Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

О. Е. Барндорф-Нильсен, Ю. Шмигель, Пространственно-временное моделирование, основанное на процессах Леви, и его приложения к турбулентности, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 63–90

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm701>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.85.7.115

26 апреля 2023 г., 17:41:01

УДК 519.248:53

ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ,
ОСНОВАННОЕ НА ПРОЦЕССАХ ЛЕВИ,
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ К ТУРБУЛЕНТНОСТИ

О. Е. Барндорф-Нильсен, Ю. Шмигель

В статье рассматриваются некоторые типы пространственно-временных моделей, построенных с помощью базисов Леви. Динамика описывается полем стохастических процессов $X = \{X_t(\sigma)\}$ (на множестве $\mathcal{S}$ узлов σ), определенных интегралами

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathcal{S}} f_t(\rho, s; \sigma) Z(d\rho \times ds),$$

где Z обозначает базис Леви. Подынтегральные выражения f являются детерминированными функциями вида $f_t(\rho, s; \sigma) = h_t(\rho, s; \sigma) \mathbf{1}_{A_t(\sigma)}(\rho, \sigma)$, где $h_t(\rho, s; \sigma)$ имеет специальный вид и $A_t(\sigma)$ — подмножество в $\mathcal{S} \times \mathbb{R}_{\leq t}$.

Мы сначала рассмотрим ОУ-поля (поля Орнштейна–Уленбека) $X_t(\sigma)$, которые являются обобщением понятия ОУ-процессов (процессов типа Орнштейна–Уленбека), сосредоточиваясь в основном на возможностях процесса $X_t(\sigma)$ для динамического моделирования. Кратко указываются приложения к динамическим пространственным процессам типа Кокса.

Во второй части статьи обсуждается моделирование пространственно-временных корреляций СП-полей (СП = стохастическая прерывистость) вида

$$Y_t(\sigma) = \exp\{X_t(\sigma)\}.$$

Этот вид позволяет явно вычислить математические ожидания

$$\mathbb{E}\{Y_{t_1}(\sigma_1) \cdots Y_{t_n}(\sigma_n)\},$$

которые мы используем при характеристике корреляций. СП-поля могут рассматриваться как динамическое, непрерывное и однородное обобщение турбулентных каскадов. В этой связи мы строим СП-поле с пространственно-временным масштабным поведением, согласованным с диссипацией энергии, наблюдаемой в турбулентных потоках. Кратко обсуждаются некоторые параллели к этому построению.

Библиография: 53 названия.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	64
§ 2. Основания	66

2.1. Базисы Леви	66
2.2. Представление Леви–Ито базисов Леви	68
2.3. Интегралы по отношению к базисам Леви	68
2.4. Примеры базисов Леви	69
2.5. Саморазложимость и ОУ-процессы	69
2.6. Турбулентность	69
§3. Пространственно-временные процессы ОУ-типа	71
3.1. ОУ $_{\wedge}$ -процессы	72
3.2. Процессы $\text{intOU}_{\wedge}$ -типа и $\text{supOU}_{\wedge}$ -типа	75
3.3. Приложения к процессам Кокса	76
3.4. Расширение	77
3.5. О пространственной структуре ОУ $_{\wedge}$ -процессов	77
§4. Пространственно-временные процессы СП-типа	78
4.1. СП-поля	80
4.2. Корреляторы	81
4.3. Масштабирование корреляторов	81
4.4. Дальнейшее моделирование двухточечных корреляторов	84
4.5. Динамическое среднedisперсное моделирование	85
§5. Выводы	88
Список литературы	88

§1. Введение

Понятие базисов Леви является богатым источником пространственно-временного моделирования, и эти базисы приводят к разным новшествам, например, в соответствующих моделях Орнштейна–Уленбека и моделях для масштабирующего поведения в турбулентности. В настоящей статье указаны некоторые приложения этого понятия. В частности, обсуждаются связи с недавними важными достижениями в моделировании турбулентности с точки зрения мультипликативных каскадов.

Мы будем рассуждать в терминах множества узлов $\mathcal{S}$ с точками σ , где события развиваются с течением времени t . Динамическое развитие будет описываться полем стохастических процессов $X = \{X_t(\sigma)\}$ на $\mathcal{S}$, которые будут определяться интегралами вида

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathcal{S}} f_t(\rho, s; \sigma) Z(d\rho \times ds), \quad (1)$$

где Z означает базис Леви, т.е. безгранично делимую и независимо рассеянную случайную меру на $\mathcal{R} = \mathcal{S} \times \mathbb{R}$. Для конкретности, в настоящей статье предполагается, что подынтегральные выражения f являются неслучайными функциями, а $\mathcal{S}$ – борелевское подмножество $\mathbb{R}^d$. С каждой точкой $\xi = (\sigma, t)$ в $\mathcal{R}$ мы связываем множество $A_t(\sigma)$ в $\mathcal{B}(\mathcal{R})$, где $\mathcal{B}(\mathcal{R})$ означает борелевскую σ -алгебру на $\mathcal{R}$, и рассматриваем функции f вида

$$f_t(\rho, s; \sigma) = h_t(\rho, s; \sigma) \mathbf{1}_{A_t(\sigma)}(\rho, s),$$

где h подчиняется различным ограничениям, например, $h_t(\rho, s; \sigma) = \exp(-\lambda(\sigma)(t-s))$ или $h_t(\rho, s; \sigma) = h(|\rho - \sigma|)$, где $|\cdot|$ означает расстояние в $\mathbb{R}^d$. Мы называем $A_t(\sigma)$ *множествами размата*.

Далее в основном будут рассматриваться два случая, которые мы называем ОУ-полями и СП-полями соответственно. В обоих случаях множества $A_t(\sigma)$ относятся к прошлым событиям в том смысле, что $A_t(\sigma) \cap (\mathbb{R}^d \times (t, \infty)) = \emptyset$. Прототип множеств $A_t(\sigma)$ для ОУ-полей изображен на рис. 1, а прототип множеств $A_t(\sigma)$ для СП-полей – на рис. 2.

Рис. 1. Пример множества размаха $A_t(\sigma)$, связанного с $X_t(\sigma)$

Рис. 2. Пример множества размаха $A_t(\sigma)$, связанного с $Y_t(\sigma)$

ОУ-поля являются обобщением понятия ОУ-процессов (процессов типа Орнштейна–Уленбека). Общее обсуждение этих процессов можно найти в [44]. В ряде недавних работ по финансовой математике ([9], [10], [39]; см. также [45] и [13]) положительные одномерные ОУ-процессы были успешно использованы как модели стохастической изменчивости (волатильности) финансовых активов (некоторая работа в многомерном случае проделана в [7]). Существенное сходство между динамикой финансовых рынков и динамикой турбулентных жидкостей (см., например, [1], [4], [26]) вызывает интерес к реалистичному моделированию прерывистости, которая является турбулентным аналогом стохастической изменчивости, с помощью идей, связанных с

ОУ-процессами. Как мы увидим, эти идеи могут быть также полезны в других областях пространственно-временного моделирования, например, при моделировании процессов напряженности для применения в динамических пространственных процессах типа Кокса.

Мотивация для введения СП-полей (СП – стохастическая прерывистость) связана с недавними успехами моделирования турбулентных каскадов с точки зрения мультипликативных процессов [49] (В этой связи см. также [27].)

В этой статье мы кратко приводим ряд результатов об ОУ- и СП-полях, оставляя много математических деталей до более полного изложения в другом месте. Параграф 2 содержит основные сведения о моделировании, использующем базисы Леви, и о турбулентности. В §§ 3 и 4 рассматриваются ОУ- и СП-поля соответственно. ОУ-поля имеют линейный тип $X_t(\sigma)$ (как в (1)), а СП-поля являются полями мультипликативного типа, т.е. экспоненцированными версиями $Y_t(\sigma) = \exp\{X_t(\sigma)\}$. Отдельный интерес представляют интегралы от $X_t(\sigma)$ и от $Y_t(\sigma)$ по переменной σ .¹ В этой статье мы в основном сосредоточиваемся на масштабирующем поведении диссипации энергии (закон $\frac{4}{5}$ и его модификации), не рассматривая чаще изучаемые масштабирующие особенности поля скоростей (закон $\frac{2}{3}$ и его модификации) и спектр мощности (закон $\frac{5}{3}$ и его модификации), которые будут обсуждаться в [8]². В разделе 4.3 мы рассматриваем динамические модели полей диссипации энергии с особым вниманием к временным двумерным корреляторам. В разделах 4.4 и 4.5 кратко обсуждается моделирование дальнейших аспектов СП-полей. Мы снова сосредоточиваемся на временном моделировании, но во многих случаях можно перевести результаты в пространственные соотношения. Параграф 5 носит заключительный характер.

§ 2. Основания

В настоящем параграфе суммированы некоторые хорошо известные результаты по теории безграничной делимости и процессов Леви, а также по теории турбулентности. Они служат основным материалом в рассуждениях в оставшейся части работы.

Мы используем следующие обозначения для лог-характеристической функции и для лог-преобразования Лапласа случайной переменной X :

$$C\{\zeta \nmid X\} = \ln E\{e^{i\zeta X}\} \quad \text{и} \quad K\{\theta \nmid X\} = \ln E\{e^{\theta X}\},$$

и, чтобы различать их, будем называть их s -кумулянтной функцией и k -кумулянтной функцией соответственно. Аналогичные обозначения будут использоваться для векторных случайных величин и условных законов. Так, например, $C\{\zeta \nmid X|Y\}$ – условная s -кумулянтная функция для X при данном Y .

2.1. Базисы Леви. Обозначим через $\mathcal{B} = \mathcal{B}(\mathcal{R})$ борелевскую σ -алгебру в $\mathcal{R} = \mathcal{S} \times \mathbb{R}$, и пусть символ $\mathcal{B}_b$ обозначает класс ограниченных элементов в $\mathcal{B}$. Пусть

¹Последний тип интегралов позволяет нам понять, что может быть названо экспоненциальными функционалами на основе базисов Леви. В этой связи см. [21].

²Здесь, однако, уместно сослаться на работу [20], в которой вводятся и изучаются процессы полей скоростей типа дробового шума, с особым вниманием к моделированию среднескальных структур в океанских волнах.

$Z = \{Z(A); A \in \mathcal{C}\}$, где $\mathcal{C} = \mathcal{B}$ или $\mathcal{B}_b$, – независимо рассеянная случайная мера на $\mathcal{R}$.

Предположим, что Z безгранично делима в том смысле, что $Z(A)$ – безгранично делимая случайная величина, с-кумулянтная функция которой может быть представлена в виде

$$C\{\zeta \ddagger Z(A)\} = i\zeta a(A) - \frac{1}{2}\zeta^2 b(A) + \int_{\mathbb{R}} \{e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\} \nu(dx, A) \quad (2)$$

для любого $A \in \mathcal{C}$, где a – мера со знаком (заряд) на $\mathcal{B}$, b – положительная мера на $\mathcal{B}$, а $\nu(dx, A)$ – мера Леви на $\mathbb{R}$ при фиксированном A и мера на $\mathcal{B}$ при фиксированном dx . Тогда Z называется *базисом Леви* с характеристиками (a, b, ν) . Мы будем называть ν *обобщенной мерой Леви*. В этой статье нас будут интересовать только случаи, в которых гауссовой части нет, т.е. b всюду равно 0. Тогда *управляющая мера* базиса Z имеет вид

$$\omega(d\xi) = |a|(d\xi) + \int_{\mathbb{R}} (x^2 \wedge 1) \nu(dx, d\xi).$$

Если базис Леви Z на $\mathcal{R}$ таков, что $Z(A)$ пуассоновски распределен для любого A , то мы называем Z *пуассоновским базисом*. В этом случае обобщенная мера Леви имеет вид $\nu(dx, A) = \Lambda(A) \delta_1(dx)$ для некоторой меры Λ на $\mathcal{B}$, где δ_1 – мера Дирака в точке 1. Однако нас больше интересуют случаи, когда ν – диффузная мера на $\mathbb{R} \times \mathcal{R}$.

Эвристически, полезно выразить (2) по-другому, в инфинитезимальном виде в $\xi \in \mathcal{R}$, а именно,

$$C\{\zeta \ddagger Z(d\xi)\} = i a(d\xi) - \frac{1}{2} \zeta^2 b(d\xi) + \int_{\mathbb{R}} \{e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\} \nu(dx; d\xi). \quad (3)$$

Мы не слишком потеряем в общности, предполагая, что мера ν в (3) факторизуется по формуле

$$\nu(dx; d\xi) = U(dx; \xi) \mu(d\xi) \quad (4)$$

для некоторой меры μ на $\mathcal{R}$, где $U(dx; \xi)$ – мера Леви при каждом фиксированном ξ .

В большинстве случаев, которые мы будем рассматривать, мера Леви $U(\cdot; \xi)$ абсолютно непрерывна относительно лебеговой меры на $\mathcal{R}$ с некоторой плотностью $u(dx; \xi)$ при каждом ξ .

Мы можем считать величину

$$\kappa(\zeta; \xi) = \int_{\mathbb{R}} \{e^{i\zeta x} - 1 - i\zeta \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\} U(dx; \xi)$$

с-кумулянтной функцией некоторой случайной величины, скажем, $Z'(\xi)$, имеющей с-кумулянтную функцию

$$\kappa(\zeta; \xi) = C\{\zeta \ddagger Z'(\xi)\};$$

если $a(d\xi) \equiv 0$, то

$$C\{\zeta \ddagger Z(d\xi)\} = C\{\zeta \ddagger Z'(\xi)\} \mu(d\xi) = \kappa(\zeta; \xi) \mu(d\xi).$$

Во многих случаях, представляющих прикладной интерес, величина $U(\cdot; \xi)$ не зависит от ξ . Тогда мы говорим, что базис Леви *факторизуем*, и пишем $U(dx)$ и т. д. Кроме того, если μ равна (пропорциональна) лебеговой мере, то Z называется *однородным* базисом. Если это условие выполняется, то в качестве Z' мы берем случайную величину с мерой Леви U .

Вышеприведенные рассмотрения непосредственно распространяются на многомерные базисы Леви $Z = (Z_1, \dots, Z_m)$, и инфинитезимальное представление Леви–Хинчина принимает вид

$$C\{\zeta \dagger Z(d\xi)\} = i\langle a(d\xi), \zeta \rangle - \frac{1}{2}\langle \zeta b(d\xi), \zeta \rangle + \int \{e^{i\langle \zeta, x \rangle} - 1 - i\zeta \mathbf{1}_{[-1,1]}(x)\} \nu(dx; d\xi), \quad (5)$$

где $\zeta = (\zeta_1, \dots, \zeta_m)$, a – m -мерная мера, b – $(m \times m)$ -матричнозначная мера.

2.2. Представление Леви–Ито базисов Леви. Пусть Z – независимо рассеянная случайная мера на $\mathbb{R}^k$ с характеристической тройкой $(a, 0, \nu)$ и неатомической управляющей мерой ω . Тогда (доказательство приведено в [41]) существует такой пуассонов базис N на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^k$ с мерой интенсивности ν , что Z можно представить в виде

$$Z(d\xi) = a(d\xi) + \int_{|x|>1} x N(dx; d\xi) + \int_{|x|\leq 1} x (N - \nu)(dx; d\xi). \quad (6)$$

Если Z – неотрицательный базис Леви, то это представление можно переписать в виде

$$Z(d\xi) = a_0(d\xi) + \int_{\mathbb{R}_+} x N(dx; d\xi) \quad (7)$$

для некоторой меры a_0 на $\mathbb{R}^k$.

2.3. Интегралы по отношению к базисам Леви. Интеграл от измеримой функции f на $\mathcal{B}$ относительно базиса Леви Z обозначим через $f \bullet Z$. (О теории интегрирования относительно независимо рассеянной случайной меры см. [30] или [34]. В [42] рассматривается общий вопрос о стохастическом интегрировании относительно компенсированной пуассоновой случайной меры.)

Ключевой результат для многих вычислений состоит в формуле

$$C\{\zeta \dagger f \bullet Z\} = f \bullet a + \int \kappa(\zeta f(\xi); \xi) \mu(d\xi). \quad (8)$$

Существенное условие справедливости этой формулы состоит в том, что интеграл в правой части должен существовать (ср. [14] и [8]).

Интегралы от неотрицательных функций f по неотрицательному базису Леви с обобщенной мерой Леви $\nu(dx; d\xi)$ можно представить в виде

$$f \bullet Z = f \bullet a_0 + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{S}} f(\xi) x N(dx; d\xi), \quad (9)$$

и k -кумулянтная функция базиса Z имеет вид

$$K\{\theta f \dagger Z\} = K\{\theta \dagger f \bullet Z\} = \theta f \bullet a_0 + \int_{\mathbb{R}_+} \int_{\mathcal{S}} (e^{\theta f(\xi)x} - 1) \nu(dx; d\xi). \quad (10)$$

Кроме того, мера Леви интеграла $f \bullet Z$ равна $U_f = \bar{f} \circ \nu$, т.е. лифтингу ν с помощью $\bar{f}$, где $\bar{f}(x, \xi) = xf(\xi)$.

2.4. Примеры базисов Леви.

ПРИМЕР 2.1 (ТУ базисы Леви). Если $U(dx; \xi)$ в (4) сосредоточена на $\mathbb{R}_{>0}$ и имеет вид

$$U(dx; \xi) = x^{-1-\alpha/2} e^{-\frac{1}{2}\gamma^2(\xi)x} dx$$

с $0 < \alpha < 2$ и $\gamma(\xi) > 0$, то мы будем говорить, что Z образует *темперированный (умеренный) базис Леви*. В этом случае “локальная” случайная величина $Z'(\xi)$ имеет $\alpha/2$ температурованное устойчивое распределение, и обратный гауссов закон получается при $\alpha = 1$. (Темперированные устойчивые (ТУ) законы и процессы Леви обсуждаются в [11].) Закон распределения для $Z'(\xi)$ переходит в предельном случае $\alpha = 0$ в гамма-распределение $\Gamma(1, \frac{1}{2}\gamma^2(\xi))$.

Если γ не зависит от ξ , то базис Z факторизуем, и $Z(A)$ подчиняется ТУ закону (гамма-закону при $\alpha = 0$) для всех A .

Для дальнейшего важно, что есть естественное обобщение семейства ТУ законов на так называемое обобщенное гамма-семейство (или G -семейство), см. [17] и имеющиеся там ссылки.

ПРИМЕР 2.2 (НОГ базис Леви). Если $U(dx; \xi)$ в (4) имеет вид

$$U(dx; \xi) = \pi^{-1} \delta\alpha(\xi) |x|^{-1} K_1(\alpha(\xi)|x|) e^{\beta(\xi)x}$$

(с $\alpha(\xi) > |\beta(\xi)| \geq 0$), то мы будем говорить, что Z образует *нормальный обратный гауссов (НОГ) базис Леви*. Если α и β не зависят от ξ , то Z факторизуем и $Z(A)$ удовлетворяет НОГ закону для всех A .

2.5. Саморазложимость и ОУ-процессы. Стационарный стохастический процесс $\{X\}_{t \in \mathbb{R}}$ называется *ОУ-процессом*, если он может быть представлен в виде

$$X_t = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(t-s)} dZ_{\lambda s}, \quad (11)$$

где λ – положительный параметр, так называемый *параметр интенсивности* ОУ-процесса, а Z_t – процесс Леви. В этом случае закон X_t необходимо саморазложим, и, с другой стороны, для любого саморазложимого закона D на $\mathbb{R}$ существует процесс Леви Z , так называемый управляющий фоновый процесс Леви (УФПЛ), такой, что формула (11) определяет ОУ-процесс X_t , распределенный в соответствии с D . Об общей теории саморазложимости и ОУ-процессов см. [44]. Приложения этих понятий к финансам и турбулентности обсуждаются в [1]–[4], [9], [10]; см. также [45], [13], [5], [6].

2.6. Турбулентность. Одной из основных особенностей турбулентных потоков является прерывистое поведение поля скоростей и связанная с этим прерывистость диссипации энергии [25], [38]. Здесь прерывистость означает, что флуктуации около среднего значения осуществляются взрывами с амплитудами, которые явно негауссовы. Кроме того, эти прерывистые взрывы группируются, показывая свои временные зависимости. Эти характеристические особенности турбулентного потока могут также быть описаны с помощью мультифрактального формализма, где моменты разностей скоростей на данном интервале времени и моменты крупнозернистой диссипации

энергии с заданным размером области крупнозернистости демонстрируют масштабирующее поведение на некотором определенном промежутке, называемом инерциальной областью [35], [52]. Первое систематическое описание масштабирования инерциальной области принадлежит Колмогорову [31], [32]. Он использовал два основных предположения об универсальности турбулентного потока при больших числах Рейнольдса. Первое состоит в том, что если вязкость жидкости ν мала, то средняя скорость диссипации энергии ϵ независима от ν . Второе предположение состоит в том, что маломасштабная турбулентность однородна и изотропна. Согласно выводу Колмогорова, в этом случае приращения скорости $\Delta v_r \equiv v(\sigma + r) - v(\sigma)$ для расстояний r в пределах инерциальной области подчиняются масштабирующему соотношению

$$E\{\Delta v_r^n\} \propto (r\epsilon)^{n/3}.$$

Много усилий было приложено, чтобы проверить это уравнение, и особенно его спектральный эквивалент в случае $n = 2$,

$$\Phi(\kappa) \propto \epsilon^{2/3} \kappa^{-5/3},$$

где $\Phi(\kappa)$ – одномерный спектр энергии. Оказалось, что монофрактальное масштабирование приращений скорости не соответствует экспериментальным наблюдениям для порядков $n > 3$ (см. обзор и дальнейшие ссылки в [25], [52]). Одна из причин этого несоответствия – сильная изменчивость скорости диссипации энергии. Еще в 1962 г. А. М. Обухов [40] и А. Н. Колмогоров [33] предложили заменить ϵ локально крупнозернистой скоростью диссипации энергии

$$\epsilon_r = \frac{1}{|V|} \int_V \epsilon(\sigma) d\sigma,$$

где $|V| = O(r^3)$ – объем линейного размера r . Согласно этому предложению, сами моменты локально усредненной диссипации энергии проявляют масштабирующее поведение с нелинейными (т.е. мультифрактальными) показателями масштабирования $\tau(n)$,

$$E\{\epsilon_r^n\} \propto |V|^{-\tau(n)}.$$

Предполагается, что это масштабирующее соотношение выполняется внутри инерциальной области (некоторого вполне определенного интервала для r) для потоков с очень высоким числом Рейнольдса. Особенно трудно выделить масштабирующие экспоненты $\tau(n)$ для высокого порядка n (и необходимо конечных чисел Рейнольдса).

Однако в [49], [48] показано, что n -точечные корреляторы (определенные ниже) тоже демонстрируют масштабирующее поведение, которое (по сравнению с крупнозернистой диссипацией энергии) гораздо более точно, даже для малых чисел Рейнольдса. Предположим, что соотношение $E\{\epsilon_r^2\} \propto r^{-\tau(2)}$ выполняется в точности на некоторой области переменного r . Тогда мы можем дважды продифференцировать это соотношение и получить $E\{\epsilon(\sigma)\epsilon(\sigma + r)\} \propto r^{-\tau(2)}$, поскольку

$$E\{\epsilon_r^2\} = 2 \int_0^r (r - \sigma) E\{\epsilon(0)\epsilon(\sigma)\} d\sigma, \quad (12)$$

если мы предполагаем трансляционную инвариантность. Таким образом, масштабирование двухточечных корреляций более фундаментально в том смысле, что точное масштабирование локально усредненной диссипации энергии вызывает масштабирование корреляторов. Но обратное утверждение может не выполняться. Это – очень важный факт, и он является причиной того, что мы сосредоточиваемся на масштабирующем соотношении для n -точечных корреляторов в разделе 4.3.

В настоящее время масштабирующее описание турбулентного потока (в терминах приращений скорости или в терминах диссипации энергии) не объяснено из динамики Навье–Стокса; однако есть исключение, а именно, знаменитый колмогоровский закон $4/5$ [31], [32] (исторические данные приведены в [51]). Именно по этой причине феноменологические модели играют важную роль в описании турбулентного поведения [25], [15]. Один из простейших и одновременно наиболее успешных типов таких моделей – каскадные модели, которые способны описать прерывистое масштабирующее поведение диссипации энергии ясным и аналитически обрабатываемым образом. Эти модели могут также воспроизводить наблюдаемые кратные распределения и их корреляционные эффекты, s -кумулянты и марковские свойства [46], [29], [22], [24], [48]. Несмотря на этот замечательный успех, такие модели имеют два главных недостатка. Если они определены в соответствии с каскадной структурой дерева, то они не трансляционно инвариантны, что приводит к дискретному пространственному разложению. С другой стороны, если модели определены без учета древоподобной структуры, то их корреляционная структура должна вводиться вручную. В обоих случаях трудно дать простое и полное описание каскадного процесса. Второй недостаток – статический характер моделей. Турбулентность – динамическое явление, и оно безусловно требует одновременного временного и пространственного описания. В контексте масштабирующих процессов остается неясным, как рационально включить в рассмотрение динамику. Таким образом, есть очевидная необходимость динамического обобщения каскадных процессов, сохраняющего их свойство гнездовой структуры переплетающихся масштабов. На этом пути СП-поля кажутся естественным способом ввести динамику в мультипликативный процесс взаимодействующих масштабов, как обсуждается ниже в §4. В качестве примера мы обсуждаем масштабирующие соотношения для n -точечных корреляторов в разделе 4.3. Мы не обсуждаем маргинальное распределение диссипации энергии, поскольку некоторые особенности этого распределения зависят от потока. В связи с универсальностью, масштабирующие показатели $\tau(n)$ в крупнозернистой диссипации энергии и масштабирующие показатели n -точечных корреляторов являются подходящими наблюдаемыми. Однако в более детальных приближениях общие рамки СП-полей позволяют провести дополнительное моделирование маргинальных характеристик.

§ 3. Пространственно-временные процессы ОУ-типа

В этом параграфе мы рассматриваем расширение идеи ОУ-процессов на случай пространственно-временных контекстов. Мы начинаем с обсуждения простейшего, основного типа таких процессов. С этой целью в качестве области $\mathcal{S}$ мы рассматриваем все d -мерное евклидово пространство $\mathbb{R}^d$ и предполагаем, что семейство множеств размаха трансляционно инвариантно, т.е. $A_t(\sigma) = (\sigma, t) + A_0(0)$. Мы также

предполагаем для простоты, что базис Леви имеет меру Леви вида

$$\nu(dx, d(\sigma, t)) = U(dx) d\sigma dt,$$

так что Z однороден.

3.1. $OU_\wedge$ -процессы. Рассмотрим двухпараметрическое семейство подмножеств $\mathbb{R}^d$ вида

$$\{C_s(\sigma) : -\infty < s \leq 0, \sigma \in \mathbb{R}^d\}$$

с $C_0(\sigma) = \{\sigma\}$ и

$$C_s(\sigma) \subset C_{s'}(\sigma) \text{ для } 0 > s > s'. \quad (13)$$

В терминах этого семейства мы можем определить трансляционно инвариантные множества размаха $A_t(\sigma)$ по правилу

$$A_t(\sigma) = \{(\rho, s) : -\infty < s \leq t, \rho \in C_{s-t}(\sigma)\}.$$

Для краткости мы будем писать C_s вместо $C_s(0)$. Таким образом, $C_s(\sigma) = (\sigma, t) + C_s$. При $s > 0$ мы положим $C_s = C_{-s}$.

При некоторых мягких условиях, наложенных на множества C_s , мы можем теперь определить случайное поле (процесс) X на $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$ по формуле

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t e^{-t+s} Z(C_{s-t}(\sigma) \times ds). \quad (14)$$

Назовем $X_t(\sigma)$ $OU_\wedge$ -процессом. Выражение для $X_t(\sigma)$ можно представить в виде

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^0 e^u Z(C_u(\sigma) \times d_t u),$$

где $d_t u$ обозначает инфинитезимальный элемент du в точке t временной оси. (Мы аналогичным образом используем обозначение $d_\sigma \rho$.)

Заметим также, что при фиксированном t можно рассматривать $Z(C_{s-t}(\sigma) \times ds)$ как $dZ^{(\sigma, t)}(s)$, где $Z^{(\sigma, t)}$ – аддитивный процесс на $(-\infty, t]$, и тогда

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t e^{-t+s} dZ^{(\sigma, t)}(s). \quad (15)$$

ТЕОРЕМА 3.1. $OU_\wedge$ -процесс $\{X_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ является стационарным и марковским. При $t \geq 0$ положим

$$U_t(\sigma) = e^{-t} \int_{-\infty}^0 e^s Z(C_{s-t}(\sigma) \setminus C_s(\sigma) \times ds) \quad (16)$$

и

$$V_t(\sigma) = e^{-t} \int_0^t e^s Z(C_{s-t}(\sigma) \times ds). \quad (17)$$

Рис. 3. Иллюстрация вкладов процессов $V_t(\sigma)$ и $U_t(\sigma)$

Тогда $\{X_t(\sigma)\}_{t \geq 0}$ допускает разложение

$$X_t(\sigma) = e^{-t} X_0(\sigma) + U_t(\sigma) + V_t(\sigma), \quad (18)$$

где $X_0(\sigma)$, $\{U_t(\sigma)\}_{t \geq 0}$ и $\{V_t(\sigma)\}_{t \geq 0}$ независимы. (См. рис. 3 как иллюстрацию.)

ЗАМЕЧАНИЕ. В частности, из разложения (18) следует, что

$$C\{\zeta \dot{\vdash} X_t(\sigma) | X_0(\sigma)\} = e^{-t} X_0(\sigma) + C\{\zeta \dot{\vdash} U_t(\sigma)\} + C\{\zeta \dot{\vdash} V_t(\sigma)\}.$$

Это показывает, что процесс $\{X_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ *аффинный* с том смысле, что условная с-кумулянтная функция является аффинной функцией обуславливающего состояния. Марковские процессы, удовлетворяющие подобному условию, были недавно изучены в большой общности в [23].

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. По определению

$$X_0(\sigma) = \int_{-\infty}^0 e^s Z(C_s(\sigma) \times ds).$$

Далее, используя (13), мы видим, что

$$\begin{aligned} X_t(\sigma) &= e^{-t} \int_{-\infty}^0 e^s Z(C_{s-t}(\sigma) \times ds) + e^{-t} \int_0^t e^s Z(C_{s-t}(\sigma) \times ds) \\ &= e^{-t} \int_{-\infty}^0 e^s Z(C_s(\sigma) \times ds) + e^{-t} \int_{-\infty}^0 e^s Z(C_{s-t}(\sigma) \setminus C_s(\sigma) \times ds) \\ &\quad + e^{-t} \int_0^t e^s Z(C_{s-t}(\sigma) \times ds) \end{aligned}$$

при $t > 0$, т.е.

$$X_t(\sigma) = e^{-t} X_0(\sigma) + U_t(\sigma) + V_t(\sigma).$$

Поскольку Z независимо рассеяна, величина $\{Z(C_s(\sigma) \times ds) : s \leq 0\}$ независима от

$$\{Z(C_{s-t}(\sigma) \setminus C_s(\sigma) \times ds) : s \leq 0\}.$$

Отсюда следует, что $X_0(\sigma)$, $\{U_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{V_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ независимы и $X_t(\sigma)$ – марковский процесс. Стационарность $\{X_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ немедленно следует из однородности Z и трансляционной инвариантности множеств размаха.

Так как $C_s(\sigma) = C_{-s}(\sigma)$ по договоренности, то

$$U_t(\sigma) \stackrel{\text{law}}{=} \int_t^\infty e^{-u} Z(C_u(\sigma) \setminus C_{u-t}(\sigma) \times du)$$

или, что то же,

$$U_t(\sigma) \stackrel{\text{law}}{=} e^{-t} Q_t(\sigma),$$

где

$$Q_t(\sigma) = \int_0^\infty e^{-v} Z(C_{v+t}(\sigma) \setminus C_v(\sigma) \times dv),$$

а Q_t – аддитивный процесс³. Кроме того,

$$V_t(\sigma) \stackrel{\text{law}}{=} V_t^\uparrow(\sigma),$$

где

$$V_t^\uparrow(\sigma) = \int_0^t e^{-v} Z(C_v(\sigma) \times dv),$$

и $V_t^\uparrow$ – тоже аддитивный процесс.

ТЕОРЕМА 3.2. *Процесс $\{X_t^\uparrow(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$, определенный формулой*

$$X_t^\uparrow(\sigma) = e^{-t} X_0(\sigma) + e^{-t} Q_t(\sigma) + V_t^\uparrow(\sigma), \quad (19)$$

имеет в точности тот же закон, что и $\{X_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$. Здесь $Q_t(\sigma)$ и $V_t^\uparrow(\sigma)$ – аддитивные процессы и

$$\begin{aligned} & \mathcal{L}(X_0(\sigma), \{U_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}, \{V_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}) \\ &= \mathcal{L}(X_0(\sigma), \{e^{-t} Q_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}, \{V_t^\uparrow(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}). \end{aligned} \quad (20)$$

Из (19) следует, что $X_t^\uparrow(\sigma)$ является решением стохастического дифференциального уравнения

$$\begin{aligned} dX_t^\uparrow(\sigma) &= -X_t^\uparrow(\sigma)dt + dV_t^\uparrow(\sigma) + e^{-t} V_t^\uparrow(\sigma)dt \\ &= -X_t^\uparrow(\sigma)dt + e^{-t} (V_t^\uparrow(\sigma)dt + Z(C_t(\sigma) \times dt)), \end{aligned} \quad (21)$$

и, следовательно, процесс квадратической вариации для $\{X_t^\uparrow(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}_{\geq 0}}$ задается формулой

$$d[X^\uparrow(\sigma)]_t = e^{-2t} Z^2(C_t(\sigma) \times dt). \quad (22)$$

Как шаг по направлению к моделированию различных типов временного поведения полей, мы рассматриваем теперь временные дилатации процесса (14), получая процессы следующего более общего вида:

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t e^{-\lambda(\sigma)(t-s)} Z(C_{s-t}(\sigma) \times \lambda(\sigma)ds). \quad (23)$$

³Напомним, что аддитивный процесс является процессом с независимыми приращениями. Об обобщении понятия аддитивности на многомерный случай см. [41].

ПРИМЕР 3.1. Особенно простой случай возникает, если $\mathcal{S} = \mathbb{R}$, $\lambda = \lambda(\sigma)$ не зависит от σ и $C_s(\sigma) = \sigma + [-g(s), g(s)]$ для некоторой неотрицательной убывающей функции g на $(-\infty, 0]$. Тогда

$$X_t(\sigma) = e^{-\lambda t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda s} Z([-g(s-t) + \sigma, g(s-t) + \sigma] \times \lambda ds). \quad (24)$$

Выражения для совместных с-кумулянтов процесса $X_t(\sigma)$ (рассматриваемых как случайное поле на $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$) могут быть легко получены из формулы (24).

Как частичное обобщение этой постановки, представляет интерес задача, в которой $g(s) = c|s|$ для некоторой постоянной $c > 0$, если взять $X_t(\sigma)$ равным

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t \int_{-c|s-t|+\sigma}^{c|s-t|+\sigma} e^{-\lambda|(\sigma,t),(\rho,s)|} Z(d\rho \times \lambda ds),$$

где $|\cdot, \cdot|$ обозначает евклидово расстояние.

3.2. Процессы $\text{intOU}_\wedge$ -типа и $\text{supOU}_\wedge$ -типа. Для любого $\text{OU}_\wedge$ -процесса $\{X_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ положим

$$X_t^*(\sigma) = \int_0^t X_s(\sigma) ds$$

и будем называть этот процесс $\text{intOU}_\wedge$ -процессом.

В финансовой математике аналогичное понятие intOU -процесса является центральным в описании ключевого понятия интегрированной изменчивости. См., например, [12], [13]. Другой тип приложений указан в следующем разделе 3.3.

Чтобы прояснить природу $X_t^*(\sigma)$, используем представление (19) для процесса $X_t^\uparrow(\sigma)$, эквивалентного $X_t(\sigma)$. Так как $Q_t(\sigma)$ и $V_t^\uparrow(\sigma)$ – аддитивные процессы, то (в очевидных обозначениях)

$$\begin{aligned} X_t^{\uparrow*}(\sigma) &= \int_0^t X_s^\uparrow(\sigma) ds = (1 - e^{-t})X_0(\sigma) + \int_0^t e^{-s} Q_s(\sigma) ds + \int_0^t V_s^\uparrow(\sigma) ds \\ &= (1 - e^{-t})X_0(\sigma) - e^{-t}Q_t(\sigma) + \int_0^t e^{-s} dQ_s(\sigma) + V_t^{\uparrow*}(\sigma) \\ &= X_0^\uparrow(\sigma) - X_t^\uparrow(\sigma) + \int_0^t e^{-s} dQ_s(\sigma) + V_t^\uparrow(\sigma) + V_t^{\uparrow*}(\sigma). \end{aligned} \quad (25)$$

Это представление показывает, что совместный процесс $(X_t^\uparrow(\sigma), X_t^{\uparrow*}(\sigma))$ – аффинный, и поэтому то же верно для $(X_t(\sigma), X_t^*(\sigma))$.

Заметим также, что

$$\int_0^t e^{-s} Q_s(\sigma) ds = \int_0^t (e^{-s} - e^{-t}) dQ_s(\sigma)$$

и

$$V_t^{\uparrow*}(\sigma) = \int_0^t (t - s) dV_s^\uparrow(\sigma),$$

и поэтому

$$X_{\sigma}^{\uparrow*}(\sigma) = (1 - e^{-t})X_0(\sigma) + \int_0^t (e^{-s} - e^{-t}) dQ_s(\sigma) + \int_0^t (t - s) dV_s(\sigma).$$

Отсюда, в частности, следует, что условное с-кумулянтное преобразование $X_t^*(\sigma)$ при данном $X_0(\sigma)$, которое важно для предсказаний, может быть представлено в виде

$$\begin{aligned} C\{\zeta \dot{\vdash} X_t^*(\sigma) | X_0(\sigma)\} &= (1 - e^{-t})X_0(\sigma) + \int_0^t C\{(e^{-s} - e^{-t})\zeta \dot{\vdash} Z'\} q(s) ds \\ &+ \int_0^t C\{(t - s)\zeta \dot{\vdash} Z'\} |C_s(\sigma)| ds, \end{aligned}$$

где

$$q(s) = \int_0^\infty e^{-v} \frac{d|C_{s+v}(\sigma)|}{ds} dv$$

(в предположении, что $|C_{s+v}|$ дифференцируема).

Кроме того, предполагая для простоты, что базис Леви Z неотрицателен, мы видим согласно (25), что значение $X_t^*(\sigma)$ во многом определяется $V_t^*(\sigma)$ для больших t .

С помощью суперпозиций независимых $\text{OU}_\wedge$ -процессов с различными весовыми функциями $\lambda(\sigma)$ можно ввести широкий спектр структур зависимости. Эти процессы называются $\text{supOU}_\wedge$ -процессами. Мы в особенности имеем в виду их временные зависимости. Аналогичный подход был использован в финансах, см. [10], [13]. Построение использует дополнительный базис Леви, ср. [3].

3.3. Приложения к процессам Кокса. Приложения специальных типов базисов Леви (гамма, обратных гауссовых, темпированных устойчивых) были использованы в [16], [17] и [53] в чисто пространственном контексте для моделирования меры интенсивности для процессов Кокса. Пространственные зависимости вводятся перемешиванием вида $m(A) = \int k(A, \xi) Z(d\xi)$ с подходящим образом выбранными ядрами k . Получаемая случайная мера m снова безгранично делима и поэтому определяет процессы m_t (случайных мер) с независимыми приращениями. Этот факт был использован в [18] для моделирования роста сорняков с помощью процессов Кокса, где поверхности интенсивности развиваются со временем в соответствии с подходящим процессом m_t этого рода, а лежащий в основе базис Леви принадлежит типу G (ср. пример 2.1). См. также [36].

Другой подход был использован для моделирования пространственной интенсивности λ в виде $\lambda(\xi) = \exp\{G(\xi)\}$, где $G(\xi)$ образуют гауссово случайное поле, см. [37]. Пространственно-временное обобщение этого подхода, использующее гауссово случайное поле (процесс) $G_t(\xi)$, развивающееся во времени в соответствии со стохастическим дифференциальным уравнением Орнштейна–Уленбека, рассмотрено в [19].

Альтернативно, любой неотрицательный $\text{supOU}_\wedge$ -процесс (поле) $\{X_t(\cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$ может быть использован как процесс интенсивности динамического процесса Кокса на $\mathbb{S}$, и при этом интегрированный процесс (поле) $\{X_t^*(\cdot)\}_{t \in \mathbb{R}}$ может служить как пространственная замена времени. Преимущество этого подхода по сравнению с гауссовой спецификацией лог-интенсивности в том, что обновления линейны.

3.4. Расширение. Обобщая (14), определим $X_t(\sigma)$ формулой

$$X_t(\sigma) = e^{-\lambda(\sigma)t} \int_{-\infty}^t e^{\lambda(\sigma)s} \int_{\mathcal{R}} f_{s-t}(\rho; \sigma) Z(d\rho \times \lambda(\sigma)ds),$$

где $\lambda(\sigma) > 0$ – параметр временной дилатации, а функция $f_s(\rho; \sigma)$ определена при $s \leq 0$ и $(\rho, \sigma) \in \mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d$, неотрицательна и удовлетворяет условию

$$f_{s'}(\rho; \sigma) \geq f_s(\rho; \sigma) \quad (26)$$

при $0 \geq s > s'$. Это условие выполняется, в частности, если $f_s(\rho; \sigma) = h(\rho; \sigma) \mathbf{1}_{C_s(\sigma)}(\rho)$ для некоторой (неотрицательной) функции $h(\rho; \sigma)$, а множества $C_s(\sigma)$ выбраны так же, как в разделе 3.1.

В этом случае мы снова имеем разложение

$$X_t(\sigma) = e^{-\lambda(\sigma)t} X_0(\sigma) + U_t(\sigma) + V_t(\sigma),$$

где теперь

$$U_t(\sigma) = e^{-\lambda(\sigma)t} \int_{-\infty}^0 e^{\lambda(\sigma)s} \in t_{\mathcal{R}} \{f_{s-t}(\rho; \sigma) - f_s(\rho; \sigma)\} Z(d\rho \times \lambda(\sigma)ds),$$

$$V_t(\sigma) = e^{-\lambda(\sigma)t} \int_0^t e^{\lambda(\sigma)s} \int_{\mathcal{R}} f_{s-t}(\rho; \sigma) Z(d\rho \times \lambda(\sigma)ds),$$

и это, вместе с (26), показывает, что $X_t(\sigma)$ – марковский процесс. Кроме того, $X_t(\sigma)$ можно также представить в виде

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^0 e^{\lambda(\sigma)s} f_s(\rho; \sigma) Z(d\rho \times \lambda(\sigma)ds),$$

и отсюда следует, что $X_t(\sigma)$ – стационарный процесс.

3.5. О пространственной структуре ОУ $_{\wedge}$ -процессов. Мы обсудили выше некоторые свойства ОУ $_{\wedge}$ -процессов, а именно, временное поведение $X_t(\sigma)$, где $X_t(\sigma)$ имеет вид (14). Здесь мы кратко обсудим пространственное поведение, а именно, будем рассматривать $X_t(\sigma)$ как стохастический процесс с одномерной величиной σ , играющей роль времени.

Из построения, очевидно, следует, что $\{X_t(\sigma)\}_{\sigma \in \mathbb{R}}$ – стационарный процесс для любого фиксированного t . Чтобы упростить обозначения, положим $t = 0$. Предположим для простоты, что $C_s(0) = [-c|s|, c|s|]$ для некоторого $c > 0$; тогда можно разложить $\{X_0(\sigma)\}_{\sigma \geq 0}$ с помощью аддитивных процессов следующим образом (см. рис. 4 как иллюстрацию):

$$X_0(\sigma) = X_0(0) - X_0^{\searrow}(\sigma) + X_0^{\rightarrow}(\sigma) - X_0^{\downarrow}(\sigma), \quad (27)$$

Рис. 4. Иллюстрация разложения (27)

где $X_0^{\searrow}(\sigma)$, $X_0^{\rightarrow}(\sigma)$ и $X_0^{\downarrow}(\sigma)$ – аддитивные процессы, определенные формулами

$$X_0^{\searrow}(\sigma) = X_0(0) - \int_{-\infty}^{-\frac{1}{2}c^{-1}\sigma} e^s Z([\sigma - c|s|, c|s|] \times ds), \quad (28)$$

$$X_0^{\rightarrow}(\sigma) = \int_{-\infty}^0 e^s Z([c|s|, \sigma + c|s|] \times ds), \quad (29)$$

$$X_0^{\downarrow}(\sigma) = \int_{-\frac{1}{2}c^{-1}\sigma}^0 e^s Z([c|s|, \sigma - c|s|] \times ds). \quad (30)$$

Кроме того, $\{X_0^{\searrow}(\sigma)\}_{\sigma \geq 0}$ не зависит от $\{X_0^{\rightarrow}(\sigma), X_0^{\downarrow}(\sigma)\}_{\sigma \geq 0}$.

Заметим, что динамика относительно σ довольно сильно отличается от динамики относительно t (можно сравнить (18) или (19) при $C_s(0) = [-c|s|, c|s|]$ с (27)). В частности, в отличие от $\{X_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$, процесс $\{X_t(\sigma)\}_{\sigma \in \mathbb{R}}$ не марковский. Однако это различие в существенной степени зависит от предположения (13). Как мы покажем в разделе 4.3, на самом деле есть по крайней мере один выбор множеств размаха $A_t(\sigma)$, при котором ключевые аспекты динамики оказываются одними и теми же для обоих процессов, и это связано с тейлоровской гипотезой замороженного потока для турбулентности.

§ 4. Пространственно-временные процессы СП-типа

В этом параграфе мы используем результаты §§ 2 и 3 для построения процессов СП-типа, определяемых как экспоненты от процессов $X_t(\sigma)$. В контексте процессов СП-типа мы интересуемся главным образом моделированием n -точечных корреляций и n -точечных корреляторов, которые определены ниже. Благодаря мультипликативной постановке все эти величины можно выразить в терминах k -кумулянтной функции процесса $X_t(\sigma)$, что позволяет проводить явные вычисления с помощью функционального уравнения (8).

Что касается моделирования, в контексте настоящей статьи, то мы главным образом имеем в виду описание стохастического поведения турбулентных полей диссипации энергии $\{\varepsilon_t(\sigma) : \sigma \in \mathcal{S}\}_{t \in \mathbb{R}}$. В качестве приложения мы показываем, каким образом СП-поля можно понимать как непрерывные аналоги мультипликативных каскадных процессов при описании турбулентных полей диссипации энергии.

Для простоты на протяжении всего параграфа мы ограничиваемся обсуждением множеств размаха вида

$$A_t(\sigma) = \{(\rho, s) : -\infty < s < t, \rho \in C_{s-t}(\sigma)\}, \quad (31)$$

где

$$C_s(\sigma) = [\sigma - g(s), \sigma + g(s)] \quad (32)$$

и функция $g(s)$, определенная на $(-\infty, 0]$, неотрицательна и убывает на $[-T, 0]$, причем $C_s(\sigma) = 0$ для $s \in (-\infty, -T)$. Как и в §3, мы определяем $g(s)$ при $s > 0$ по правилу $g(s) = g(-s)$.

Рис. 5. Иллюстрация перекрытия $A_t(\sigma) \cap A_{t'}(\sigma)$

Заметим, что в этом случае

$$|A_t(\sigma) \cap A_{t'}(\sigma)| = G((T - |t - t'|)_+)$$

(см. рис. 5), где

$$G(u) = 2 \int_0^u g(s) ds.$$

Рис. 6. Иллюстрация перекрытия $A_t(\sigma) \cap A_{t'}(\sigma')$

Для сравнения рис. 6 показывает геометрию перекрытия $A_t(\sigma) \cap A_{t'}(\sigma')$ при $\sigma \neq \sigma'$.

4.1. СП-поля. Процессы, которыми мы сейчас интересуемся, строятся с помощью аддитивных процессов $X_t(\sigma)$, определенных, как и выше, формулой

$$X_t(\sigma) = \int_{-\infty}^t \int_{\mathcal{S}} f_t(\rho, s; \sigma) Z(d\rho \times ds),$$

где $\sigma \in \mathcal{S}$, Z обозначает базис Леви на $\mathcal{R} = \mathcal{S} \times \mathbb{R}$ и $\mathcal{S} = \mathbb{R}^d$. Функции f имеют вид

$$f_t(\rho, s; \sigma) = h_t(\rho, s; \sigma) \mathbf{1}_{A_t(\sigma)}(\rho, \sigma), \quad (33)$$

где h — специального вида и каждой точке $a = (\sigma, t)$ в $\mathcal{R}$ отвечает некоторое множество размаха $A_t(\sigma)$, заданное формулой (31).

В таком случае СП-поле $Y_t(\sigma)$ определяется по правилу

$$Y_t(\sigma) = \exp\{X_t(\sigma)\}. \quad (34)$$

Этот способ задания определяет мультипликативный процесс с независимыми мультипликативными весами, поскольку базис Леви Z есть независимо рассеянная случайная мера. Поля такого рода называются здесь полями стохастической прерывистости (СП), поскольку мультипликативность позволяет адекватно моделировать прерывистое поведение. В этом отношении СП-поля могут рассматриваться как динамическое, непрерывное и однородное обобщение мультипликативных каскадных процессов. Эвристически, это можно видеть из следующих соображений. В простейшей формулировке, мультипликативный каскад для величины $\epsilon(\sigma)$ может быть описан формулой

$$\epsilon(\sigma) = \prod_j q_j(\sigma),$$

где мультипликативные веса q_j – независимые случайные величины. Они действуют на иерархии шкал l_j , характеризуемой индексом шкалы j , т.е. для любого j существует семейство независимых мультипликативных весов $\{q_j^i : i \in \mathbb{N}\}$ и связанное с ним семейство множеств $\{A_j^i \in \mathcal{B}(\mathcal{S}) : i \in \mathbb{N}\}$, образующих разбиение $\mathcal{S}$, причем их евклидовы объемы удовлетворяют условию $l_j < l_{j'}$ при $j' < j$, а $q_j(\sigma) = q_j^i$ для $\sigma \in A_j^i$. Если мы теперь предположим, что q_j положительна для любого j , то каскадный процесс можно переписать в виде

$$\epsilon(\sigma) = \exp \left\{ \sum_j \ln q_j(\sigma) \right\}.$$

Теперь естественное и динамическое обобщение состоит в том, чтобы уплотнить шкалы, т.е. индекс шкалы j становится непрерывным и отождествляется с величиной t , что приводит к структурам, находящимся в рамках постановки (34). Обычное отождествление t с временем устанавливает теперь динамический аспект этого обобщения.

4.2. Корреляторы. Чтобы описать корреляционную структуру СП-поля, мы используем две родственные величины, полезные для мультипликативных процессов. А именно, определим *n-точечные корреляции*

$$m(a_1, m_1; \dots; a_n, m_n) = \mathbb{E} \{ Y_{t_1}(\sigma_1)^{m_1} \dots Y_{t_n}(\sigma_n)^{m_n} \} \quad (35)$$

и *n-точечные корреляторы*

$$c(a_1, m_1; \dots; a_n, m_n) = \frac{m(a_1, m_1; \dots; a_n, m_n)}{m(a_1, m_1) \dots m(a_n, m_n)}, \quad (36)$$

предполагая, что соответствующие моменты существуют и конечны. Здесь $a_i = (\sigma_i, t_i)$ и $m_i \in \mathbb{R}$ при $i = 1, \dots, n$. Это определение корреляторов естественно приспособлено к мультипликативности СП-поля, поскольку оно допускает сокращение независимых множителей в числителе и знаменателе. В дальнейшем мы всегда предполагаем, что приведенные выше корреляции и корреляторы существуют. В этом случае можно применить (8) и получить важный результат

$$m(a_1, m_1; \dots; a_n, m_n) = \exp \left\{ \int_{\mathcal{R}} K \left(\sum_{j=1}^n m_j f_{t_j}(a; \sigma_j); a \right) \mu(da) \right\}, \quad (37)$$

где $K(\theta; \xi) = \kappa(-i\theta; \xi)$ – k -кумулянтная функция (мы предполагаем, что она существует) случайной величины $Z'(\xi)$, определенной в разделе 2.1. Если Z однородна, то мы пишем $K(\theta)$ вместо $K(\theta; \xi)$.

4.3. Масштабирование корреляторов. Здесь масштабирование (скейлинг) некоторой функции $\Psi(x)$ означает, что $\Psi(x)$ демонстрирует степенное поведение $sx^{-\tau}$, где s – постоянная и так называемый масштабный показатель τ не зависит от x . Термин “скейлинг” или “масштабирование” возникает потому, что изменение шкалы $x' = kx$ вызывает изменение только величины постоянной s . Таким образом, степенное поведение (и τ) не зависят от масштаба.

В качестве примера полезности формулы (37) мы построим СП-поле, выражающее масштабные соотношения для n -точечных корреляторов. Этот тип корреляционной структуры наблюдается при диссипации энергии в турбулентном потоке и тесно связан с мультифрактальной и прерывистой природой поля крупнозернистой диссипации энергии (см. [46], [49], [50]). Для краткости мы ограничимся случаем $\mathcal{S} = \mathbb{R}$ и предположим, что базис Леви Z однороден и имеет конечную k -кумулянтную функцию $K(\theta; \xi) = K(\theta)$ для всех $\xi \in \mathcal{S}$ и $\theta \in D(K)$, где $D(K)$ – множество значений θ , на которых функция K определена. Функция h в (33) предполагается постоянной, $h = 1$.

В качестве функции $g(s)$ (определяющей множества размаха по формуле (32)) мы возьмем

$$g(s) = \frac{1}{2(T+s)} \quad \text{для } s \in [t_\eta - T, 0], \quad (38)$$

причем на $[-T, t_\eta - T]$ функция остается произвольной, но подчиненной двум условиям: она убывает на $[-T, 0]$ и число $|A_t(\sigma)|$ конечно, ср. рис. 7.

Рис. 7. Иллюстрация: функция $g(t)$

При такой постановке нетрудно видеть (с помощью (36), (37) и рис. 7), что если $m_1, m_2, m_1 + m_2 \in D(K)$, то

$$c((\sigma, t), m_1; (\sigma, t'), m_2) = \left(\frac{T}{|t - t'|} \right)^{K(m_1 + m_2) - K(m_1) - K(m_2)}, \quad |t - t'| \in [t_\eta, T],$$

а это – масштабирование по $|t - t'|$, и

$$c((\sigma, t), m_1; (\sigma', t), m_2) \propto |\sigma - \sigma'|^{-(K(m_1 + m_2) - K(m_1) - K(m_2))}, \quad |\sigma - \sigma'| \in [T^{-1}, t_\eta^{-1}],$$

а это – масштабирование по $|\sigma - \sigma'|$. Если m_1 и m_2 положительны, то масштабный показатель $\tau = K(m_1 + m_2) - K(m_1) - K(m_2)$ тоже положителен, как показывает неравенство Минковского. Константа пропорциональности в последнем выражении зависит от g . Аналогичные соотношения выполняются для корреляторов высших порядков, и все они могут быть выражены как функции перекрытий всех участвующих множеств размаха, что, в свою очередь, приводит к масштабирующим соотношениям. По поводу подробной характеристики корреляторов высших порядков и обобщения

на случай $S = \mathbb{R}^d$ мы отсылаем к работам [46], [49], [50], [8]. Здесь мы формулируем только основные результаты. Для возрастающей последовательности $\{t_j, 1 \leq j \leq n\}$ с $a_i = (\sigma, t_i)$ получаем

$$c(a_1, m_1; \dots; a_n, m_n) \propto \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n (t_k - t_{k-j})^{-\tau[m_{k-j}, \dots, m_k]} \quad (39)$$

для временных корреляторов, где показатели $\tau[m_{k-j}, \dots, m_k]$ определяются формулой

$$\tau[m_1, \dots, m_j] = K\left(\sum_{i=1}^{j-2} m_i\right) + K\left(\sum_{i=1}^j m_i\right) - 2K\left(\sum_{i=1}^{j-1} m_i\right). \quad (40)$$

Эти показатели могут быть как положительны, так и отрицательны, в зависимости от j и от порядков m . Однако при $j = 2$ они строго положительны для всех положительных m .

Следующий шаг моделирования состоит в таком выборе k -кумулянтной функции K , чтобы получаемые с ее помощью значения показателей $\tau[m_1, \dots, m_j]$, даваемые формулой (40), соответствовали эмпирически определяемым значениям этих показателей с наибольшей возможной точностью. Мы обсуждаем этот вопрос в [8] (см. также [50]).

Для пространственных корреляторов мы получаем похожее соотношение

$$c(a_1, m_1; \dots; a_n, m_n) \propto \prod_{j=1}^{n-1} \prod_{k=j+1}^n (\sigma_k - \sigma_{k-j})^{-\tau[m_{k-j}, \dots, m_k]} \quad (41)$$

для возрастающей последовательности $\{\sigma_j, 1 \leq j \leq n\}$ с $a_i = (\sigma_i, t)$. Заметим, что масштабирующие показатели τ — одни и те же в обоих случаях. Однако в [46] показано, как построить СП-поле, для которого эти показатели различны.

Для дальнейшей иллюстрации этих масштабирующих соотношений мы приведем следующее выражение для временного коррелятора с $n = 3$:

$$c(a_1, m_1; a_2, m_2; a_3, m_3) \propto (t_2 - t_1)^{-\tau[m_1, m_2]} (t_3 - t_2)^{-\tau[m_2, m_3]} (t_3 - t_1)^{-\tau[m_1, m_2, m_3]}. \quad (42)$$

Аргументы масштабирующих показателей τ отражают гнездовую структуру различных перекрытий. Здесь точки a_1, a_2 и a_2, a_3 непосредственно соседствуют, а точки a_1, a_3 одновременно соседствуют с некоторой точкой.

Можно также мотивировать вид (38) функции $g(t)$ с помощью тейлоровской гипотезы замороженного потока (по поводу обсуждения этой гипотезы см. [25]). Она утверждает, что пространственная вариация диссипации энергии может быть выражена в терминах временной вариации с помощью средней скорости потока v_0 , если относительные флуктуации около v_0 малы. Можно вывести (38) с помощью этого предположения и определения множества размаха $A_t(\sigma)$ как множества, ограниченного с помощью функции g , как в (32). Более точно, формула (38) следует из предположения, что процессы $\{Y_t(\sigma)\}_{t \in \mathbb{R}}$ и $\{Y_t(\sigma)\}_{\sigma \in \mathbb{R}}$ имеют одинаковые двухточечные корреляторы. (Подробности можно найти в статьях [47] и [8].)

4.4. Дальнейшее моделирование двухточечных корреляторов. В предыдущем разделе мы использовали СП-поле для моделирования масштабирования двухточечных корреляторов с помощью специального выбора функции $g(s)$ в (38), и поэтому выбора соответствующих множеств размаха $A_t(\sigma)$. В дальнейшем мы приведем некоторые примеры того, что можно моделировать, используя больше степеней свободы, входящих в определение СП-поля $Y_t(\sigma)$.

Чтобы выразить идеи ясно, мы примем постановку задачи из раздела 4.3 и выберем функцию $g(s)$ так, чтобы моделировать формы, отличные от масштабирования двухточечных корреляторов. Приведенные здесь идеи могут также служить отправной точкой моделирования пространственно-временных корреляторов высших порядков с помощью всех степеней свободы, входящих в общее определение СП-поля. Но сейчас мы рассматриваем только двухточечные корреляторы и сосредоточиваемся на степени свободы в выборе множеств размаха $A_t(\sigma)$ в случае $S = \mathbb{R}$ и для однородного базиса Леви Z . Мы также предполагаем, что рассматриваемое СП-поле однородно, что достигается инвариантностью множеств размаха относительно формы, т.е. условием $A_t(\sigma) = (\sigma, t) + A$. Исходной точкой является уравнение (37), которое упрощается в рассматриваемом случае следующим образом:

$$c((\sigma, t), 1; (\sigma, t'), 1) = c(|t - t'|) = e^{|A_t(\sigma) \cap A_{t'}(\sigma)|(K(2) - 2K(1))}, \quad (43)$$

где разность $K(2) - 2K(1)$ положительна и $c(|t - t'|)$ – стенографическое выражение. Иначе говоря,

$$\ln c(u) = (K(2) - 2K(1))G(T - u)$$

при $u \in (0, T]$. Итак, если g непрерывна на $[-T, 0]$, то

$$g(u) = -\frac{1}{K(2) - 2K(1)} \frac{c'(T - u)}{c(T - u)} \quad (44)$$

при $u \in (0, T]$. Это указывает, как выбрать g , чтобы получить желаемое поведение двухточечной корреляторной функции c .

ПРИМЕР 4.1 (экспоненциальное убывание). Предположим, что мы хотим моделировать процесс с корреляторной функцией, равной $c(t) = 1 + e^{-\lambda t}$ при $0 < t < T$ и $c(t) = 1$ при $t > T$, где $\lambda > 0$. Тогда из (44) следует, что

$$g(u) = -\frac{1}{K(2) - 2K(1)} \frac{\lambda e^{-\lambda(T-u)}}{1 + e^{-\lambda(T-u)}},$$

и эта функция определяет множество размаха $A_t(\sigma)$ по формулам (31) и (32). В физике экспоненциальное убывание есть часто применяемая модель близкодействующей корреляции в равновесных системах.

ПРИМЕР 4.2 (степенное убывание). Предположим, что мы хотим моделировать процесс с корреляторной функцией, равной $c(t) = 1 + (t + t_0)^{-\alpha}$, где $\alpha > 0$ и $t_0 > 0$. Тогда

$$g(u) = -\frac{1}{K(2) - 2K(1)} \frac{\alpha(T - u + t_0)^{-\alpha-1}}{(1 + (T - u + t_0)^{-\alpha})}.$$

Этот пример может рассматриваться, как приближение к масштабированию двухточечных корреляторов для $t \gg t_0$.

4.5. Динамическое среднedisперсное моделирование.

Общие замечания. В этом разделе мы рассматриваем главным образом нестационарные СП-поля. В частности, мы заинтересованы в построении СП-полей с данной временной эволюцией процесса среднего и процесса дисперсии, оставляя в стороне обсуждение возможных корреляций. Таким образом, цель этого раздела – моделирование временной эволюции первого и второго моментов

$$\mathbb{E}\{Y_t(\sigma)\} = \exp\left\{\int_{\mathcal{R}} K(h_t(a; \sigma)1_{A_t(\sigma)}; a) \mu(da)\right\} \equiv \mu_1(t), \quad (45)$$

$$\mathbb{E}\{(Y_t(\sigma))^2\} = \exp\left\{\int_{\mathcal{R}} K(2h_t(a; \sigma)1_{A_t(\sigma)}; a) \mu(da)\right\} \equiv \mu_2(t), \quad (46)$$

которые предполагаются независимыми от σ . Основное предположение снова состоит в наличии факторизуемого базиса Леви Z , откуда следует, что величина $K(\zeta; a)$ не зависит от $a \in \mathcal{R}$. Однако допускается явная зависимость величины $A_t(\sigma)$ от t и непостоянство функций $h_t(a; \sigma)$. Это дает достаточную свободу для независимого моделирования моментов $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$.

Процесс дисперсии с постоянным средним. Простейшая ситуация связана с постоянным средним $\mu_1(t) = 1$ и переменным вторым моментом $\mu_2(t)$. Первое условие достигается, если просто положить $h_t(a, \sigma) = c_h = \text{const}$ таким образом, чтобы $K(c_h) = 0$ и $K(2c_h) \neq 0$, если такая постоянная существует. Это требует, чтобы k -кумулянтная функция K существовала в окрестности точки 0. Тогда средние становятся независимы от $A_t(\sigma)$, в то время как

$$\ln \mu_2(t) = K(2c_h)\mu(A_t(\sigma)), \quad (47)$$

и мы, вообще говоря, можем выбрать множества $A_t(\sigma)$ и меру μ так, чтобы моделировать $\mu_2(t)$.

ПРИМЕР 4.3 (возрастающий второй момент (I)). Для простоты положим $\mathcal{R} = \mathbb{R}^4$ и в качестве μ возьмем лебегову меру. Предположим, что мы хотим найти дифференцируемую функцию $\mu_2(t)$ с $\mu_2'(t) > 0$ такую, что $\mu_2(t) \rightarrow 1$ при $t \rightarrow -\infty$. Пусть $B(r)$ обозначает шар радиуса r . Предположим, что $A_t(\sigma)$ имеет вид

$$A_t(\sigma) = \{(\sigma, s) + B(r(s)) : s \leq t\}$$

для некоторой функции $r(s) \geq 0$.

Тогда

$$\mu(A_t(\sigma)) = \int_{-\infty}^t ds \int_{(\sigma, s) + B(r(s))} d\rho \quad (48)$$

и, следовательно, полагая

$$r(t) = \left(\frac{3\mu_2'(t)}{4\pi K(2c_h)\mu_2(t)} \right)^{1/3}, \quad (49)$$

мы видим, что (46) выполнено.

Например, мы можем взять $\mu_2(t) = 1 + e^t$ и

$$Y_t(\sigma) = \exp \left\{ \int_{-\infty}^t \int_{(\sigma, t') + B(r(t'))} Z(da') \right\}, \quad (50)$$

где базис Леви Z определен однородным, причем Z' распределен в соответствии с устойчивым законом $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ ⁴ с $\alpha \neq 1$, $\beta = -1$ и

$$\mu = \frac{\sigma^\alpha}{\cos\left(\frac{\pi\alpha}{2}\right)}.$$

В этом случае к-кумулянтная функция Z' равна функции

$$K(\theta) = \mu(\theta - \theta^\alpha)$$

с двумя нулями $\theta = 0$ и $\theta = 1$. Таким образом, мы полагаем $c_h = 1$. В соответствии с (49) мы выбираем

$$r(t) = \frac{3e^t}{4\pi K(2)(1 + e^t)}$$

и получаем $\mu_1(t) = 1$ и $\mu_2(t) = 1 + e^t$.

ПРИМЕР 4.4 (возрастающий второй момент (II)). Здесь мы используем однородный НОГ базис Леви вместо устойчивого базиса Леви, использованного в предыдущем примере. Теперь к-кумулянтная функция равна

$$K(\theta) = \delta \left\{ \sqrt{\alpha^2 - \beta^2} - \sqrt{\alpha^2 - (\beta + \theta)^2} \right\} + \mu\theta,$$

где $\mu \in \mathbb{R}$, $\delta \in \mathbb{R}_+$ и $0 \leq |\beta| < \alpha$. Если мы определим постоянную c_h формулой $(\beta + c_h)^2 = \alpha^2$ и положим

$$\delta = \frac{-\mu c_h}{\sqrt{\alpha^2 - \beta^2}},$$

то мы получим $K(c_h) = 0$, и если $Y_t(\sigma)$ определен формулой (50) при

$$r(t) = \frac{3e^t}{4\pi K(2c_h)(1 + e^t)},$$

то $\mu_1(t) = 1$ и $\mu_2(t) = 1 + e^t$.

⁴Здесь мы используем обозначения, введенные в [43], в соответствии с которыми $S_\alpha(\sigma, \beta, \mu)$ – безгранично делимый закон с с-кумулянтной функцией

$$C\{\theta \nmid X\} = \begin{cases} \exp \left\{ -\sigma^\alpha |\theta|^\alpha \left(1 - i\beta \left(\text{sign}(\theta) \text{tg} \left(\frac{\pi\alpha}{2} \right) \right) \right) + i\mu\theta \right\} & (\alpha \neq 1), \\ \exp \left\{ -\sigma |\theta| \left(1 + i\beta \frac{2}{\pi} (\text{sign}(\theta) \ln(|\theta|)) \right) + i\mu\theta \right\} & (\alpha = 1). \end{cases}$$

ПРИМЕР 4.5 (произвольно меняющийся второй момент). Положим

$$Y_t(\sigma) = \exp \left\{ \int_{(\sigma, t) + B(r(t))} Z(da') \right\},$$

где Z снова однороден. Если взять

$$r(t) = \left(\frac{3 \ln \mu_2(t)}{4\pi K(2)} \right)^{1/3},$$

то $E\{(Y_t(\sigma))^2\} = \mu_2(t)$ и $E\{Y_t(\sigma)\} = 1$, где $\mu_2(t) \geq 1$ может быть выбран произвольно.

Процессы среднего и дисперсии. Мы теперь сосредоточимся на СП-полях, для которых оба момента $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ меняются вместе с t . В отличие от предыдущего, мы теперь рассматриваем случай, когда функция $h_t(a; \sigma)$ меняется с изменением t , но не меняется, когда меняются a и σ . Соответственно мы записываем эту функцию как h_t . Тогда (45) и (46) принимают вид

$$E\{Y_t(\sigma)\} = \exp \{ \mu(A_t(\sigma)) K(h_t 1_{A_t(\sigma)}) \} \equiv \mu_1(t), \quad (51)$$

$$E\{(Y_t(\sigma))^2\} = \exp \{ \mu(A_t(\sigma)) K(2h_t 1_{A_t(\sigma)}) \} \equiv \mu_2(t). \quad (52)$$

Чтобы решить эти два уравнения, мы имеем в своем распоряжении три величины, а именно, K , h и $\mu(A_t(\sigma))$. Поэтому мы можем ограничиться выбором к-кумулянтной функции K заранее некоторым подходящим образом и затем решать (51) и (52) относительно h_t и $\mu(A_t(\sigma))$. Заметим здесь, что $A_t(\sigma)$ все еще произвольны и только мера $\mu(A_t(\sigma))$ определена. Таким образом, еще остается некоторая свобода в моделировании корреляционной структуры СП-поля $Y_t(\sigma)$.

ПРИМЕР 4.6. Особенно простой пример дается однородным устойчивым базисом Леви на $\mathcal{R} = \mathbb{R}^4$, определенным в примере 4.3. Из уравнений (51) и (52) следует, что

$$q_t \equiv \frac{\ln \mu_2(t)}{\ln \mu_1(t)} = \frac{K(2h_t)}{K(h_t)} = \frac{2h_t - (2h_t)^\alpha}{h_t - h_t^\alpha}.$$

Предполагая теперь, что $q_t > 2^\alpha$ для всех t (что тривиально выполняется при $\alpha < 1$), мы получаем

$$h_t = \left(\frac{q_t - 2}{q_t - 2^\alpha} \right)^{1/(\alpha-1)}.$$

Наконец, положим

$$r(t) = \left(\frac{3 \ln \mu_1(t)}{4\pi K(h_t)} \right)^{1/3}$$

и определим множества размаха $A_t(\sigma) = (\sigma, t) + B_{r(t)}$ и СП-поле $Y_t(\sigma)$ – как в примере 4.3. В этой постановке уравнения (51) и (52) выполняются для произвольных функций $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$, если $q_t > 2^\alpha$. Частный пример дается формулой $\mu_2(t) = \mu_1(t)^\tau + \mu_1(t)^2$ с произвольным τ . Этот тип соотношения между первым и вторым моментами является определяющей особенностью экспоненциального семейства моделей Твиди (ср., например, [28]).

§ 5. Выводы

Мы обсудили некоторые пространственно-временные модели $X_t(\sigma)$ и $Y_t(\sigma) = \exp\{X_t(\sigma)\}$, где модели $X_t(\sigma)$ определяются в терминах интегралов по базисам Леви. Нашей основной целью было построение реалистических динамических моделей, непрерывных по пространству и времени, для полей диссипации энергии $\epsilon_t(\sigma)$ турбулентности при большом числе Рейнольдса, в соответствии с недавними успехами (в частности, формулировками в терминах случайных каскадов) исходной феноменологической теории однородной и изотропной турбулентности, принадлежащей Колмогорову. (Мы также кратко обсуждаем применимость результатов, полученных при пространственно-временном моделировании, в частности, с помощью анализа изображений.) В отличие от моделей дискретных случайных каскадов, рассматривавшихся в [27], [22], [24] и [29], предлагаемые здесь модели непрерывны и однородны; в частности, мы уточняем, как одна из рассматриваемых моделей оказывается в полном согласии с тейлоровской гипотезой замороженного потока.

Мы надеемся в дальнейшей работе извлечь гораздо больше сведений из возможностей настоящей работы для более подробного, ясного и цельного моделирования турбулентных полей, с пристальным вниманием к недавним экспериментальным свидетельствам.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] О. Е. Barndorff-Nielsen. Probability and statistics; selfdecomposability, finance and turbulence // Proceedings of the Conference "Probability towards 2000" (New York, 1995) / ed. L. Accardi, C. C. Heyde. New York: Springer-Verlag, 1998. P. 47–57. (Lecture Notes in Statist. V. 128.)
- [2] О. Е. Barndorff-Nielsen. Processes of normal inverse Gaussian type // Finance Stoch. 1998. V. 2. № 1. P. 41–68.
- [3] О. Е. Barndorff-Nielsen. Superposition of Ornstein–Uhlenbeck type processes // Теория вероятн. и ее примен. 2001. Т. 45. № 2. С. 289–311.
- [4] О. Е. Barndorff-Nielsen. Modelling by Lévy processes // Selected Proceedings of the Symposium on Inference for Stochastic Processes (Athens, 2000) / ed. I. V. Basawa, C. C. Heyde, R. L. Taylor. Beachwood: Inst. Math. Statist., 2001. P. 25–31. (IMS Lecture Notes Monogr. Ser. V. 37.)
- [5] О. Е. Barndorff-Nielsen, J. L. Jensen, M. Sørensen. Parametric modelling of turbulence // Philos. Trans. Roy. Soc. London A. 1990. V. 332. P. 439–455.
- [6] О. Е. Barndorff-Nielsen, J. L. Jensen, M. Sørensen. A statistical model for the streamwise component of a turbulent velocity field // Ann. Geophys. 1993. V. 11. P. 99–103.
- [7] О. Е. Barndorff-Nielsen, J. Pedersen, K. Sato. Multivariate subordination, self-decomposability and stability // Adv. in Appl. Probab. 2001. V. 33. № 1. P. 160–187.
- [8] О. Е. Barndorff-Nielsen, J. Schmiegell. Lévy-based spatial-temporal modelling // In preparation, 2003.
- [9] О. Е. Barndorff-Nielsen, N. Shephard. Modelling by Lévy processes for financial econometrics // Lévy Processes – Theory and Applications / ed. О. Е. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick. Boston: Birkhäuser, 2001. P. 283–318.
- [10] О. Е. Barndorff-Nielsen, N. Shephard. Non-Gaussian Ornstein–Uhlenbeck-based models and some of their uses in financial economics // J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol. 2001. V. 63. № 2. P. 167–241.
- [11] О. Е. Barndorff-Nielsen, N. Shephard. Normal modified stable processes // Theory Probab. Math. Statist. 2001. № 65. P. 1–20.

- [12] O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard. Integrated OU processes and non-Gaussian OU-based stochastic volatility models // *Scand. J. Statist.* 2003. V. 30. № 2. P. 277–295.
- [13] O. E. Barndorff-Nielsen, N. Shephard. *Financial Volatility: Stochastic Volatility and Lévy Based Models*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004 (to appear).
- [14] O. E. Barndorff-Nielsen, S. Thorbjørnsen. A connection between classical and free infinite divisibility // *Research Report 2003-7*. Aarhus: Univ. of Aarhus, MaPhySto, 2003.
- [15] T. Bohr, M. H. Jensen, G. Paladin, A. Vulpiani. *Dynamical Systems Approach to Turbulence*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1998. (Cambridge Nonlinear Science Series. V. 8.)
- [16] A. Brix. *Spatial and Spatio-Temporal Models for Weed Abundance* // Ph.D. Thesis. Copenhagen: Royal Veterinary and Agricultural University, 1998.
- [17] A. Brix. Generalized gamma measures and shot-noise Cox processes // *Adv. in Appl. Probab.* 1999. V. 31. № 4. P. 929–953.
- [18] A. Brix, J. Chadœuf. Spatio-temporal modelling of weeds by shot-noise G Cox processes // *Biom. J.* 2002. V. 44. № 1. P. 83–99.
- [19] A. Brix, P. J. Diggle. Spatiotemporal prediction for log-Gaussian Cox processes // *J. R. Stat. Soc. Ser. B Stat. Methodol.* 2001. V. 63. № 4. P. 823–841.
- [20] M. Çağlar, E. Çinlar. Lyapunov exponents of Poisson shot-noise velocity fields // *Stochastic Process. Appl.* 2001. V. 94. № 1. P. 29–49.
- [21] P. Carmona, F. Petit, M. Yor. Exponential functionals of Lévy processes // *Lévy Processes – Theory and Applications* / ed. O. E. Barndorff-Nielsen, T. Mikosch, S. Resnick. Boston: Birkhäuser, 2001. P. 41–55.
- [22] J. Cleve, M. Greiner. The Markovian metamorphosis of a simple turbulent cascade model // *Phys. Lett. A*. 2000. V. 273. № 1–2. P. 104–108.
- [23] D. Duffie, D. Filipović, W. Schachermayer. Affine processes and applications in finance // *Ann. Appl. Probab.* 2003. V. 13. № 3. P. 984–1053.
- [24] H. C. Eggers, T. Dzikian, M. Greiner. Translationally invariant cumulants in energy cascade models of turbulence // *Phys. Lett. A*. 2001. V. 281. № 4. P. 249–255.
- [25] U. Frisch. *Turbulence. The Legacy of A. N. Kolmogorov*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1995.
- [26] S. Ghashgaie, W. Breymann, J. Peinke, P. Talkner, Y. Dodge. Turbulent cascades in foreign exchange markets // *Nature*. 1996. V. 381. P. 767–770.
- [27] M. Greiner. Turbulent random multiplicative branching processes // *Lectures on Multi-scale and Multiplicative Processes in Fluid Flows* / ed. E. Waymire et al. Aarhus: MaPhySto, Univ. of Aarhus, 2002. P. 81–88. (MaPhySto Lecture Notes № 11.)
- [28] B. Jørgensen. *The Theory of Dispersion Models*. London: Chapman & Hall, 1997.
- [29] B. Jouault, M. Greiner, P. Lipa. Fix-point multiplier distributions in discrete turbulent cascade models // *Phys. D*. 2000. V. 136. P. 125–144.
- [30] O. Kallenberg. *Random Measures*. Berlin: Akademie-Verlag, 1986.
- [31] А. Н. Колмогоров. Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при очень больших числах Рейнольдса // *Докл. АН СССР*. 1941. Т. 30. № 4. С. 299–303.
- [32] А. Н. Колмогоров. Рассеяние энергии при локально изотропной турбулентности // *Докл. АН СССР*. 1941. Т. 32. № 1. С. 19–21.
- [33] А. Н. Колмогоров. Уточнение представлений о локальной структуре турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости при больших числах Рейнольдса // *Mécanique de la turbulence: Actes du Colloque International du CNRS* 1962. P. 447–451; А. Н. Колмогоров. *Избранные труды. Математика и механика*. М.: Наука, 1985.
- [34] S. Kwapień, W. A. Wołyński. *Random Series and Stochastic Integrals: Single and Multiple*. Boston: Birkhäuser, 1992.
- [35] C. Meneveau, K. R. Sreenivasan. The multifractal nature of turbulent energy dissipation // *J. Fluid Mech.* 1991. V. 224. P. 429–484.
- [36] J. Møller. Shot noise Cox processes // *Research Report 2002-18*. Aarhus: MaPhySto, Univ. of Aarhus, 2002.

- [37] J. Møller, A.R. Syversveen, R. P. Waagepetersen. Log Gaussian Cox processes // *Scand. J. Statist.* 1998. V. 25. №3. P. 451–482.
- [38] А. С. Монин, А. М. Яглом. Статистическая гидромеханика. Т. 1, 2. М.: Наука, 1965, 1967.
- [39] E. Nicolato, E. Venardos. Option pricing in stochastic volatility models of the Ornstein–Uhlenbeck type // *Math. Finance*. 2003. V. 13. №4. P. 445–466.
- [40] А. М. Обухов. Some specific features of atmospheric turbulence // *J. Fluid Mech.* 1962. V. 13. P. 77–81.
- [41] J. Pedersen. The Lévy–Itô decomposition of an independently scattered random measure // *Research Report 2003-2*. Aarhus: MaPhySto, Univ. of Aarhus, 2003.
- [42] B. Rüdiger. Stochastic integration with respect to compensated Poisson random measures on separable Banach spaces // *Research Report, SFB 611*. Bonn: Universität Bonn, 2003.
- [43] G. Samorodnitsky, M. Taqqu. *Stable non-Gaussian Random Processes*. New York: Chapman & Hall, 1994.
- [44] K. Sato. *Lévy Processes and Infinitely Divisible Distributions*. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1999.
- [45] W. Schoutens. *Lévy Processes in Finance*. New York: Wiley, 2003.
- [46] J. Schmiegel. Ein dynamischer Prozess für die statistische Beschreibung der Energiedissipation in der vollentwickelten Turbulenz // *Dissertation TU Dresden, Germany*, 2002.
- [47] J. Schmiegel. Some remarks on Taylor’s Frozen Flow Hypothesis // *Research Report*. Aarhus: MaPhySto, Univ. of Aarhus, 2003.
- [48] J. Schmiegel, T. Dziekan, J. Cleve, B. Jouault, M. Greiner. Scaling functions in a random multiplicative energy-cascade model of turbulence // *Phys. Rev. E*. 2002 (to appear).
- [49] J. Schmiegel, H. C. Eggers, M. Greiner. Dynamical random multiplicative cascade model in 1+1 dimensions // *Preprint cond-mat/0106347*, 2001.
- [50] J. Schmiegel, H. C. Eggers, M. Greiner. A spatio-temporal and causal multifractal stochastic process // *Phys. A*. 2003 (to appear).
- [51] A. N. Shiryaev. *Kolmogorov and the Turbulence*. Aarhus: MaPhySto, Univ. of Aarhus., 1999. (Miscellanea. № 12.)
- [52] K. R. Sreenivasan, R. A. Antonia. The phenomenology of small-scale turbulence // *Annu. Rev. Fluid Mech.* 1997. V. 29. №2. P. 435–472.
- [53] R. L. Wolpert, K. Ickstadt. Poisson/gamma random field models for spatial statistics // *Biometrika*. 1998. V. 85. №2. P. 251–267.

MaPhySto, Aarhus University;
 DYNSTOCH, Aarhus University
E-mail: oebn@imf.au.dk

Поступила в редакцию
 20.06.2003