Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. В. Михалёв, А. В. Шокуров, Оптимальное использование вейвлет-компонент, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 171–172

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7007>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:37:38

Оптимальное использование вейвлет-компонент

А. В. Михалёв, А. В. Шокуров

1. Введение. Рассмотрим линейное преобразование из $\mathbb{R}^n$ в $\mathbb{R}^m$. Пусть $v \in \mathbb{R}^n$, $u \in \mathbb{R}^m$ и $u = Av$, где A – матрица линейного преобразования в базисе пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$. Допустим, что нам нужно вычислить не весь вектор u , а только его часть. Зная, какие именно компоненты u надо вычислить, можно сократить и вектор v . Поэтому интересен вопрос о нахождении минимальной части вектора v , по которой можно вычислить необходимую часть вектора u .

В статье рассматривается сначала общий случай линейного преобразования, а затем конкретное линейное преобразование, используемое на практике, а именно обратное биортогональное вейвлет-преобразование [1].

2. Линейные преобразования. Пусть $u \in \mathbb{R}^m$, $v \in \mathbb{R}^n$ и $u = Av$. Для удобства изложения нумерация компонент векторов и матриц начинается с 0. При линейном преобразовании компонента u_i определяется следующим образом:

$$u_i = \sum_{0 \leq k \leq n-1} a_{i,k} v_k = \sum_{\substack{0 \leq k \leq n-1 \\ a_{i,k} \neq 0}} a_{i,k} v_k.$$

Поэтому для вычисления компоненты u_i нужны только те компоненты v_k вектора v , которые умножаются на ненулевые компоненты $a_{i,k}$ матрицы A . Обозначим через $\text{SupRows}(A, \{i\})$ соответствующее множество индексов: $\text{SupRows}(A, \{i\}) = \{k : a_{i,k} \neq 0\}$. Если, помимо компоненты u_{i_1} , необходимо вычислить и компоненты $u_{i_2}, \dots, u_{i_l}$, то надо взять объединение всех $\text{SupRows}(A, \{i_p\})$, а именно: $\text{SupRows}(A, \{i_1, \dots, i_l\}) = \bigcup_{p=1}^l \text{SupRows}(A, \{i_p\})$.

3. Случай свертки. По вектору $v \in \mathbb{R}^n$ построим *симметрично-периодический* вектор $v_{\{ \cdot \}}$ значимой длины n , определив его компоненты для произвольного целого числа i следующим образом:

$$v_{\{i\}} = \begin{cases} v_i, & i \in [0, n-1]; \\ v_{-i}, & -i \in [0, n-1]; \\ v_{\{i-k \cdot \text{len}\}}, & i \in [1-n-k \cdot \text{len}, n-1-k \cdot \text{len}]; \end{cases}$$

где $\text{len} = 2n-1$ – его период. Свертка вектора $v_{\{ \cdot \}}$ с ядром $h \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ есть вектор $u \in \mathbb{R}^n$ с компонентами

$$u_p = (h \star v_{\{ \cdot \}})_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{p-n} v_{\{n\}}. \quad (1)$$

Свертка линейна и может быть задана матрицей A , при этом преобразование (1) записывается в виде $u = Av$.

В настоящей заметке всюду предполагается, что ядро h сосредоточено в окрестности нуля радиуса меньше n . Тогда существуют такие целые числа $l, r \in \mathbb{Z}$, $l \leq 0$, $r \geq 0$, $\|l\|, \|r\| < n$, что при $i < l$ и при $i > r$ выполнено равенство $h_i = 0$. Иначе считаем, что $\text{SupRows}(A, \{i\}) = \{0, \dots, n-1\}$.

Найдем явный вид матрицы A .

Рассмотрим сначала случай, когда h обращается в нуль при отрицательных индексах, т.е. $l = 0$, $r \geq 0$. В этом случае получаем матрицу A^+ . Индекс первого ненулевого элемента в строчке i и индекс последнего ненулевого элемента в строчке j матрицы A^+ соответственно равны

$$S(A^+, i) = \begin{cases} 0, & i \leq r, \\ i - r, & i > r, \end{cases} \quad E(A^+, j) = \begin{cases} r - j, & 2j \leq r, \\ j, & 2j > r. \end{cases} \quad (2)$$

Случай, когда h равно нулю при положительных индексах, рассматривается аналогичным образом.

Обозначим $\vec{i-j} = \{i, i+1, \dots, j-1, j\}$. В итоге получаем следующую формулу:

$$\text{SupRows}(A, \vec{i-j}) = \{i_{\text{start}}, i_{\text{start}}+1, \dots, i_{\text{end}}-1, i_{\text{end}}\},$$

где $\text{start} = \min(S(A^-, \vec{i-j}), S(A^+, \vec{i-j}))$, $\text{end} = \max(E(A^-, \vec{i-j}), E(A^+, \vec{i-j}))$.

4. Обратное вейвлет-преобразование. Обратное вейвлет-преобразование задается двумя фильтрами $h, g \in \mathbb{R}^{\mathbb{Z}}$ [1]. Пусть $a, d \in \mathbb{R}^n$, тогда компоненты вектора $u \in \mathbb{R}^{2n}$ задаются следующим образом:

$$u_p = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} h_{p-2n} a_{\{n\}} + \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g_{p-2n} d_{\{n\}}. \quad (3)$$

Введем обозначения: $u_i^{\text{even}} = u_{2i}$, $u_i^{\text{odd}} = u_{2i+1}$. Тогда $u_p^{\text{even}} = (h^{\text{even}} \star a)_p + (g^{\text{even}} \star d)_p$, $u_p^{\text{odd}} = (h^{\text{odd}} \star a)_p + (g^{\text{odd}} \star d)_p$. Отсюда следует, что преобразование (3) сводится к сумме сверток. Поэтому применимы результаты, полученные в п. 3.

Хотя имеется алгоритм вычисления, в общем случае формула для $\text{SupRows}(A, \vec{i-j})$ громоздка. Однако в случае произвольных фильтров h и g , имеющих конкретные r, l , можно записать компактную формулу явно. На практике (см. стандарт JPEG2000: ISO/IEC fdc-15444-1, JPEG2000 image coding system) чаще встречается следующий случай – биортогональное вейвлет-преобразование, определяемое фильтрами h и g , заданными таблицей

i	-1	0	+1	+2	+3
h_i	0.500	1.000	0.500	0	0
g_i	-0.125	-0.250	0.750	-0.250	-0.125

Применив формулы из п. 3 к векторам $h^{\text{even}}, h^{\text{odd}}, g^{\text{even}}, g^{\text{odd}}$, получаем следующее предложение, из которого вытекает главный результат заметки.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть h и g – фильтры, описанные в приведенной выше таблице. Тогда $S(h^{\text{even}}, \vec{i-j}) = i$, $E(h^{\text{even}}, \vec{i-j}) = j$, $S(h^{\text{odd}}, \vec{i-j}) = i$, $E(h^{\text{odd}}, \vec{i-j}) = j+1$, $S(g^{\text{even}}, \vec{i-j}) = S(g^{\text{odd}}, \vec{i-j}) = i-1$, $E(g^{\text{odd}}, \vec{i-j}) = j+1$, $E(g^{\text{even}}, 0) = 1$, $E(g^{\text{even}}, \vec{i-j}) = j$.

СЛЕДСТВИЕ. В условиях предложения выполнены равенства: $S(h, \vec{i-j}) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor$, $S(g, \vec{i-j}) = \left\lfloor \frac{i}{2} \right\rfloor - 1$, $E(g, 0) = 1$, $E(h, \vec{i-j}) = E(g, \vec{i-j}) = \left\lfloor \frac{j+1}{2} \right\rfloor$.

ЗАМЕЧАНИЕ. Эту идею можно развить дальше в случае композиции обратных вейвлет-преобразований. Например, вектор a вычисляется аналогичным образом по векторам a_1 и d_1 . Тем самым мы находим ограничение на множества индексов векторов a_1, d_1 и d .

Список литературы

- [1] S. Mallat, *A wavelet tour of signal processing*, Academic Press, San Diego, 1999.

А. В. Михалёв (A. V. Mikhalev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: mikhalev@mech.math.msu.su

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редакцией
22.05.2007

А. В. Шокуров (A. V. Shokurov)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: anton@fit.com.ru