Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. О. Ремизов, Особенности в трехмерных аффинно-управляемых системах со скалярным управлением, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 175–176

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7008>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением <http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 34.229.108.108

26 апреля 2023 г., 16:01:16

Особенности в трехмерных аффинно-управляемых системах со скалярным управлением

А. О. Ремизов

В геометрической теории управления встречаются системы, в которых вторая производная гамильтониана H по управлению u вдоль экстремали тождественно равна нулю. В частности, это происходит в аффинных по управлению системах, когда максимум (или минимум) H по $u \in U$ достигается не на границе, а внутри множества U . Такие экстремали называются *вполне особыми*. Здесь мы рассмотрим поле вполне особых экстремалей типичной управляемой системы вида

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + u f_1(x), \quad x \in X \ (\dim X = 3), \quad u \in U \subset \mathbb{R}^1, \quad (1)$$

где $f_i: X \rightarrow TX$ – гладкие (т.е. класса C^∞) векторные поля на гладком трехмерном многообразии X , множество допустимых управлений состоит из кусочно гладких локально ограниченных функций $u(t)$ со значениями в U . Необходимые условия оптимальности первого и второго порядка для таких систем получены в [1]. Гамильтониан H равен $h_0 + u h_1$, где $h_i = \langle f_i(x), p \rangle$, $p \in T_x^* X$, треугольные скобки означают действие ковектора на вектор. Введем обозначения $h_{i_1, \dots, i_k} = \{h_{i_1}, h_{i_2, \dots, i_k}\}$ и $f_{i_1, \dots, i_k} = [f_{i_1}, f_{i_2, \dots, i_k}]$, где фигурные (квадратные) скобки означают скобки Пуассона (Ли) функций (векторных полей). Гамильтонова система принципа максимума Понтрягина для (1) имеет вид

$$\frac{dx}{dt} = f_0(x) + u f_1(x), \quad \frac{dp}{dt} = -\frac{\partial h_0}{\partial x} - u \frac{\partial h_1}{\partial x}. \quad (2)$$

Вполне особые экстремали удовлетворяют равенству $h_1 = 0$, из которого посредством двукратного дифференцирования в силу (2) получаем $h_{01} = 0$ и $h_{001} - u h_{110} = 0$. Не содержащие u уравнения $h_1 = 0$ и $h_{01} = 0$ определяют многообразие $S \subset T^* X$, содержащее все вполне особые экстремали, а уравнение $h_{001} - u h_{110} = 0$ позволяет выразить управление u через переменные $(x, p) \in T^* X$. Подставляя $u = \frac{h_{001}}{h_{110}}$ в (2), мы получаем на S векторное поле V , не содержащее u и определенное во всех точках многообразия S , в которых $h_{110} \neq 0$. Фазовые кривые этого поля суть вполне особые экстремали, а их проекции на пространство X – соответствующие экстремальные траектории (1). При этом возникают особенности двух типов.

Особенности первого типа – это точки, в которых $h_{110} = h_{001} = 0$ (случай $h_{110} = 0$, $h_{001} \neq 0$ исключается из рассмотрения, так как u принимает бесконечное значение). Для исследования вполне особых экстремалей (фазовых кривых поля V) в окрестности таких точек рассмотрим поле, полученное умножением V на h_{110} :

$$\dot{x} = h_{110} f_0(x) + h_{001} f_1(x), \quad \dot{p} = -h_{110} \frac{\partial h_0}{\partial x} - h_{001} \frac{\partial h_1}{\partial x}, \quad (3)$$

где точка сверху означает дифференцирование по новой переменной τ , связанной с временем t равенством $\dot{t} = h_{110}$. Предположим, что поля f_0 , f_1 и f_1, f_{01} линейно независимы. Тогда S является гладким 4-мерным многообразием и проектирование $\pi: S \rightarrow X$ регулярно (субмерсия коранга 1). Введя на S локальные координаты (x, ω) , где $p = \omega f_1 \times f_{01}(x)$, представим его в виде $S = S_+ \cup S_-$, где компоненты связности $S_\pm$ определяются знаком ω . Проектирование $\pi: S \rightarrow X$ переводит поле (3), умноженное на $|\omega|^{-1}$, с компонент $S_\pm$ в векторные поля

$$\dot{x} = \pm(e_1 f_0 + e_0 f_1), \quad (4)$$

где $e_1 = \langle f_1 \times f_{01}, f_{110} \rangle$, $e_0 = \langle f_1 \times f_{01}, f_{001} \rangle$. В случае общего положения множество особых точек полей (4) – регулярная кривая $e_0 = e_1 = 0$, трансверсальная $\text{span}(f_0, f_1)$; спектр линеаризации поля (4) в любой особой точке равен $(\lambda, -\lambda, 0)$, где $\lambda \neq 0$ – вещественное или чисто мнимое число, и имеет место стандартное разложение касательного пространства:

$$T_x X = T_x^c \oplus T_x^s \oplus T_x^u \quad (\text{Re } \lambda \neq 0) \quad \text{или} \quad T_x X = T_x^0 \oplus T_x^{\pm \lambda} \quad (\text{Re } \lambda = 0), \quad (5)$$

T_x^s и T_x^u для полей (4) с противоположными знаками меняются местами. Предположим, что поверхность $K: e_1 = 0$ трансверсальна T_x^s и T_x^u в вещественном и $T_x^{\pm \lambda}$ в мнимом случае. Тогда в мнимом случае фазовые кривые полей (4) – спирали, пересекающие кривинанту и, следовательно, не отвечающие никакому допустимому управлению. Согласно [2], в вещественном случае ростки полей (4) с квадратичной частью общего положения конечно-гладко (с любой наперед заданной степенью гладкости) орбитально эквивалентны росткам полей

$$\pm \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} - \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + \xi \eta \frac{\partial}{\partial \zeta} \right)$$

с первым интегралом $\xi \eta$. В новых координатах проходящие через особые точки фазовые кривые (траектории системы (1)) – это прямые, параллельные оси ξ или η . Переключение управления в особой точке происходит в соответствии с условием второго порядка $h_{110} \leq 0$, см. [1].

Особенности второго типа связаны с *нерегулярностью проектирования* $\pi: S \rightarrow X$. Образы таких точек определяются условием $f_1 \times f_{01} = 0$ и образуют кривую $\psi \subset X$, на которой обращаются в нуль функции e_0 и e_1 . В случае общего положения среди компонент поля $f_1 \times f_{01}$ две имеют независимые дифференциалы, кривая ψ регулярна и трансверсальна $\text{span}(f_0, f_1)$. Тогда для каждой точки $x \in \psi$ ее прообраз $\pi^{-1}(x)$ двумерен и $S_\psi = \pi^{-1}(\psi)$ – гладкое трехмерное подмногообразие S , определяющее стратификацию $S = S_\psi \cup S_+ \cup S_-$, где $S_\pm$ определены, как и раньше, знаком ω в $p = \omega f_1 \times f_{01}(x)$. Поле (3) трансверсально S_ψ и его проекция на X не касается кривой ψ , поэтому все вполне особые экстремали содержатся в стратах $S_\pm$, за исключением лишь самой точки пересечения экстремали с S_ψ . Проекция поля (3) с $S_\pm$ на X дает поля (4), определенные на множестве $\pi^{-1}(S_+ \cup S_-) = X \setminus \psi$. Продолжая по непрерывности поля (4) на все пространство X , получаем, что кривая ψ становится центральным многообразием W^c этих полей, состоящим из их особых точек. Спектр линеаризации этих полей в любой особой точке равен $\pm(\lambda, \lambda, 0)$, где $\lambda \neq 0$ – вещественное число, причем жорданова форма линейной части диагональна. Согласно [2], ростки этих полей конечно-гладко (с любой наперед заданной степенью гладкости) орбитально эквивалентны росткам полей

$$\pm \left(\xi \frac{\partial}{\partial \xi} + \eta \frac{\partial}{\partial \eta} + 0 \frac{\partial}{\partial \zeta} \right).$$

Список литературы

- [1] А. А. Аграчев, Ю. Л. Сачков, *Геометрическая теория управления*, Физматлит, М., 2004. [2] А. О. Ремизов, “Многомерная конструкция Пуанкаре и особенности поднятых полей для неявных дифференциальных уравнений”, *СМФН*, **19** (2006), 131–170.

А. О. Ремизов (А. О. Remizov)
Universidade do Porto, Portugal
E-mail: remizov@caravan.ru

Представлено М. И. Зеликиным
Принято редколлегией
24.05.2007