Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. В. Щепин, Об отображениях двумерной сферы, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 169–170

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm691>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 07:13:16

ОБ ОТОБРАЖЕНИЯХ ДВУМЕРНОЙ СФЕРЫ

Е. В. ШЕПИН

Х. Хопф в работе [1] доказал, что для всякого отображения $f: X \rightarrow X$ локально связного unicoherentного континуума X и для всякого отображения $g: X \rightarrow Y$ в одномерный континуум Y найдется $x \in X$, для которой $g(x) = g(f(x))$. Если в этой теореме в качестве X взять двумерную сферу S^2 , а в качестве f — инволюцию, то теорема Хопфа влечет, что всякое отображение из S^2 в одномерный континуум склеивает пару антиподов. Этот же результат нетрудно получить из теоремы Шклярского [2] о том, что для любого конечного, кратности 2, замкнутого покрытия сферы S^2 и любого отображения $f: S^2 \rightarrow S^2$ найдется $x \in S^2$, для которой x и $f(x)$ принадлежат одному и тому же элементу покрытия. В настоящей заметке эта теорема Хопфа–Шклярского обобщается на отображения в компакты *нижней размерности* единица.

Нижней размерностью компакта называем минимум из его размерностей по всем группам коэффициентов. *Накрытие*м называем локально-тривиальное расслоение с дискретным слоем. Континуум X называем *ненакрываемым*, если он не имеет нетривиальных (отличных от гомеоморфизмов) связных накрытий. Другими словами, всякое накрытие ненакрываемого компакта допускает сечение.

ЛЕММА 1. Пусть $f: X \rightarrow Y$ — непрерывное сюръективное отображение ненакрываемого компакта X . И пусть $p: Y' \rightarrow Y$ — накрытие. Тогда существует непрерывное отображение $f': X \rightarrow Y'$ такое, что $f = pf'$. Если p не имеет сечений, то ограничение p на образ $f'(X)$ не инъективно.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $Z = \{(x, y) \in X \times Y' \mid f(x) = p(y)\}$. Тогда ограничение проекции произведения $X \times Y' \rightarrow X$ на Z является локальным гомеоморфизмом и в силу ненакрываемости X допускает сечение. Композиция этого сечения с проекцией произведения $X \times Y' \rightarrow Y'$ и является искомым отображением f' . Если же ограничение p на образ инъективно, то формула $y \rightarrow f'(f^{-1})(y)$ задает однозначное непрерывное отображение, являющееся сечением для p .

Если для любой группы G выполняется неравенство $\dim_G X \leq \dim_G Y$, то говорят, что X имеет меньший, чем Y , *размерностный тип*, и пишут $\text{DIM } X \leq \text{DIM } Y$ (см. [3]).

ЛЕММА 2. Для любого непрерывного отображения $f: X \rightarrow Y$ ненакрываемого компакта X существуют ненакрываемый компакт Y' размерностного типа $\text{DIM } Y' \leq \text{DIM } Y$ и такие отображения $f': X \rightarrow Y'$ и $c: Y' \rightarrow Y$, что $f = cf'$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По трансфинитной индукции будем строить обратный спектр компактов $\{Y_\alpha, c_{\alpha, \beta}\}$, в котором короткие проекции $c_{\alpha+1, \alpha}$ являются погружениями (локально инъективны), и трансфинитную последовательность отображений $f_\alpha: X \rightarrow Y_\alpha$ так, что $c_{\alpha, \beta} f_\alpha = f_\beta$ при любых $\alpha > \beta$. Заметим, что в этом случае $\dim_G Y_\alpha \leq \dim_G Y$ при любом α , поскольку погружения не уменьшают, а предельные переходы не повышают размерностей.

Полагаем $Y_1 = Y$ и $f_1 = f$. Пусть компакты и отображения с индексами $\leq \alpha$ уже построены. Если компакт Y_α не имеет накрытий, то полагаем $Y' = Y_\alpha$, $f' = f_\alpha$ и $c = c_{\alpha, 1}$ и лемма доказана. Если же имеется нетривиальное накрытие $p: X^+ \rightarrow X_\alpha$, то в качестве $f_{\alpha+1}$ берем какое-нибудь поднятие f_α , существующее благодаря лемме 1, а в качестве $Y_{\alpha+1}$ берем $f_{\alpha+1}(X)$. Проекция $c_{\alpha+1, \alpha}$ определяется как ограничение накрытия p . Заметим, что в данном случае отображение $c_{\alpha+1, \alpha}$ не является инъективным, иначе накрытие p имело бы непрерывное сечение (лемма 1).

В случае предельного трансфинита α пространство Y_α и отображение f_α определяются по непрерывности, т.е. $Y_\alpha = \text{invlim}_{\gamma < \beta < \alpha} \{Y_\beta; c_{\beta, \gamma}\}$ и $f_\alpha = \text{invlim}_{\beta < \alpha} f_\beta$ и $c_{\alpha, \beta} = \text{invlim}_{\gamma < \alpha} c_{\gamma, \beta}$.

Проведя конструкцию для всех счетных трансфинитов, рассмотрим предел Y_ω получившегося обратного спектра. Этот предел является непрерывным образом метризуемого компакта X и потому сам является метризуемым компактом. Напомним, что в силу Спектральной теоремы [4] лю-

бые два трансфинитных спектра из компактов с гомеоморфными пределами содержат изоморфные подспектры. Применяя это утверждение к паре, состоящей из стационарного спектра, все пространства которого гомеоморфны X_ω , и построенного выше, заключаем, что в построенном спектре имеются гомеоморфизмы, чего не может быть. Следовательно, наше построение должно оборваться на каком-то счетном трансфините.

ЛЕММА 3. *Ненакрываемый пеановский континуум нижней размерности 1 не содержит окружности.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть X имеет размерность 1 по отношению к группе G и содержит компакт S , гомеоморфный окружности. Пространство Эйленберга–Маклейна $K(G, 1)$ содержит нестягиваемую окружность. Рассмотрим гомеоморфное отображение из S на эту нестягиваемую окружность и продолжим это отображение до отображения $f: X \rightarrow K(G, 1)$. Мы получим отображение из X в $K(G, 1)$, нетривиальное на фундаментальной группе. Рассмотрим pull-back от универсального накрытия комплекса Эйленберга–Маклейна относительно f . Полученное накрытие не может быть тривиально. Действительно, в противном случае оно имело бы сечение и наше отображение пропусклось бы через универсальное накрытие и было бы тривиально на фундаментальной группе.

ЛЕММА 4. *Локально связный континуум, не содержащий окружности, одномерен, вложим в плоскость и стягиваем.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Действительно, ведь континуум с описанными свойствами является дендритом (см. [5]).

ТЕОРЕМА 1. *Всякое непрерывное отображение сферы S^2 в компакт нижней размерности 1 склеивает пару антиподов.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Так как сфера ненакрываема, то, благодаря лемме 2, любое отображение $f: S^2 \rightarrow X$ в компакт нижней размерности 1 представляется в виде композиции $f = gh$, где $h: S^2 \rightarrow X'$ и X' ненакрываем. Так как X' является пеановским как образ сферы, то в силу леммы 3 X' – дендрит. А так как всякий дендрит – плоский (лемма 4), то h , а значит и f , склеивает пару антиподов по теореме Борсука–Улама.

Так как всякий дендрит стягиваем, то приведенное выше доказательство позволяет получить дополнительно такой результат.

ТЕОРЕМА 2. *Континуум нижней размерности 1 асферичен.*

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Н. Hopf // Fund. Math. 1937. V. 28. P. 33–57. [2] Д. О. Шклярский // Матем. сб. 1945. Т. 16 (125). С. 125–128. [3] Е. В. Щепин // УМН. 1998. Т. 53. № 5. С. 115–212. [4] Е. В. Щепин // УМН. 1976. Т. 31. № 5. С. 191–226. [5] К. Куратовский. Топология. Т. 2. М.: Мир, 1969.