Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Н. Колмогоров, Математические модели турбулентного движения несжимаемой вязкой жидкости, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 5–10

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm697>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 14:52:16

МАТЕМАТИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ТУРБУЛЕНТНОГО
ДВИЖЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. Н. Колмогоров

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Вводные замечания	5
§ 2. Поток Куэтта	7
§ 3. Новая модель	9
§ 4. Возможность дальнейших упрощений	10
Список литературы	10

§ 1. Вводные замечания

1.1. Хотя реальная турбулентность всегда существенно трехмерна, наши модели будут *двумерными*. Будет рассматриваться движение в *ограниченной* области, хотя эта ограниченность и будет создаваться искусственно при помощи постулирования периодичности. Эти ограничения позволяют считать нужные теоремы существования и единственности установленными (Ладженская [1]): дело идет действительно об изучении динамической системы в надлежащем функциональном фазовом пространстве. Практическая уверенность в том, что при этом типичные свойства реальной турбулентности не будут утеряны, подтверждается вычислительным экспериментом [2].

1.2. Реальные факты, лежащие в основе наших рассмотрений, таковы.

- А) При уменьшении вязкости ν стационарные (ламинарные) решения стационарных задач становятся обычно или (А1) неустойчивыми, или (А2) столь мало устойчивыми, что реально не наблюдаются. Реально наблюдаемые (турбулентные) решения, завися сложным образом от времени, подчиняются статистическому стационарному режиму, не зависящему практически от начального положения.
- В) При стремлении вязкости к нулю практически наблюдаемые решения становятся все менее гладкими. За счет такой изрезанности профиля скоростей дис-

Статья была, по-видимому, написана в конце пятидесятых годов. Текст носит окончательный характер, но список литературы не детализирован. Я. Г. Синай добавил к тексту несколько примечаний и включил в список литературы ряд названий, которые отвечают содержанию статьи.

сипания на единицу массы

$$\frac{1}{2}\nu \sum_{i,j} \left(\frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right)^2$$

даже в отдалении от стенок остается порядка

$$\frac{U^3}{L},$$

где U – типичная скорость, а L – типичная длина.

Явления типа А хорошо изучены в динамических системах с конечным числом степеней свободы. При одной степени свободы (фазовое пространство двумерно) это (А1) превращение устойчивой неподвижной точки 0 в неустойчивую с наматыванием траекторий, начинающихся вблизи 0, на предельный цикл:

или (А2) стягивание к 0 маленького цикла, за пределами которого траектории наматываются на большой цикл¹:

Явления типа В изучены лишь на уровне полуэмпирических теорий, приведших уже к большому ряду качественных и количественных результатов, хорошо оправдывающихся экспериментально.

В частности, по-видимому, вообще говоря, при любом $\varepsilon > 0$ порядок малости разностей скоростей Δu на расстоянии r остается меньше $r^{1/3-\varepsilon}$:

$$\frac{\Delta u}{r^{1/3-\varepsilon}} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad r \rightarrow 0$$

равномерно относительно ν . Таким образом, предельный режим при $\nu = 0$ следует представлять себе без разрывов для скоростей (см. [3]).

¹Для явлений такого типа используются термины “бифуркация Андронова”, “бифуркация Андронова–Хопфа”, “бифуркация Хопфа”. Подобные бифуркации происходят также в многочисленных системах и достаточно хорошо изучены. (Прим. Я. Г. Синая.)

§ 2. Поток Куэтта

Явления типа (А2) можно ожидать с достаточной уверенностью в обстановке, которую мы сейчас опишем. В полосе плоскости (x, y) , ограниченной прямыми $y = \pm a/2$, движение подчинено уравнениям²

$$\left. \begin{aligned} \frac{Du}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u \\ \frac{Dv}{Dt} &= -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

На прямых $y = \pm a/2$

$$u = \pm u_0, \quad v = 0. \quad (1')$$

Реальные явления между двумя движущимися плоскостями можно, по-видимому, имитировать достаточно хорошо, ограничившись функциями u, v, p , периодическими по x с достаточно большим периодом $2b$. Качественно та же картина получится, вероятно, и при любом b , например, $b = a$.

Ламинарное решение

$$u = \frac{2}{a} u_0 y \quad (2)$$

всегда устойчиво (см. [4]), но устойчивость его при малом ν , по-видимому, чрезвычайно слаба*. Турбулентный профиль средних скоростей $\bar{u}$ должен иметь вид

²Здесь $\frac{D}{Dt}$ означает субстанциональную производную по времени (см.: А.Н. Колмогоров. Уравнения турбулентного движения несжимаемой жидкости // Изв. АН СССР. Сер. физ. 1942. Т. 6, № 1–2. С. 56–58; Избр. труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 294–296; А.С. Монин, А.М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965, гл. III, раздел 6.2). (Прим. ред.)

*Напомним, что бесконечно малые возмущения φ ,

$$\psi = \psi_0 + \varphi,$$

при ψ_0 , зависящем только от y , подчиняются уравнению (Орра–Зоммерфельда – Я.Г. Синай)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \varphi - \frac{\partial \varphi}{\partial x} \psi_0^{\text{iii}} + \psi_0' \frac{\partial}{\partial x} \Delta \varphi = \nu \Delta \Delta \varphi.$$

При $\nu \rightarrow 0$ он вырождается в

$$u = \begin{cases} -u_0, & y = -a/2, \\ 0, & -a/2 < y < a/2, \\ u_0, & y = a/2. \end{cases}$$

Однако из полуэмпирической формулы³

$$\frac{u_0}{u_\tau} = A + B \log \frac{au_\tau}{\nu}$$

вытекает, что, положив

$$u_0 = B \log \frac{1}{\nu}, \quad (3)$$

получим при $\nu \rightarrow 0$

$$u_\tau \rightarrow 1.$$

По обычным полуэмпирическим концепциям, основанным на идеях Кармана, статистический режим решения при $\nu \rightarrow 0$ и условии (3) должен стремиться к определенному предельному невырожденному режиму равномерно в любой полосе

$$-\frac{a}{2} + \varepsilon < y < \frac{a}{2} - \varepsilon.$$

Вероятно, это так и в строгом математическом смысле, но, может быть, при несколько отличной функции

$$u_0 = f(\nu), \quad (3')$$

близкой к (3) лишь в смысле

$$\frac{\log f(\nu)}{\log \log(1/\nu)} \rightarrow 1.$$

Так как

$$\int_0^b v(x, y) dx = 0,$$

то законно положить

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x},$$

³В этом тексте А. Н. Колмогоров не объясняет смысла переменной τ и происхождение выписываемой ниже полуэмпирической формулы. Судя по другим материалам из его архива, τ есть безразмерная вертикальная координата, $\tau = \nu \frac{\partial \bar{u}}{\partial y} - pb_{xy}$, где p — давление, $b_{xy} = \overline{u'v'}$. (Прим. Я. Г. Синая.)

где ψ периодически по x с периодом b . Для ψ получим (вычитая из $\partial/\partial y$ от первого уравнения (1) $\partial/\partial x$ от второго)

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = \nu \Delta \Delta \psi. \quad (4)$$

Ограничиваясь решениями с

$$\int_{-a/2}^{a/2} u(x, y) dy = 0$$

и замечая, что ψ существенно лишь с точностью до константы, можно заменить краевые условия (1') на

$$\psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = \pm u_0 \quad (4')$$

при $y = \pm a/2$.

При конечном ν основная задача заключается в изучении инвариантных по отношению к (4) мер в пространстве $\psi(x, y)$, подчиненных (4').

§ 3. Новая модель

Изучение предельного поведения инвариантных мер при $\nu \rightarrow 0$ затруднительно в обстановке § 2 ввиду неясности с разумным выбором функции (3'). Вместо этого можно рассмотреть решения системы

$$\begin{cases} \frac{Du}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \Delta u + \gamma \sin\left(\frac{\pi}{a}y\right) \\ \frac{Dv}{Dt} = -\frac{\partial p}{\partial y} + \nu \Delta v \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \end{cases} \quad (5)$$

с периодами $2a$ и $2b$ соответственно по y и x и условиями

$$\int_{-a}^{+a} u(x, y) dy = \int_{-b}^{+b} v(x, y) dx = 0. \quad (5')$$

Ламинарное решение здесь имеет вид

$$u = \frac{\gamma}{\nu} \sin \frac{\pi}{a} y. \quad (6)$$

Так как (6) имеет точки перегиба, то возможно, что здесь мы имеем первый пример плоской задачи, для которой без большого труда удастся с полной строгостью установить неустойчивость⁴. Во всяком случае турбулентные решения (в смысле нетривиальной инвариантной меры) должны появиться при малых ν . Уравнение (4) превращается в

$$\frac{\partial}{\partial t} \Delta \psi - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial}{\partial y} \Delta \psi + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial}{\partial x} \Delta \psi = \nu \Delta \Delta \psi + \frac{\pi \gamma}{a} \cos\left(\frac{\pi}{a}y\right). \quad (7)$$

⁴Это было в действительности сделано в нашей работе с Л. Д. Мешалкиным "Исследование устойчивости стационарного решения одной системы уравнений плоского движения несжимаемой вязкой жидкости", Прикладная математика и механика, 1961, т. 25, № 6, с. 1140–1143. (Прим. Я. Г. Синая.)

Вместо краевых условий (4') требуется лишь периодичность ψ по x и по y и (для устранения произвольной константы) равенство среднего значения ψ нулю.

В направлении В основная гипотеза заключается в том, что турбулентные инвариантные меры μ_ν в пространстве $\psi(x, y)$ сходятся при $\nu \rightarrow 0$ к предельной мере μ , сосредоточенной на непрерывных функциях, обладающих описанными в конце § 2 свойствами.

§ 4. Возможность дальнейших упрощений

Представляется менее ясным, какие из намеченных эффектов можно получить для упрощенных уравнений, например, для уравнений пограничного слоя

$$\begin{cases} \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(y), \\ \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \end{cases} \quad (8)$$

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} - \frac{\partial \psi}{\partial x} \frac{\partial^3 \psi}{\partial y^3} + \frac{\partial \psi}{\partial y} \frac{\partial^3 \psi}{\partial x \partial y^2} = \nu \frac{\partial^4 \psi}{\partial y^4} + F'(y) \quad (9)$$

или предлагавшегося Бюргерсом уравнения⁵

$$\frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial y} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + F(y). \quad (10)$$

При конечном ν (но не при изучении предельного перехода $\nu \rightarrow 0$) можно построить удовлетворительные конечномерные модели, заменяя (1), (4), (8), (9) уравнениями, дифференциальными по t , но конечно-разностными по x и y , или сохраняя в разложении в ряд Фурье по x и y лишь конечное число членов. Инвариантные турбулентные меры μ_ν здесь, вероятно, окажутся уже вполне доступными изучению.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. А. Ладыженская. Докл. РАН (в печати). (См.: О. А. Ладыженская. Математические вопросы динамики вязкой несжимаемой жидкости. М.: Физматгиз, 1961. – Я. Г. Синай.)
- [2] (См.: У. Фриш. Турбулентность. Наследие А. Н. Колмогорова. М.: Фазис, 1998. – Я. Г. Синай.)
- [3], [4] (См.: Цзя-Цзяо Линь. Теория гидродинамической устойчивости. М.: ИЛ, 1958. – Я. Г. Синай.)

Поступила в редакцию
01.08.2003

⁵По этому поводу см. работу В. И. К. Ханина, А. Мазеля и Я. Г. Синай “Invariant measures for Burgers equation with stochastic forcing”, *Annals of Mathematics* (2), 2000, v. 151, № 3, p. 877–960. (Прим. Я. Г. Синай.)