Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. А. Туганбаев, Кольца слабой глобальной размерности единица и дистрибутивно порожденные кольца, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 167–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm690>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 107.22.136.117

26 апреля 2023 г., 14:23:53

КОЛЬЦА СЛАБОЙ ГЛОБАЛЬНОЙ РАЗМЕРНОСТИ ЕДИНИЦА И ДИСТРИБУТИВНО ПОРОЖДЕННЫЕ КОЛЬЦА

А. А. ТУГАНБАЕВ

Модуль называется *дистрибутивно порожденным*, если он является суммой своих дистрибутивных подмодулей. Кольцо с дистрибутивной решеткой идеалов называется *арифметическим* кольцом. Кольцо называется *инвариантным справа*, если все его правые идеалы являются идеалами. Пишут $\text{w.gl. dim}(A) \leq 1$, если все подмодули плоских правых (левых) A -модулей являются плоскими. Если A коммутативно, то $\text{w.gl. dim}(A) \leq 1 \iff A$ – дистрибутивное полупервичное кольцо [1].

ТЕОРЕМА. Пусть R – полупервичное кольцо, Морита-эквивалентное инвариантному кольцу A . Тогда $\text{w.gl. dim}(R) \leq 1 \iff R$ – дистрибутивно порожденное справа кольцо $\iff R$ – дистрибутивно порожденное слева кольцо $\iff R$ – арифметическое кольцо $\iff \text{w.gl. dim}(A) \leq 1 \iff A$ дистрибутивно порождено $\iff A$ – дистрибутивное кольцо.

Пусть T – такое подмножество кольца A , что существуют кольцо A_T и кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow A_T$ такие, что все элементы множества $f(T)$ обратимы в A_T , $A_T = \{f(a)[f(t)]^{-1} \mid a \in A, t \in T\}$ и $\text{Ker}(f) = \{a \in A \mid at = 0\}$ для некоторого $t \in T$. В этом случае A_T называется *правым кольцом частных* кольца A относительно T , и для любого правого идеала B кольца A через B_T обозначается правый идеал $f_T(B)A_T$ кольца A_T . Если $T = A \setminus M$, где M – правый идеал кольца A , то будем писать A_M и B_M вместо A_T и B_T соответственно. Кольцо A называется *локализуемым справа*, если для любого максимального правого идеала M кольца A правое кольцо частных A_M существует.

ЛЕММА 1. Пусть A и R – Морита-эквивалентные кольца, $\mathbf{F}: \mathbf{MOD}\text{-}A \rightarrow \mathbf{MOD}\text{-}R$ – соответствующая Морита-эквивалентность категорий. (1) Для любого правого A -модуля M эквивалентность $\mathbf{F}$ индуцирует изоморфизм решетки подмодулей модуля M на решетку подмодулей R -модуля $\mathbf{F}(M)$. (2) Правый A -модуль M является плоским тогда и только тогда, когда правый R -модуль $\mathbf{F}(M)$ является плоским. (3) Существует такой изоморфизм φ решетки идеалов кольца A на решетку идеалов кольца R , что $\varphi(A_1 A_2) = \varphi(A_1)\varphi(A_2)$ для любых идеалов A_1 и A_2 кольца A . (4) A – арифметическое кольцо $\iff R$ – арифметическое кольцо. (5) A – полупервичное кольцо $\iff R$ – полупервичное кольцо. (6) $\text{w.gl. dim}(R) \leq 1 \iff \text{w.gl. dim}(A) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1), (2) и (3) доказаны в [2; 21.7], [2; с. 268] и [2; с. 267] соответственно; (4) и (5) следуют из (3); (6) следует из (1) и (2).

ЛЕММА 2. Пусть A – локализуемое справа кольцо. (1) $(X + Y)_M = X_M + Y_M$ для любых правых идеалов X и Y кольца A . (2) Все правые кольца частных кольца A относительно максимальных правых идеалов являются локальными кольцами. (3) Если B – правый идеал кольца A , то B – дистрибутивный правый идеал $\iff$ для любого максимального правого идеала M кольца A правый идеал B_M правого кольца частных A_M является дистрибутивным правым идеалом в A_M .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) очевидно; (2) и (3) доказаны в [3; 5.20(14), 6.23(3)].

ЛЕММА 3. Пусть A – дистрибутивно порожденное справа кольцо. (1) Кольцо эндоморфизмов любого конечно порожденного проективного правого A -модуля является дистрибутивно порожденным справа кольцом. (2) Любое кольцо R , Морита-эквивалентное кольцу A , дистрибутивно порождено справа. (3) Если A инвариантно слева, то любое кольцо, Морита-эквивалентное кольцу A , дистрибутивно порождено.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

(4) Если A – локализуемое справа кольцо, то A дистрибутивно справа. (5) Если A инвариантно справа и все нильпотентные элементы кольца A центральны, то A дистрибутивно справа.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. (1) доказано в теореме 1 из [4]; (2) следует из (1) и того, что R изоморфно кольцу эндоморфизмов конечно порожденного проективного правого A -модуля [2; 22.4].

(3) Так как A – инвариантное слева дистрибутивно порожденное справа кольцо, то A дистрибутивно порождено. По (2) кольцо, Морита-эквивалентное кольцу A , дистрибутивно порождено.

(4) Пусть M – максимальный правый идеал кольца A . По лемме 2(3) достаточно доказать, что A_M дистрибутивно справа. Так как A – дистрибутивно порожденное справа кольцо с единицей, то существуют такие дистрибутивные правые идеалы $B_1, \dots, B_n$ кольца A , что $A_A = \sum_{i=1}^n B_i$. Из леммы 2(1) и леммы 2(3) следует, что A_M является суммой своих дистрибутивных правых идеалов $(B_1)_M, \dots, (B_n)_M$. По лемме 2(2) A_M локально. Поэтому A_M совпадает с одним из своих дистрибутивных правых идеалов $(B_i)_M$.

(5) Каждое инвариантное справа кольцо, у которого все нильпотентные элементы центральны, локализуемо справа [3; 5.22(7)]. Поэтому (5) следует из (4).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть A – инвариантное кольцо, у которого все нильпотентные элементы центральны, и пусть R – кольцо, морита-эквивалентное кольцу A . Равносильны условия: (1) R – дистрибутивно порожденное справа кольцо; (2) R – дистрибутивно порожденное слева кольцо; (3) R – арифметическое кольцо; (4) A – дистрибутивное кольцо; (5) A – дистрибутивно порожденное кольцо.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (1), (2) и (5) следует из лемм 3(2) и 3(3). Эквивалентность (3) и (4) следует из леммы 1(4). (4) $\implies$ (5) очевидно. (5) $\implies$ (4) следует из леммы 3(5).

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 2. Пусть A – инвариантное кольцо, у которого все нильпотентные элементы центральны, и пусть R Морита-эквивалентно A . Равносильны условия: (1) $w.gl.\dim(R) \leq 1$; (2) R – дистрибутивно порожденное справа полупервичное кольцо; (3) R – дистрибутивно порожденное слева полупервичное кольцо; (4) R – арифметическое полупервичное кольцо; (5) A – дистрибутивно порожденное полупервичное кольцо; (6) A – дистрибутивное полупервичное кольцо; (7) $w.gl.\dim(A) \leq 1$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Эквивалентность (1) и (7) следует из леммы 1(6). Эквивалентность (2), (3), (4), (5) и (6) следует из предложения 1. Эквивалентность (6) и (7) доказана в теореме 7.30 из [3]. (4) $\implies$ (5) очевидно. (5) $\implies$ (4) следует из леммы 3(5).

Теорема следует из теперь из леммы 1(5) и предложения 2.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] C. U. Jensen // Proc. Amer. Math. Soc. 1964. V. 15. №6. P. 951–954. [2] F. Anderson, K. Fuller. Rings and Categories of Modules. Berlin: Springer-Verlag, 1973. [3] A. A. Tuganbaev. Semidistributive Modules and Rings. Dordrecht: Kluwer, 1998. [4] A. A. Туганбаев // Матем. заметки. 2000. Т. 68. № 4. С. 568–578.

Московский энергетический институт
E-mail: askar@tuganbaev.mcsme.ru

Принято редколлегией
23.09.2003