвольностью выбора меры на нем с полным носителем, задающей счетное множество статистически. Но при этом мы видим новые интересные свойства пространства.

ТЕОРЕМА. Пусть (X, ρ, μ) – метрическая тройка и $M \in \mathbb{M}$ – соответствующая ей мера на R – пространстве всех бесконечных матриц расстояний. Если

для произвольных n , матрицы расстояний $D = (d_{k,s})$, $k, s = 1, \dots, n$, порядка n и положительного ε существует такой номер N , что

$$M\{r \in R : \text{существуют такие натуральные } i_1, i_2, \dots, i_n < N = N(D, \varepsilon), \\ \text{что } |r_{i_s, i_k} - d_{k,s}| < \varepsilon, \ k, s = 1, \dots, n\} > 1 - \varepsilon,$$

то (X, ρ) есть пространство Урысона, а μ – мера с полным носителем на нем. Обратно, мера M_μ , отвечающая тройке (U, ρ, μ) , где (U, ρ) – пространство Урысона, а μ – мера на нем с плотным носителем, обладает этим свойством.

Доказательство этой теоремы сводится к доказательству следующего варианта основной леммы, доказанной в [1]: пополнение счетного метрического пространства (Y, ρ) есть пространство Урысона тогда и только тогда, когда для любых его точек $x_1, x_2, \dots, x_n \in Y$, любого числа ε и любой матрицы расстояний $D = (d_{i,k})$ порядка $n+1$, у которой $d_{i,k} = \rho(x_i, x_k)$, $i, k = 1, 2, \dots, n$, существует такая точка $x_{n+1} \in Y$, что элементы матрицы D' расстояний точек $(x_1, x_2, \dots, x_{n+1})$ отличаются (в последнем столбце) от элементов матрицы D не более чем на ε .

Из этой теоремы и инвариантности мер M_μ относительно S_∞ вытекает такое утверждение.

СЛЕДСТВИЕ 1. Носитель меры $M_\mu \in \mathbb{M}$, отвечающей метрической тройке (X, ρ, μ) , совпадает со всем R тогда и только тогда, когда (X, ρ) – универсальное пространство Урысона, а μ – борелевская вероятностная мера на нем с полным носителем.

Совпадение носителя (т.е. минимального слабо замкнутого множества полной меры) меры M_μ со всем пространством R означает, что для любого натурального n , всякой матрицы расстояний $D = (d_{i,k})$ порядка n и любого положительного ε

$$M_\mu\{r \in R : |r_{i,k} - d_{i,k}| < \varepsilon, \ i, k = 1, \dots, n\} > 0.$$

Из этого следствия и свойств множества мер с полным носителем на метрическом пространстве вытекает

СЛЕДСТВИЕ 2. В пространстве классов метрических троек классы троек (U, ρ, μ) , где U – пространство Урысона, образуют всюду плотное G_δ -множество.

Тем самым, среди классов изоморфизма метрических троек классы троек (X, ρ, μ) с пространством Урысона в качестве X являются типичными. Группа изометрий $G(U)$ пространства Урысона U действует на пространстве мер на нем, т.е. на мерах на $\mathbb{M}$ с полным носителем. Это действие представляет интерес с точки зрения изучения группы $G(U)$. Заметим еще, что инвариантное описание метрической тройки, в которой пространство обладает свойством универсальности, но без урысоновской однородности (как в примерах Фреше–Банаха–Мазура), видимо, не имеет столь простой формулировки, подобной следствию 1. Задание мер на метрическом пространстве с помощью совместных распределений попарных расстояний (т.е. с помощью мер M_μ) не является традиционным и поднимает ряд новых вопросов, в частности:

ВОПРОС. *Дать явное описание мер с полным носителем на пространстве Урысона с помощью теоремы, приведенной выше; иначе говоря, описать непосредственно меру M_μ на R как инвариант тройки (U, ρ, μ) , где μ – какая-либо мера с полным носителем на U . Существует ли какой-либо аналог винеровской или гауссовских мер на пространстве Урысона?*

Последний вопрос сводится к определению аналога гауссовских мер на выпуклом конусе R матриц расстояний; здесь может быть полезным эргодический метод [9], который уже использовался в подобных задачах.

В заключение заметим, что в духе предыдущих рассмотрений уместно непосредственно использовать матрицы расстояний в эргодической теории и теории динамических систем, например, следующим образом. Пусть в метрическом пространстве (X, ρ) задан минимальный строго эргодический гомеоморфизм T . Тогда по бесконечной матрице расстояний любой из его орбит $-(T^n x, n \in \mathbb{Z})$ можно, как и выше, восстановить всю систему, т.е. пространство (X, ρ) и гомеоморфизм T , а также единственную инвариантную относительно этого гомеоморфизма меру μ . Точно также определяется эргодическая мера на пространстве матриц расстояний R , т.е. случайная матрица расстояний. Эта мера, как и ранее, является образом при отображении $X^\infty \rightarrow R$ некоторой стационарной (т.е. инвариантной относительно двустороннего сдвига) меры на X^∞ , но уже, вообще говоря, не являющейся произведением мер, как было до сих пор. Таким способом по одной орбите и ее матрице расстояний можно получать любые инварианты динамических систем в метрическом пространстве.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Urysohn P. S. Sur un espace metrique universel // Bull. Sci. Math. 1927. V. 51. P. 1–38; рус. перев.: Урысон П. С. Об универсальном метрическом пространстве // В сб. П. С. Урысон, Труды по топологии, т. 2. М.: ГИТТЛ, 1951.
- [2] Berestovsky V. N., Vershik A. M. Manifolds with intrinsic metric, and nonholonomic spaces // Representation Theory and Dynamical Systems / ed. A. M. Vershik. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1992. P. 253–267.
- [3] Gromov M. Metric Structures on Riemannian and Non-Riemannian Spaces. Basel-Boston: Birkhäuser, 1998.
- [4] Люстерник Л. А., Соболев В. И. Элементы функционального анализа. М., 1951.
- [5] Рохлин В. А. Об основных понятиях теории меры // Матем. сб. 1949. Т. 25 (67). № 1. С. 107–150.
- [6] Халмош П. Теория меры. М.: ИЛ, 1950.
- [7] Колмогоров А. Н. Теория передачи информации // А. Н. Колмогоров. Теория информации и теория алгоритмов. М., 1987. С. 29–58.
- [8] Aldous D. J. Exchangeability and related topics // Lecture Notes in Math. 1985. V. 1117. P. 1–198.
- [9] Вершик А. М. Описание инвариантных мер для действий некоторых бесконечномерных групп // Докл. АН СССР. 1974. Т. 218. № 4. С. 749–752.
- [10] Kechris A. Actions of Polish Groups and Classification Problems // Preprint Caltech., 1997.

Математический институт РАН,
Санкт-Петербург

Поступила в редакцию
01.08.1998