Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Зудилин, Больше формул рамануджанова типа для $1/\pi^2$, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 3, 211–212

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm6920>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.80.97.219

26 апреля 2023 г., 04:22:05

Больше формул рамануджанова типа для $1/\pi^2$

В. В. Зудилин

Одним из ярких достижений в истории числа π являются представления $1/\pi$ в виде быстро сходящихся рядов, открытые Ш. Рамануджаном [1] в 1914 г. Хотя сам Рамануджан не объяснил, каким образом он получил эти ряды, он указал на то, что они связаны с так называемыми в современной терминологии ‘теориями эллиптических функций с альтернативными базами’. Первые математически строгие доказательства тождеств Рамануджана из [1], включая обобщения, были получены Дж. и П. Борвейнами [2] и Д. и Г. Чудновскими [3] (см. также [4] и [5]). Одним из стандартных в наши дни примеров формулы рамануджанова типа является знаменитая формула Чудновских [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n (\frac{1}{2})_n (\frac{5}{6})_n}{n!^3} (545140134n + 13591409) \cdot \frac{(-1)^n}{53360^{3n}} = \frac{3 \cdot 53360^2}{2\pi\sqrt{10005}}, \quad (1)$$

которая позволила им удерживать рекорд вычисления π на протяжении 1989–94 гг. Здесь $(a)_n = \Gamma(a+n)/\Gamma(a) = a(a+1)\cdots(a+n-1)$ при $n \geq 1$ и $(a)_0 = 1$ – символ Похгаммера. Совсем недавно с помощью другого метода Х. Гиллере [6], [7] удалось не только доказать некоторые тождества Рамануджана, но и вывести аналогичные быстро сходящиеся ряды для $1/\pi^2$. В настоящей заметке мы указываем простой алгоритм генерирования формул типа Рамануджана–Гиллеры для $1/\pi^2$ на основе известных формул для $1/\pi$.

Общая форма рамануджанова ряда для $1/\pi$ имеет следующий вид:

$$\alpha \cdot v(z_0) + \beta \cdot \theta v(z_0) = \frac{1}{\pi}, \quad \theta = z \frac{d}{dz}, \quad (2)$$

где α , β и z_0 – некоторые алгебраические числа, а $v(z)$ – аналитическое решение (в окрестности нуля) некоторого ‘арифметически хорошего’ линейного дифференциального уравнения 3-го порядка, нормализованное условием $v(0) = 1$. Такое дифференциальное уравнение *всегда* является (симметрическим) квадратом дифференциального уравнения 2-го порядка, скажем $\theta^2 u + A(z)\theta u + B(z)u = 0$, $A(z), B(z) \in \mathbb{Q}(z)$. Иными словами, выполнено $v(z) = u(z)^2$, где $u(z)$ – аналитическое решение линейного дифференциального уравнения 2-го порядка. В частности, отсюда получаем

$$v = u^2, \quad \theta v = 2u \theta u. \quad (3)$$

Рассмотрим четвертую степень того же самого дифференциального уравнения 2-го порядка. Его аналитическое в окрестности нуля решение имеет вид $w(z) = u(z)^4$, так что

$$w = u^4, \quad \theta w = 4u^3 \theta u, \quad \theta^2 w = 12u^2 (\theta u)^2 + 4u^3 \theta^2 u = 12u^2 (\theta u)^2 - 4Au^3 \theta u - 4Bu^4. \quad (4)$$

Сравнивая (3) и (4), находим

$$v^2 = w, \quad v \theta v = \frac{1}{2} \theta w, \quad (\theta v)^2 = \frac{4}{3} Bw + \frac{1}{3} A \theta w + \frac{1}{3} \theta^2 w. \quad (5)$$

Возводя обе части равенства (2) в квадрат и используя (5), мы в итоге приходим к равенству

$$\left(\alpha^2 + \frac{4}{3} B(z_0) \beta^2\right) \cdot w(z_0) + \left(\alpha + \frac{1}{3} A(z_0) \beta\right) \beta \cdot \theta w(z_0) + \frac{1}{3} \beta^2 \cdot \theta^2 w(z_0) = \frac{1}{\pi^2}, \quad (6)$$

которое и является формулой для $1/\pi^2$ типа Рамануджана–Гиллеры. Ясно, что возведение обеих частей (2) в куб, четвертую степень и т.д. приводит к аналогичным (но более громоздким) формулам для $1/\pi^3$, $1/\pi^4$, ...

Работа выполнена при поддержке стипендии Института математики им. Макса Планка (Бонн) и частичной поддержке фонда INTAS, грант № 03-51-5070.

Два иллюстрирующих примера связаны с тождествами

$$w(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(\frac{1}{3})_n (\frac{2}{3})_n}{n!^2} z^n = {}_3F_2 \left(\begin{matrix} \frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6} \\ 1, 1 \end{matrix} \middle| z \right)^2 = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{12}, \frac{5}{12} \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right)^4$$

для гипергеометрических рядов ${}_2F_1$ и ${}_3F_2$ (см. соответствующее определение, например, в [8]); здесь последовательность

$$a_n = \sum_{k=0}^n \frac{(\frac{1}{2})_k^3}{k!^3} \frac{(\frac{1}{2})_{n-k}}{(n-k)!} = \sum_{k=0}^n \left(\frac{(\frac{1}{4})_k (\frac{3}{4})_{n-k}}{k!(n-k)!} \right)^2$$

удовлетворяет полиномиальному рекуррентному уравнению

$$8(n+1)^3 a_{n+1} - (2n+1)(8n^2 + 8n + 5)a_n + 8n^3 a_{n-1} = 0$$

(см. [9; п. 1]). Функция $u(z) = {}_2F_1 \left(\begin{matrix} \frac{1}{12}, \frac{5}{12} \\ 1 \end{matrix} \middle| z \right)$ является аналитическим решением дифференциального уравнения

$$\theta^2 u - \frac{z}{2(1-z)} \theta u - \frac{5z}{144(1-z)} u = 0.$$

Записывая формулу Чудновских (1) в виде

$$545140134 \cdot \theta v(z_0) + 13591409 \cdot v(z_0) = \frac{3 \cdot 53360^2}{2\pi\sqrt{10005}},$$

$$\text{где } z_0 = -\frac{1}{53360^3} = -\frac{1}{(2^4 \cdot 5 \cdot 23 \cdot 29)^3},$$

согласно (6) имеем

$$\begin{aligned} &222883324273153467 \cdot \theta^2 w(z_0) + 16670750677895547 \cdot \theta w(z_0) \\ &+ 415634396862086 \cdot w(z_0) = \frac{160080^3}{\pi^2}. \end{aligned}$$

Менее громоздкий пример основан на формуле рамануджанова типа [3]

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\frac{1}{6})_n (\frac{1}{2})_n (\frac{5}{6})_n}{n!^3} (5418n + 263) \cdot \frac{(-1)^n}{80^{3n}} = 5418 \cdot \theta v(z_0) + 263 \cdot v(z_0) = \frac{640\sqrt{15}}{3\pi}, \quad (7)$$

где $z_0 = -1/80^3$. Возводя (7) в квадрат, получаем

$$198144387 \cdot \theta^2 w(z_0) + 28855107 \cdot \theta w(z_0) + 1400726 \cdot w(z_0) = \frac{240^3}{\pi^2}.$$

Список литературы

- [1] S. Ramanujan, *Quart. J. Math. Oxford* (2), **45** (1914), 350–372; *Collected papers of Srinivasa Ramanujan*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1927, 1962, 23–39. [2] J. M. Borwein, P. B. Borwein, *Pi and the AGM*, Canad. Math. Soc. Ser. Monogr. Adv. Texts, Wiley, New York, 1987. [3] D. V. Chudnovsky, G. V. Chudnovsky, *Ramanujan revisited* (Urbana-Champaign, Ill., 1987), Academic Press, Boston, MA, 1988, 375–472. [4] H. H. Chan, W.-C. Liaw, V. Tan, *J. London Math. Soc.* (2), **64**:1 (2001), 93–106. [5] H. H. Chan, S. H. Chan, Z. Liu, *Adv. Math.*, **186**:2 (2004), 396–410. [6] J. Guillera, *Adv. in Appl. Math.*, **29**:4 (2002), 599–603. [7] J. Guillera, *Ramanujan J.*, **11**:1 (2006), 41–48. [8] L. J. Slater, *Generalized hypergeometric functions*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1966. [9] В. В. Зудилин, *Матем. заметки*, **81**:3 (2007), 335–340.

В. В. Зудилин (W. Zudilin)

Московский государственный университет

им. М. В. Ломоносова;

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: wadim@mi.ras.ru

Представлено Д. В. Аносовым

Принято редколлегией

23.04.2007