Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. И. Яблокова, О собственных колебаниях тела с концентрированными массами критической плотности, расположенными непериодически на поверхности, *УМН*, 2003, том 58, выпуск 6, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm692>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.185.249

26 апреля 2023 г., 14:59:21

**О СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЯХ ТЕЛА
С КОНЦЕНТРИРОВАННЫМИ МАССАМИ
КРИТИЧЕСКОЙ ПЛОТНОСТИ, РАСПОЛОЖЕННЫМИ
НЕПЕРИОДИЧЕСКИ НА ПОВЕРХНОСТИ**

Е. И. Яблокова

Постановка задачи. Мы рассматриваем спектральную задачу для стационарной линейной системы теории упругости с быстро меняющимся типом граничных условий в области с большим количеством концентрированных масс около границы. Не предполагая периодичности микроструктуры области, автор рассматривает случай, когда плотность концентрированных масс имеет критическое значение. В статьях [1] и [2] рассматриваются похожие задачи в областях с концентрированными массами, расположенными периодически вдоль границы, в [3] – задача с непериодически расположенными “легкими” концентрированными массами.

Пусть $\Omega \subset \{x \in \mathbb{R}^d, x_d > 0\}$ – ограниченная область с гладкой границей $\partial\Omega$, $d \geq 3$. Полагаем, что $\partial\Omega = \overline{\Gamma_1} \cup \overline{\Gamma_2}$, где $\Gamma_2 \subset \{x_d = 0\}$, $\overline{\Gamma_2} = \overline{\Gamma_\varepsilon} \cup \overline{\gamma_\varepsilon}$, при этом $\Gamma_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{N_\varepsilon} \Gamma_\varepsilon^n$, где $\text{diam}(\Gamma_\varepsilon^n) \leq 2\varepsilon$, а расстояние между двумя множествами Γ_ε^n много больше ε ; ε – малый положительный параметр. Рассмотрим спектральную задачу

$$\begin{cases} \mathcal{L}_k[u_\varepsilon^K] + \lambda_\varepsilon^K \rho_\varepsilon(x) u_\varepsilon^{Kk} = 0 \text{ в } \Omega, \quad k = 1, \dots, d, \quad K = 1, 2, \dots, \\ (u_\varepsilon^I, u_\varepsilon^J)_{[L_{2,\rho_\varepsilon}(\Omega)]^d} \equiv \sum_{k=1}^d \int_{\Omega} u_\varepsilon^{Ik} \rho_\varepsilon u_\varepsilon^{Jk} dx = \delta_{IJ}, \\ u_\varepsilon^K = 0 \text{ на } \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1, \quad \sigma_k(u_\varepsilon^K) \equiv a_{kl}^{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon^{Kl}}{\partial x_i} \nu_j = 0 \text{ на } \gamma_\varepsilon, \end{cases} \quad (1)$$

по повторяющимся индексам предполагается суммирование от 1 до d . Здесь $\mathcal{L}_k[u_\varepsilon^K] \equiv \frac{\partial}{\partial x_j} \left(a_{kl}^{ij}(x) \frac{\partial u_\varepsilon^{Kl}}{\partial x_i} \right)$, $\nu = (\nu_1, \dots, \nu_d)$ – внешняя нормаль к границе $\partial\Omega$; $u_\varepsilon^K = (u_\varepsilon^{K1}, \dots, u_\varepsilon^{Kd})$, δ_{IJ} – символ Кронекера. Также предполагается выполнение условий $a_{kl}^{ij}(x) = a_{lk}^{ji}(x) = a_{il}^{kj}(x)$ и $\kappa_1 \xi_{ki} \xi_{ki} \leq a_{kl}^{ij}(x) \xi_{ki} \xi_{lj} \leq \kappa_2 \xi_{ki} \xi_{ki}$, где $\kappa_1, \kappa_2 = \text{const} > 0$, $x \in \Omega$, а $\{\xi_{ki}\}$ – действительные симметрические матрицы, a_{kl}^{ij} – ограниченные измеримые функции в Ω .

Обозначение $[H^1(\Omega, \Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1)]^d$ мы используем для множества вектор-функций из соболевского пространства $[H^1(\Omega)]^d$ с нулевым следом на $\Gamma_\varepsilon \cup \Gamma_1$.

Собственные значения $\{\lambda_\varepsilon^K, K = 1, 2, \dots\}$ занумерованы в порядке неубывания, т.е. $0 < \lambda_\varepsilon^1 \leq \dots \leq \lambda_\varepsilon^K \leq \dots$, и повторяются с учетом кратности. Мы рассматриваем специальную плотность вида $\rho_\varepsilon(x) = \begin{cases} 1 & \text{в } \Omega \setminus B_\varepsilon, \\ \varepsilon^{-2} & \text{в } \overline{\Omega \cap B_\varepsilon}, \end{cases}$ где $B_\varepsilon = \bigcup_{n=1}^{N_\varepsilon} B_\varepsilon^n$, а $B_\varepsilon^n = \{(x_1 - \eta_1^n)^2 + \dots + (x_d - \eta_d^n)^2 < \varepsilon^2\}$, при этом точка $p_\varepsilon^n = (\eta_1^n, \dots, \eta_d^n)$ принадлежит Γ_ε^n , $n = 1, \dots, N_\varepsilon$, таким образом, что $\overline{B_\varepsilon^n} \cap \partial\Omega = \Gamma_\varepsilon^n$. Множества B_ε^n назовем *концентрированными массами*; число концентрированных масс $N_\varepsilon = O(|\ln \varepsilon|^\alpha)$, $\alpha > 0$.

Переход к локальным координатам. Для изучения предельного поведения собственных значений задачи (1) перейдем к локальным координатам $\xi = \frac{x - p_\varepsilon^n}{\varepsilon}$. Обозначим $\mathbb{R}^{d+}$ полупространство $\{\xi \in \mathbb{R}^d : \xi_d > 0\}$.

Пусть полушар $B_1 = \{|\xi| < 1, \xi_d > 0\}$ является образом B_ε^n в локальных координатах ξ , аналогично $\Gamma_\xi = \{|\xi| < 1, \xi_d = 0\}$ – образ Γ_ε^n , $\gamma_\xi = \{\xi_d = 0\} \setminus \overline{\Gamma_\xi}$.

Пространство $[H(\mathbb{R}^{d+}, \Gamma_\xi)]^d$ определим как пополнение множества вектор-функций из пространства $[C^\infty(\mathbb{R}^{d+})]^d$, обращающихся в нуль в окрестности Γ_ξ , по следующей норме:

$$\|v\|_{[H(\mathbb{R}^{d+})]^d}^2 = \sum_{k=1}^d \int_{\mathbb{R}^{d+}} (\varepsilon^2 |v^k|^2 + |\nabla_\xi v^k|^2) d\xi.$$

Рассмотрим следующую спектральную задачу:

$$\begin{cases} \widetilde{\mathcal{L}}_k[U_0^K] + \Lambda_0^K \chi_{B_1} U_0^{K^k} = 0 & \text{в } \mathbb{R}^{d+}, \quad K = 1, 2, \dots, \quad k = 1, \dots, d, \\ \mathcal{L}_k[u_0^K] + \Lambda_0^K u_0^{K^k} = 0 & \text{в } \Omega, \\ U_0^K \rightarrow 0 & \text{при } |\xi| \rightarrow \infty, \quad \xi_d > 0, \quad U_0^K = 0 \text{ на } \Gamma_\xi, \\ \tilde{\sigma}_k(U_0^K) = -a_{kl}^{id}(\varepsilon\xi) \frac{\partial U_0^{K^l}}{\partial \xi_i} = 0 & \text{на } \gamma_\xi, \\ \sigma_k(u_0^K) = 0 & \text{на } \partial\Omega, \end{cases} \quad (2)$$

где $\widetilde{\mathcal{L}}_k[U_0^K] \equiv \frac{\partial}{\partial \xi_j} \left(a_{kl}^{ij}(\varepsilon\xi) \frac{\partial U_0^{K^l}}{\partial \xi_i} \right)$, χ_{B_1} — характеристическая функция множества B_1 . Собственные функции $\{U_0^K \in [H(\mathbb{R}^{d+})]^d, K = 1, 2, \dots\}$ образуют ортогональный базис в $[L_2(B_1)]^d$, а $\{u_0^K \in [H^1(\Omega)]^d, K = 1, 2, \dots\}$ — в $[L_2(\Omega)]^d$. Собственные значения $\{\Lambda_0^K, K = 1, 2, \dots\}$ занумерованы в порядке неубывания и повторяются в соответствии с их кратностью.

Основной результат. Используя спектральную теорему о предельном поведении спектров положительных самосопряженных компактных операторов, определенных на различных гильбертовых пространствах, зависящих от малого параметра (см. теорему 1.9 гл. III в [4]), доказываем следующую оценку для разности собственных значений задач (1) и (2).

ТЕОРЕМА 1. Для соответствующих собственных значений λ_ε^K и Λ_0^K задач (1) и (2) при указанных предположениях имеет место следующая оценка:

$$|\lambda_\varepsilon^K - \Lambda_0^K| \leq C_K |\ln \varepsilon|^{\frac{1}{d}-1+\alpha},$$

где константы C_K не зависят от ε .

В заключение автор выражает глубокую признательность Г. А. Чечкину за постановку задачи и внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Г. А. Чечкин // УМН. 1995. Т. 50. №4. С. 105–106. [2] М. Lobo, E. Pérez // C. R. Acad. Sci. Paris. Sér. II b. 1999. V. 327. P. 771–776. [3] М. Е. Перес, Г. А. Чечкин, Е. И. Яблокова (Доронина) // УМН. 2002. Т. 57. №6. С. 195–196. [4] О. А. Олейник, Г. А. Иосифьян, А. С. Шамаев. Математические задачи теории сильно неоднородных упругих сред. М.: МГУ, 1990.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова
E-mail: eidor@rambler.ru, edoron@it.ru

Принято редколлегией
23.09.2003