Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

С. В. Бочкарев, Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 103–124

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm703>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.162.85.209

26 апреля 2023 г., 17:47:06

УДК 517.5

ВСЮДУ РАСХОДЯЩИЕСЯ РЯДЫ ФУРЬЕ ПО СИСТЕМЕ
УОЛША И МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫМ СИСТЕМАМ

С. В. БОЧКАРЕВ

В статье изложена новая конструкция построения всюду расходящихся рядов Фурье–Уолша, которая позволила вдвое сократить разрыв в классах Лебега–Орлича между нижней оценкой Шиппа и Муна, установленной на основе конструкции Колмогорова, и верхней оценкой Съёлина, полученной по методу Карлесона. Построены всюду расходящиеся после перестановки ряды Фурье по системе Уолша, а также по более общим системам характеров, с наилучшей нижней оценкой множителя Вейля. Установлены некоторые результаты, относящиеся к верхней оценке мажоранты частных сумм рядов по переставленным мультипликативным системам. Полученные результаты показывают определенные преимущества гармонического анализа на диадической группе для выявления и преодоления принципиальных трудностей в решении основных проблем анализа Фурье.

Библиография: 37 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша	105
§ 2. Всюду расходящиеся ряды по мультипликативным системам и смежные вопросы	115
Список литературы	122

Исследование сходимости почти всюду и безусловной сходимости почти всюду рядов по классическим и общим ортонормированным системам является одной из центральных проблем современной теории рядов Фурье.

Фундаментальные результаты в этом направлении принадлежат А. Н. Колмогорову [1]–[4], Д. Е. Меньшову [5], [6], Л. Карлесону [7].

ТЕОРЕМА (А. Н. Колмогоров, 1926). *Существует тригонометрический ряд Фурье–Лебега, расходящийся всюду.*

Сходимость почти всюду рядов Фурье в классах Лебега–Орлича для тригонометрической системы и системы Уолша, а также для более общих систем характеров была установлена на основе метода Л. Карлесона в работах Р. Ханта [8], [9], П. Съёлина [10], Дж. Госселина [11] и др.

Для системы Уолша наиболее сильной в настоящее время является следующая теорема [12].

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 02-01-00787), программы “Ведущие научные школы” (грант № 1549.2003.1) и гранта ОМН РАН “Современные проблемы теоретической математики”.

ТЕОРЕМА (П. Съёлин, Ф. Сория). Если

$$\int_0^1 |f(x)| \log^+ |f(x)| \log^+ \log^+ \log^+ |f(x)| dx < \infty,$$

то ряд Фурье–Уолша функции f сходится почти всюду.

Расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша и мультипликативным системам были построены И. Стейном [13], Ф. Шиппом [14], [15], К. Муном [16], П. Симоном [17] и др.

ТЕОРЕМА (Ф. Шипп, К. Мун). Для любого $\varepsilon > 0$ существует такая функция $f \in L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$, ряд Фурье–Уолша которой расходится всюду.

Автору удалось распространить основную идею конструкции Колмогорова – полное устранение интерференции ядер Дирихле, соответствующих различным δ -функциям, на произвольные ограниченные ортонормированные системы [18]. Следует отметить, что главная трудность здесь состояла в отсутствии явного вида ядер Дирихле.

ОСНОВНАЯ ЛЕММА (С. В. Бочкарев). Пусть $\{f_n(t)\}_1^\infty$ – ортонормированная система, удовлетворяющая условию

$$\|f_n\|_\infty \leq M.$$

Тогда для любого $N = 1, 2, \dots$ существуют множество Ω точек $(t, \theta_1, \dots, \theta_N)$ единичного куба в $\mathbb{R}^{N+1}$,

$$\text{mes } \Omega \geq \gamma(M),$$

и последовательность натуральных чисел $\{m_p(t)\}$, $Np \leq m_p(t) < N(p+1)$, зависящая от t , такие, что для каждой точки $(t, \theta_1, \dots, \theta_N) \in \Omega$ справедливо неравенство

$$\overline{\lim}_{p \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^N \sum_{n=Np}^{m_p(t)} f_n(t) f_n(\theta_i) \geq BN \log N,$$

где B и $\gamma(M)$ – положительные постоянные.

На основании этого утверждения была установлена следующая теорема (см. [18]).

ТЕОРЕМА (С. В. Бочкарев). Для любой ортонормированной системы, ограниченной в совокупности, существует ряд Фурье–Лебега, расходящийся на множестве положительной меры.

Как показал К. С. Казарян [19], множество положительной меры здесь нельзя заменить на множество полной меры даже для полных ортонормированных систем. Отметим, однако, что для систем характеров (тригонометрической системы, системы Уолша, мультипликативных систем и др.) из этой теоремы непосредственно следует существование рядов Фурье–Лебега, расходящихся почти всюду.

Что касается количественных результатов, то прямое применение подхода Колмогорова для определения границы в классах Орлича между сходимостью и расходимостью почти всюду рядов Фурье дает только оценки с двойным логарифмом [14]–[16].

В этой статье содержится принципиально новая конструкция построения всюду расходящихся рядов Фурье–Уолша, которая позволяет вдвое сократить разрыв между верхней оценкой Съёлина и нижними оценками Шиппа и Муна. Кроме того, здесь

построены всюду расходящиеся после перестановки ряды по системе Уолша и мультипликативным системам с наилучшей нижней оценкой множителя Вейля (см. [20]).

В истории проблемы безусловной сходимости почти всюду рядов по классическим и общим ортогональным системам значительную роль сыграла работа Колмогорова и Минковского [4], в которой была изложена новая конструкция построения почти всюду расходящихся ортогональных рядов и содержалась принадлежащая Колмогорову важная теорема о существовании тригонометрического ряда из L_2 , расходящегося почти всюду после перестановки. Впоследствии эта теорема была обобщена на полные ортонормированные системы П. Л. Ульяновым [21] и А. М. Олевским [22].

Прогресс в определении скорости роста множителя Вейля для безусловной сходимости почти всюду был достигнут сначала для системы Уолша. Наилучшая в настоящее время и, вероятно, окончательная нижняя оценка множителя Вейля для безусловной сходимости почти всюду по системе Уолша ($\rho(n)$ порядка $\log n$) была впервые установлена автором (см. [23]–[25]). Отметим, что несколько позже такую оценку с применением другой конструкции получил С. Наката [26].

В настоящей статье содержится усиление результатов автора по безусловной сходимости почти всюду, заключающееся в построении всюду расходящихся после перестановки рядов Фурье по системе Уолша и системам характеров. Кроме того, здесь содержатся некоторые результаты, относящиеся к оценке сверху мажоранты частных сумм для переставленных мультипликативных систем.

Обозначения: $\{r_j(x)\}_{j=0}^\infty$ – система функций Радемахера, определенных на всей вещественной оси и непрерывных справа; $\{\psi_n(x)\}_{n=0}^\infty$ – система Уолша–Пэли, полная система характеров диадической группы; $\text{supp } f$ – носитель функции f ; f^+ – положительная часть f ; $\text{mes } E$ – мера Лебега множества E ; $\log$ – натуральный логарифм; $[x]$ – целая часть положительного числа x .

§ 1. Всюду расходящиеся ряды Фурье по системе Уолша

Система Уолша – это классическая система ортонормированных функций, имеющая различные применения, в частности, к цифровой обработке информации. В контексте настоящей статьи необходимо подчеркнуть, что и система Уолша, и тригонометрическая система являются составной частью гармонического анализа на топологических группах, причем диадический гармонический анализ позволяет отчетливее выявить те принципиальные трудности, которые возникают на пути решения основных проблем анализа Фурье.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Phi(u) = u\varphi(u)$, где $\varphi(u)$ – неубывающая на $[0, \infty)$ функция, $\varphi(0) = 1$ и $\varphi(u)$ удовлетворяет условию

$$\varphi(u) = o(\sqrt{\log u}) \quad \text{при } u \rightarrow \infty. \quad (1)$$

Тогда существует такая функция $f \in \Phi(L)$, ряд Фурье–Уолша которой расходится всюду на $[0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя (1), возьмем последовательность натуральных чисел N_ν и последовательность положительных чисел $\alpha_\nu \leq 1$, $\nu = 1, 2, \dots$, для которых

выполняются соотношения

$$N_{\nu+1} \geq 2N_{\nu}, \quad (2)$$

$$\varphi(u) \leq \alpha_{\nu} \sqrt{\log u}, \quad \text{если } u \geq \frac{2^{N_{\nu}}}{\sqrt{N_{\nu}}}, \quad (3)$$

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_{\nu} < \infty. \quad (4)$$

Для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ и $m = 0, 1, \dots, 2^{N_{\nu}} - 1$ определим полуинтервалы $\Delta_m^{(N_{\nu})}$ и $\delta_m^{(N_{\nu})}$:

$$\Delta_m^{(N_{\nu})} = \left[\frac{m}{2^{N_{\nu}}}, \frac{m+1}{2^{N_{\nu}}} \right), \quad (5)$$

$$\delta_m^{(N_{\nu})} = \left[\frac{m}{2^{N_{\nu}}} + \frac{m}{2^{2N_{\nu}}}, \frac{m}{2^{N_{\nu}}} + \frac{m}{2^{2N_{\nu}}} + \frac{1}{2^{2N_{\nu}}} \right). \quad (6)$$

Теперь определим полиномы $P_{N_{\nu}}(x)$ по системе Уолша, на основе которых строится функция $f(x)$. Сначала положим

$$F_{N_{\nu}}(x) = \frac{1}{\sqrt{N_{\nu}}} \sum_{j=0}^{N_{\nu}-1} r_j(x). \quad (7)$$

Полиномы $P_{N_{\nu}}(x)$ при $x \in [0, 1)$ определим следующим соотношением (см. (6), (7)):

$$P_{N_{\nu}}(x) = \begin{cases} 2^{N_{\nu}} F_{N_{\nu}}\left(\frac{m}{2^{N_{\nu}}}\right), & \text{если } x \in \delta_m^{(N_{\nu})}, \\ 0, & \text{если } x \notin \bigcup_{m=0}^{\infty} \delta_m^{(N_{\nu})}. \end{cases} \quad (8)$$

Продолжим $P_{N_{\nu}}(x)$ периодически на $(-\infty, \infty)$.

Из (6)–(8) и неравенства Хинчина следует, что $\|P_{N_{\nu}}\|_1 \asymp 1$ при всех $\nu = 1, 2, \dots$.

Определим теперь функцию $f(x)$ в виде сходящегося в $L(0, 1)$ ряда (см. (2))

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} f_{\nu}(x), \quad (9)$$

где

$$f_{\nu}(x) = \frac{1}{\sqrt{N_{\nu}}} P_{N_{\nu}}(2^{2N_{\nu}} x). \quad (10)$$

Для каждой точки $x \in [0, 1)$ построим две последовательности натуральных чисел $n(\nu, x)$ и $q(\nu, x)$ такие, что

$$2^{2N_{\nu}} \leq q(\nu, x) < n(\nu, x) < 2^{4N_{\nu}}. \quad (11)$$

Положим (см. (11))

$$n(\nu, x) = \sum_{j=2N_{\nu}}^{4N_{\nu}-1} \varepsilon_j(x) 2^j, \quad (12)$$

где функции $\varepsilon_j(x)$ принимают значения 0 или 1.

Пусть теперь

$$E_1 = \left\{ \sum_{j=2N_\nu}^{3N_\nu-1} r_j^+(x) \geq \frac{N_\nu}{2} \right\}, \quad (13)$$

$$E_2 = [0, 1] \setminus E_1. \quad (14)$$

Определим $\varepsilon_j(x)$ сначала при $2N_\nu \leq j < 3N_\nu$, полагая

$$\varepsilon_j(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}(1 + \operatorname{sign} r_j(x)), & \text{если } x \in E_1, \\ \frac{1}{2}(1 - \operatorname{sign} r_j(x)), & \text{если } x \in E_2. \end{cases} \quad (15)$$

Затем при $3N_\nu \leq j < 4N_\nu$ положим

$$\varepsilon_j(x) = \varepsilon_{j-N_\nu}(x). \quad (16)$$

Числа $q(\nu, x)$ определим следующим образом:

$$q(\nu, x) = \sum_{j=3N_\nu}^{4N_\nu-1} \varepsilon_j(x) 2^j. \quad (17)$$

Используя модифицированное ядро Дирихле $D_m^*(x)$ (см. [10], [27]) и операцию сложения на диадической группе, имеем

$$S_m(f, x) = \sum_{i=0}^{m-1} (f, \psi_i) \psi_i(x) = \int_0^1 f(t) \psi_m(x \oplus t) D_m^*(x \oplus t) dt. \quad (18)$$

Так как при $q(\nu, x) \leq i < n(\nu, x)$ функции $\psi_i(x)$ ортогональны $f_m(x)$, если $m \neq \nu$ (см. (2), (10), (11)), то (см. (18))

$$\begin{aligned} & S_{n(\nu, x)}(f, x) - S_{q(\nu, x)}(f, x) \\ &= \psi_{n(\nu, x)}(x) \sum_{j=2N_\nu}^{3N_\nu-1} \varepsilon_j(x) \int_0^1 f_\nu(t) \psi_{n(\nu, x)}(t) D_{2^j}^*(x \oplus t) dt. \end{aligned} \quad (19)$$

Здесь учитывалось, что при любом $t \in [0, 1]$ для $j \geq 3N_\nu$ ввиду соотношений (12), (17) имеем

$$\psi_{n(\nu, x)}(t) D_{2^j}^*(t) = \psi_{q(\nu, x)}(t) D_{2^j}^*(t).$$

Далее, при всех $t, x \in [0, 1]$ справедливо равенство

$$f_\nu(t) \psi_{n(\nu, x)}(t) = f_\nu(t). \quad (20)$$

В самом деле (см. (12), (17)),

$$\psi_{n(\nu, x)}(t) = \psi_{n(\nu, x)-q(\nu, x)}(t) \psi_{q(\nu, x)}(t).$$

Но при $t \in \operatorname{supp} f_\nu$ в силу определения чисел $n(\nu, x)$ и $q(\nu, x)$ и функций $f_\nu(t)$ (см. (6), (8), (10)) выполняется равенство

$$\psi_{n(\nu, x)-q(\nu, x)}(t) = \psi_{q(\nu, x)}(t).$$

Отсюда следует (20).

Ввиду соотношения (20), снова используя определение функции $f_\nu(t)$, получаем, что при любом $j < 3N_\nu$ справедливо равенство (см. (5), (6), (8), (10))

$$\int_0^1 f_\nu(t) \psi_{n(\nu, x)}(t) D_{2j}^*(x \oplus t) dt = \frac{1}{N_\nu} \int_0^1 G_\nu(t) D_{2j}^*(x \oplus t) dt, \quad (21)$$

где

$$G_\nu(t) = \sum_{j=2N_\nu}^{3N_\nu-1} r_j(t). \quad (22)$$

Соединяя соотношения (19), (21) и (22), приходим к выводу, что

$$S_{n(\nu, x)}(f, x) - S_{q(\nu, x)}(f, x) = \frac{1}{N_\nu} \psi_{n(\nu, x)}(x) \sum_{j=2N_\nu}^{3N_\nu-1} \varepsilon_j(x) r_j(x). \quad (23)$$

В силу выбора функций $\varepsilon_j(x)$ (см. (15)) из (23) получаем окончательно, что при всех $\nu = 1, 2, \dots$ и $x \in [0, 1)$ имеет место оценка

$$|S_{n(\nu, x)}(f, x) - S_{q(\nu, x)}(f, x)| \geq \frac{1}{2}. \quad (24)$$

Итак, установлено (см. (2), (11), (24)), что ряд Фурье–Уолша функции $f(x)$ всюду расходится.

Докажем, что $f \in \Phi(L)$. Обозначим

$$E_\nu = \text{supp } f_\nu$$

и положим

$$G_\nu = E_\nu \setminus \bigcup_{m=\nu+1}^{\infty} E_m. \quad (25)$$

Из (6)–(10) следует, что $\lim_{\nu \rightarrow \infty} \text{mes}(\bigcup_{m=\nu}^{\infty} E_m) = 0$, и поэтому с точностью до множества меры нуль

$$\text{supp } f = \bigcup_{\nu=1}^{\infty} G_\nu.$$

Таким образом, учитывая, что $G_\nu \cap G_m = \emptyset$ при $m \neq \nu$, имеем (см. (9), (25))

$$\int_0^1 \Phi(|f(x)|) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{G_\nu} \Phi(|f(x)|) dx = \sum_{\nu=1}^{\infty} \int_{G_\nu} \Phi\left(\left|\sum_{m=1}^{\nu} f_m(x)\right|\right) dx. \quad (26)$$

Далее, $\text{mes } G_\nu \leq 2^{-N_\nu}$ и, следовательно (см. (25), (26)),

$$\int_{G_\nu} \Phi(|f(x)|) dx \leq \alpha_\nu + \int_{\alpha_\nu 2^{N_\nu}}^{\infty} \text{mes}\left\{\Phi\left(\left|\sum_{m=1}^{\nu} f_m(x)\right|\right) > y\right\} dy. \quad (27)$$

Так как $\Phi(u)$ строго возрастает, то существует неубывающая обратная функция $\Psi(y)$. Поэтому, учитывая, что $\zeta(2) = \pi^2/6$, получим

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_\nu 2^{N_\nu}}^\infty \text{mes} \left\{ \Phi \left(\left| \sum_{m=1}^\nu f_m(x) \right| \right) > y \right\} dy &\leq \int_{\alpha_\nu 2^{N_\nu}}^\infty \text{mes} \left\{ \left| \sum_{m=1}^\nu f_m(x) \right| \geq \Psi(y) \right\} dy \\ &\leq \sum_{m=1}^\nu \int_{\alpha_\nu 2^{N_\nu}}^\infty \text{mes} \left\{ |f_m(x)| \geq \frac{1}{(\nu - m + 2)^2} \Psi(y) \right\} dy. \end{aligned} \quad (28)$$

Теперь для каждой функции f_m на ее носителе E_m применим экспоненциальную оценку для распределения суммы независимых случайных величин (см. [28; с. 93]). В силу этой оценки имеем (см. (6)–(10))

$$\text{mes} \left\{ x \in E_m; |f_m(x)| \geq \frac{\Psi(y)}{(\nu - m + 2)^2} \right\} \ll \frac{1}{2^{N_m}} \exp \left(-\frac{1}{2} \cdot \frac{\Psi^2(y) N_m}{(\nu - m + 2)^4 2^{2N_m}} \right). \quad (29)$$

Для функции $\Psi(y)$ из (3) выводим следующую нижнюю оценку:

$$\Psi(y) \geq \frac{y}{\alpha_\nu \sqrt{\log y}} \quad \text{при } y \geq \alpha_\nu 2^{N_\nu}. \quad (30)$$

Соединим оценки (28)–(30) и преобразуем внутренний интеграл. Имеем

$$\begin{aligned} \int_{\alpha_\nu 2^{N_\nu}}^\infty \text{mes} \left\{ \Phi \left(\left| \sum_{m=1}^\nu f_m(x) \right| \right) > y \right\} dy \\ \ll \sum_{m=1}^\nu \frac{1}{2^{N_\nu}} \int_{\alpha_\nu 2^{N_\nu}}^\infty \exp \left(-\frac{y^2 N_m}{2\alpha_\nu^2 (\nu - m + 2)^4 2^{2N_m} \log y} \right) dy \\ \leq \alpha_\nu \sum_{m=1}^\nu \int_{2^{N_\nu - N_m}}^\infty \exp \left(-\frac{y^2}{2(\nu - m + 2)^4 (1 + \log y)} \right) dy. \end{aligned} \quad (31)$$

Отсюда, ввиду того что $(\nu - m + 2)^4 (1 + \log y) \ll y$ при $y \geq 2^{N_\nu - N_m}$, находим окончательную оценку (см. (2), (27), (31))

$$\int_{G_\nu} \Phi(|f(x)|) dx \ll \alpha_\nu. \quad (32)$$

Теперь из соотношений (4), (26) и (32) следует, что

$$\int_0^1 \Phi(|f(x)|) dx < \infty.$$

Теорема 1 доказана.

Предложенная конструкция построения всюду расходящихся рядов Фурье–Уолша позволяет установить следующие результаты.

ТЕОРЕМА 2. Если возрастающая последовательность положительных чисел $\{\lambda_n\}$ удовлетворяет условию

$$\lambda_n = o(\sqrt{\log n}) \quad \text{при } n \rightarrow \infty,$$

то существует $f \in L(0, 1)$ такая, что при всех $x \in [0, 1)$

$$\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \frac{|S_n(f, x)|}{\lambda_n} = \infty.$$

Для тригонометрической системы несколько менее точные результаты, чем теоремы 1 и 2, установлены С. В. Конягиным [29].

ТЕОРЕМА 3. Существует такая $f \in L(0, 1)$, что ее модуль непрерывности в L_1 удовлетворяет условию

$$w_1(\delta, f) = o\left(\log \frac{1}{\delta}\right)^{-\frac{1}{2}},$$

но ряд Фурье–Уолша функции f всюду расходится.

Теорема 3 усиливает результат автора [30], где рассматривалась расходимость почти всюду.

Обратимся теперь к проблеме безусловной сходимости.

ТЕОРЕМА 4. Пусть неубывающая последовательность положительных чисел $\rho(k)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k\rho(k)} = \infty. \quad (33)$$

Тогда существуют последовательность коэффициентов $\{a_k\}$ и перестановка натурального ряда $\sigma(k)$ такие, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \rho(k) < \infty, \quad (34)$$

но переставленный ряд Фурье–Уолша $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \psi_{\sigma(k)}(x)$ расходится при всех $x \in [0, 1)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Для каждого $n = 0, 1, 2, \dots$, и $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$ определим специальные подгруппы G_{nm} и смежные классы по этим подгруппам H_{nm} .

Положим

$$H_{nm} = \psi_{q_{nm}} G_{nm}, \quad (35)$$

где

$$\psi_{q_{n0}} = r_{2n}, \quad \text{если } m = 0; \quad (36)$$

$$\psi_{q_{nm}} = r_{2n} r_{2p_1+1} r_{2p_2+1} \cdots r_{2p_{s(m)}+1}, \quad (37)$$

если

$$m = 2^{p_1} + 2^{p_2} + \cdots + 2^{p_{s(m)}}, \quad 0 \leq p_1 < p_2 < \cdots < p_{s(m)} < n. \quad (38)$$

Подгруппу G_{nm} зададим при $n \geq 1$ ($G_{00} = \psi_0$) образующими $\psi_{l_{nm}^{(k)}}$, $k = 1, \dots, n$, где $l_{n0}^{(k)} = 2(n-k)$ и

$$l_{nm}^{(k)} = [2^{2(n-k)} + 2^{2(p_1-k)+1} + 2^{2(p_2-k)+1} + \dots + 2^{2(p_{s(m)}-k)+1}], \quad (39)$$

если m имеет разложение (38). Условимся считать, что

$$r_k(x) = 1 \quad \text{при} \quad k < 0, \quad x \in [0, 1]. \quad (40)$$

Тогда образующие $\psi_{l_{nm}^{(k)}}$ можно записать следующим образом (см. (37)–(40)):

$$\psi_{l_{nm}^{(k)}} = r_{2(n-k)} r_{2(p_1-k)+1} \cdots r_{2(p_{s(m)}-k)+1}. \quad (41)$$

Докажем, что все классы H_{nm} не пересекаются. Прежде всего заметим, что классы H_{nm} не могут пересекаться при разных n , так как если $p < n$, то функции класса H_{nm} содержат в качестве сомножителя функцию $r_{2n}(x)$, а функции класса H_{pq} эту функцию Радемахера не содержат (см. (35)–(39)).

Далее, при фиксированном n и фиксированном $1 \leq p \leq n$ классы H_{nm_1} , где $0 \leq m_1 < 2^{p-1}$, и H_{nm_2} , где $2^{p-1} \leq m_2 < 2^p$, не пересекаются, поскольку функция r_{2p-1} входит в качестве сомножителя в любую из функций класса H_{nm_2} , но не входит в функции класса H_{nm_1} .

Предположим теперь, что

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1} &= \psi_{\alpha_2}, \\ \psi_{\alpha_1} &\in H_{nm_1}, \quad \psi_{\alpha_2} \in H_{nm_2}, \\ m_1 &= 2^{p-1} + \nu_1, \quad m_2 = 2^{p-1} + \nu_2, \quad 0 \leq \nu_1, \nu_2 < 2^{p-1}. \end{aligned}$$

Раскладывая элементы подгрупп G_{nm_1} и G_{nm_2} по образующим, имеем

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1} &= \psi_{q_{nm_1}} \psi_{l_{nm_1}^{(k_1)}} \cdots \psi_{l_{nm_1}^{(k_i)}}, \\ \psi_{\alpha_2} &= \psi_{q_{nm_2}} \psi_{l_{nm_2}^{(s_1)}} \cdots \psi_{l_{nm_2}^{(s_j)}}, \end{aligned}$$

где $1 \leq k_1 < \dots < k_i \leq n$, $1 \leq s_1 < \dots < s_j \leq n$.

Каждая образующая подгруппы G_{nm} содержит только одну функцию Радемахера с четным номером (см. (41)), а именно функцию $r_{2(n-k)}$. Поэтому (см. (36), (37)) равенство $\alpha_1 = \alpha_2$ возможно лишь в том случае, если $i = j$, $k_1 = s_1$, $k_2 = s_2$, $\dots$, $k_i = s_i$. Но тогда (см. (35)–(41))

$$\begin{aligned} \psi_{\alpha_1} &= r_{2p-1} r_{2(p-k_1)+1} \cdots r_{2(p-k_i)+1} \psi_{\beta_1}, \\ \psi_{\alpha_2} &= r_{2p-1} r_{2(p-k_1)+1} \cdots r_{2(p-k_i)+1} \psi_{\beta_2}, \end{aligned}$$

где $\psi_{\beta_1} \in H_{n\nu_1}$, $\psi_{\beta_2} \in H_{n\nu_2}$, т.е. из равенства $\psi_{\alpha_1} = \psi_{\alpha_2}$ следует, что $\psi_{\beta_1} = \psi_{\beta_2}$.

Таким образом, вопрос о сравнении классов H_{nm_1} и H_{nm_2} при $0 \leq m_1, m_2 < 2^n$ можно редуцировать к вопросу о сравнении классов $H_{n\nu_1}$ и $H_{n\nu_2}$, где $0 \leq \nu_1, \nu_2 < 2^{n-1}$. Продолжая этот процесс, придем к сравнению классов H_{n0} и H_{n1} . Но классы H_{n0} и H_{n1} не пересекаются, так как функции класса H_{n0} состоят из функций Радемахера с четными номерами, а функции класса H_{n1} содержат r_1 .

Итак, доказано, что

$$H_{nm} \cap H_{n_1 m_1} = \emptyset, \quad \text{если } (n, m) \neq (n_1, m_1). \quad (42)$$

Определим множества $E_m^{(n)}$. Множество $E_0^{(0)} = [0, 1)$. Пусть множества $E_q^{(p)}$ определены при $p \leq n$, $q = 0, 1, \dots, 2^p - 1$. Тогда (см. (37))

$$E_{2m}^{(n+1)} = \{x \in E_m^{(n)}; \psi_{q_{nm}}(x) = 1\}, \quad (43)$$

$$E_{2m+1}^{(n+1)} = \{x \in E_m^{(n)}; \psi_{q_{nm}}(x) = -1\}. \quad (44)$$

Из определений (43), (44) следует, что

$$E_m^{(n)} \subset E_{m_1}^{(n-1)} \subset \dots \subset E_{m_k}^{(n-k)} \subset \dots \subset E_0^{(0)}, \quad (45)$$

где

$$m_k = \left\lfloor \frac{m}{2^k} \right\rfloor. \quad (46)$$

Для каждого $N = 0, 1, 2, \dots$ определим функцию пары чисел $\lambda_N(n, m)$, $n = 0, 1, \dots, N$, $m = 0, 1, \dots, 2^N - 1$. Положим

$$\lambda_N(n, m) = (2^{n+1} - 2m - 1)2^{N-n}. \quad (47)$$

Функция $\lambda_N(n, m)$ осуществляет взаимно однозначное отображение множества пар (n, m) на отрезок натурального ряда от 1 до $2^{N+1} - 1$.

Установим, что справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\lambda_N(n_1, m_1) > \lambda_N(n, m) \quad (48)$$

и выполняется соотношение

$$E_{2m+1}^{(n+1)} \cap E_{m_1}^{(n_1)} \neq \emptyset. \quad (49)$$

Тогда

$$E_{2m+1}^{(n+1)} \subset E_{2m_1+1}^{(n_1+1)}. \quad (50)$$

Сначала докажем, что из (48), (49) следует, что $n_1 < n$. В самом деле, если $n_1 = n$, то, используя (43), (44) и учитывая (49), получаем, что $m_1 = m$, а это противоречит (48). Если же $n < n_1$, то согласно (45), (46) из (49) следует, что

$$E_{m_1}^{(n_1)} \subseteq E_{2m+1}^{(n+1)}$$

и выполняется соотношение

$$2m + 1 = \left\lfloor \frac{m_1}{2^{n_1-n-1}} \right\rfloor. \quad (51)$$

Но, используя определение функции $\lambda_N(n, m)$ и условие (48), имеем (см. (47))

$$2m + 1 > (2m_1 + 1)2^{n-n_1} > \frac{m_1}{2^{n_1-n-1}} \quad (52)$$

и, сопоставляя (51) и (52), получаем противоречие.

Итак, $n_1 < n$ и, следовательно (см. (43), (44), (49)),

$$E_{2m+1}^{(n+1)} \subset E_q^{(n_1+1)}, \quad (53)$$

где q принимает одно из двух значений: $2m_1, 2m_1 + 1$.

Применяя (45), (46), получаем

$$q = \left\lfloor \frac{2m+1}{2^{n-n_1}} \right\rfloor. \quad (54)$$

Вместе с тем из (47), (48) следует неравенство

$$\left\lfloor \frac{2m+1}{2^{n-n_1}} \right\rfloor \geq 2m_1 + 1.$$

Таким образом (см. (54)), $q = 2m_1 + 1$ и (см. (53)) соотношение (50) доказано.

Перейдем к определению коэффициентов $\{a_k\}$. Обозначим

$$A_{nm} = \{k; \psi_k \in H_{nm}\}. \quad (55)$$

В силу соотношений (37), (41) и (43)–(46) любая функция из класса H_{nm} принимает постоянное значение на множестве $E_{2m}^{(n+1)}$. Положим (см. (55))

$$\varepsilon_k = \text{sign } \psi_k(x), \quad x \in E_{2m}^{(n+1)}. \quad (56)$$

Возьмем последовательность положительных чисел $\mu(n)$, для которой (см. (33))

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{\rho(2^{2n+1})} = \infty, \quad (57)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{\rho(2^{2n+1})} < \infty. \quad (58)$$

Учитывая (см. (42), (55)), что $A_{nm} \cap A_{n_1 m_1} = \emptyset$ при $(n, m) \neq (n_1, m_1)$, определим коэффициенты $\{a_k\}$ следующим образом (см. (56)):

$$a_k = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{2^n \rho(2^{2n+1})} \varepsilon_k & \text{при } k \in A_{nm}, \\ 0 & \text{при остальных } k. \end{cases} \quad (59)$$

Используя соотношения (55), (56), (58), (59), имеем (см. (37), (41))

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 \rho(k) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{2^{2n} \rho^2(2^{2n+1})} \sum_{m=0}^{2^n-1} \sum_{k \in A_{nm}} \rho(k) \leq \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{\rho(2^{2n+1})} < \infty.$$

Таким образом, коэффициенты $\{a_k\}$ удовлетворяют условию (34).

Пусть теперь $\{N_\nu\}$ – такая последовательность натуральных чисел, для которой (см. (57))

$$\sum_{n=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \frac{\mu(n)}{\rho(2^{2n+1})} \geq \nu. \quad (60)$$

Обозначим (см. (59))

$$S_{nm}(x) = \sum_{k \in A_{nm}} a_k \psi_k(x). \quad (61)$$

В силу выбора коэффициентов $\{a_k\}$ и свойств классов H_{nm} и множеств $E_m^{(n)}$ (см. (43)–(46), (55), (56), (59), (61)) имеем

$$S_{nm}(x) = \begin{cases} \frac{\mu(n)}{\rho(2^{2n+1})} & \text{при } x \in E_{2m}^{(n+1)}, \\ -\frac{\mu(n)}{\rho(2^{2n+1})} & \text{при } x \in E_{2m+1}^{(n+1)}, \\ 0 & \text{при остальных } x \in [0, 1). \end{cases} \quad (62)$$

Определим перестановку $\sigma(k)$. Суммы

$$\sum^{(\nu)} = \sum_{n=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \sum_{m=0}^{2^n-1} S_{nm}(x)$$

расположим в порядке возрастания номера ν .

Внутри сумм $\sum^{(\nu)}$ порядок слагаемых $S_{nm}(x)$ зададим, используя $\lambda_{N_{\nu+1}}(n, m)$. Для каждого фиксированного $\nu = 1, 2, \dots$ возьмем функцию $\lambda_{N_{\nu+1}}(n, m)$, где $n = 0, 1, \dots, N_{\nu+1}$, $m = 0, 1, \dots, 2^n - 1$, и расположим суммы $S_{nm}(x)$, где $N_\nu < n \leq N_{\nu+1}$, в порядке возрастания чисел $\lambda_{N_{\nu+1}}(n, m)$. Внутри суммы $S_{nm}(x)$ слагаемые расположим в порядке возрастания номеров функций Уолша.

При фиксированном ν для каждой точки $x \in [0, 1)$ определим число $l(x)$. Положим

$$l(x) = \min \lambda_{N_{\nu+1}}(n, m), \quad (63)$$

где минимум берется по всем парам (n, m) , $N_\nu < n \leq N_{\nu+1}$, таким, что $x \in E_{2m+1}^{(n+1)}$.

Из доказанного ранее утверждения (см. (48)–(50)) следует, что $l(x)$ является тем номером, на котором расположенная в порядке возрастания чисел $\lambda_{N_{\nu+1}}(n, m)$ последовательность функций $S_{nm}(x)$, отличных от нуля в точке x , меняет знак с плюса на минус (см. (61)–(63)).

Поэтому имеем

$$\left| \sum_{\substack{N_\nu < n \leq N_{\nu+1} \\ \lambda_{N_{\nu+1}}(n, m) < l(x)}} S_{nm}(x) \right| + \left| \sum_{\substack{N_\nu < n \leq N_{\nu+1} \\ \lambda_{N_{\nu+1}}(n, m) \geq l(x)}} S_{nm}(x) \right| = \sum_{n=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \sum_{m=0}^{2^n-1} |S_{nm}(x)|. \quad (64)$$

Таким образом, получаем, что для любого $\nu = 1, 2, \dots$ в каждой точке $x \in [0, 1]$ выполняется соотношение (см. (60), (62), (64))

$$\begin{aligned} & \max \left\{ \left| \sum_{\substack{N_\nu < n \leq N_{\nu+1} \\ \lambda_{N_{\nu+1}}(n, m) < l(x)}} S_{nm}(x) \right|, \left| \sum_{\substack{N_\nu < n \leq N_{\nu+1} \\ \lambda_{N_{\nu+1}}(n, m) \geq l(x)}} S_{nm}(x) \right| \right\} \\ & \geq \frac{1}{2} \sum_{n=N_\nu+1}^{N_{\nu+1}} \frac{\mu(n)}{\rho(2^{2n+1})} \geq \frac{1}{2} \nu. \end{aligned} \quad (65)$$

Из (65) следует, что ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_{\sigma(k)} \psi_{\sigma(k)}(x)$ всюду неограниченно расходится. Теорема 4 доказана.

§ 2. Всюду расходящиеся ряды по мультипликативным системам и смежные вопросы

Пусть $p = (p_1, \dots, p_n, \dots)$ – последовательность целых чисел, $p_n \geq 2$, и пусть

$$M(k) = \prod_{n=1}^k p_n, \quad M(0) = 1. \quad (66)$$

Каждое $x \in [0, 1]$ может быть представлено в виде

$$x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x_k}{M(k)}, \quad 0 \leq x_k < p_k. \quad (67)$$

Если имеется два таких представления, то выбирается представление с конечным числом членов. Для $k = 1, 2, \dots$ определим функции

$$\varphi_{k-1}(x) = \exp\left(2\pi i \frac{x_k}{p_k}\right). \quad (68)$$

Из (66)–(68) следует, что на $[0, 1]$ существует $M(k)$ замкнутых слева интервалов постоянства функции $\varphi_{k-1}(x)$.

Каждое $n = 0, 1, 2, \dots$ имеет единственное представление

$$n = \sum_{k=0}^{\infty} \alpha_k M(k), \quad \text{где } 0 \leq \alpha_k < p_{k+1}. \quad (69)$$

Определим систему функций $\{\chi_n\}_{n=0}^{\infty}$ при $n \geq 1$ $\{\chi_0 = 1\}$ следующим образом (см. [31], [32]):

$$\chi_n(x) = \prod_{k=0}^{\infty} (\varphi_k(x))^{\alpha_k}. \quad (70)$$

$\{\chi_n\}$ – это полная система характеров счетного прямого произведения циклических групп различных порядков, отображенного на единичный интервал посредством сохраняющего меру преобразования. Система $\{\chi_n\}$ называется ограниченной, если

$$\sup_n p_n = d < \infty. \quad (71)$$

ТЕОРЕМА 5. Пусть $\{\chi_n\}$ – ограниченная мультипликативная система, и пусть возрастающая последовательность положительных чисел $w(n)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nw(n)} = \infty. \quad (72)$$

Тогда существует последовательность комплексных чисел $\{c_n\}$, удовлетворяющая соотношению

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 w(n) < \infty, \quad (73)$$

и существует перестановка натурального ряда $\sigma(n)$ такая, что ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x)$$

всюду расходится.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя соотношения (71), (72), возьмем убывающую последовательность положительных чисел $\{\mu_n\}$ и возрастающую последовательность номеров $\{N_\nu\}$, а также выберем возрастающую последовательность натуральных чисел $l_n \in [0, N_{\nu+1} - N_\nu]$ ($n = 0, 1, \dots, 2q(\nu) + 1$ для некоторого $q(\nu)$) и целое число $p(\nu) \in [2, d]$, для которых выполняются следующие соотношения (см. (66)):

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu^2(n)}{w(M(n))} < \infty, \quad (74)$$

$$p_{N_\nu + l_n} = p(\nu), \quad n = 0, 1, \dots, 2q(\nu) + 1, \quad (75)$$

$$\sum_{n=0}^{q(\nu)} \frac{\mu(N_\nu + l_{2n+1})}{w(M(N_\nu + l_{2n+1}))} \geq C(d)\nu, \quad (76)$$

где $C(d)$ – положительная постоянная.

Для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ определим подгруппы $G_{nm}^{(\nu)}$ функций $\{\chi_k\}$ и смежные классы по этим подгруппам $H_{nm}^{(\nu)}$. Положим

$$H_{nm}^{(\nu)} = g_{nm}^{(\nu)} G_{nm}^{(\nu)}, \quad n = 0, 1, \dots, q(\nu), \quad m = 0, 1, \dots, (p(\nu))^n - 1, \quad (77)$$

где

$$g_{n0}^{(\nu)} = \varphi_{N_\nu + l_{2n}}, \quad \text{если } m = 0,$$

а при

$$m = \alpha_1(p(\nu))^{s_1} + \dots + \alpha_{h(m)}(p(\nu))^{s_{h(m)}}, \\ 0 \leq s_1 < s_2 < \dots < s_{h(m)} < n, \quad 1 \leq \alpha_j < p(\nu),$$

положим

$$g_{nm}^{(\nu)} = \varphi_{N_\nu + l_{2n}} \varphi_{\beta(1)}^{\alpha_1} \varphi_{\beta(2)}^{\alpha_2} \dots \varphi_{\beta(h(m))}^{\alpha_{h(m)}}, \quad (78)$$

где $\beta(j) = N_\nu + l_{2s_j+1}$.

Определим подгруппы $G_{nm}^{(\nu)}$ при $n \geq 1$ ($G_{00}^{(\nu)} = \chi_0$) как прямое произведение циклических групп порядка $p(\nu)$ с образующими

$$g_{nmk}^{(\nu)} = \varphi_{N_\nu + l_{2(n-k)}} \varphi_{\beta(1,k)}^{\alpha_1} \varphi_{\beta(2,k)}^{\alpha_2} \cdots \varphi_{\beta(h(m),k)}^{\alpha_{h(m)}}, \quad (79)$$

где при $k \leq s_j$

$$\beta(j, k) = N_\nu + l_{2(s_j - k) + 1},$$

а если $k > s_j$, то полагаем по определению

$$\varphi_{\beta(j,k)} = \chi_0.$$

В силу соотношений (77)–(79) множества $H_{nm}^{(\nu)}$ попарно не пересекаются. Доказательство этого факта изложено в [33].

Для $n = 0, 1, \dots, q(\nu)$, $m = 0, 1, \dots, (p(\nu))^n - 1$ определим множества $E_m^{(n)}$. Положим $E_0^{(0)} = [0, 1)$ и при $n \geq 1$ положим

$$E_{p(\nu)m+r}^{(n+1)} = \left\{ x \in E_m^{(n)}; g_{nm}^{(\nu)}(x) = \exp\left(2\pi i \frac{r}{p(\nu)}\right) \right\}, \quad (80)$$

где $r = 0, 1, \dots, p(\nu) - 1$.

Соотношения (77)–(80) означают, что подгруппы $G_{nm}^{(\nu)}$ и множества $E_m^{(n)}$ обладают определенной наследственной структурой, а именно

$$E_m^{(n)} \subset \dots \subset E_{m_k}^{(n-k)} \subset \dots \subset E_0^{(0)}, \quad (81)$$

где $m_k = \left\lfloor \frac{m}{(p(\nu))^k} \right\rfloor$, и, кроме того, выполняется равенство

$$\text{mes } E_m^{(n)} = (p(\nu))^{-n}. \quad (82)$$

Из определения классов $H_{nm}^{(\nu)}$ и множеств $E_m^{(n)}$ следует также, что каждая функция из подгруппы $G_{nm}^{(\nu)}$ принимает постоянное значение на множестве $E_m^{(n)}$, а каждая $\chi_k \in H_{nm}^{(\nu)}$ принимает постоянное значение на множестве $E_{p(\nu)m+r}^{(n+1)}$, $0 \leq r < p(\nu)$.

В частности, если $x \in E_{p(\nu)m}^{(n+1)}$, то для некоторого $0 \leq \alpha(k) < p(\nu)$

$$\chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \frac{\alpha(k)}{p(\nu)}\right). \quad (83)$$

Представляя функцию $\chi_k \in H_{nm}^{(\nu)}$ в виде

$$\chi_k = g_{nm}^{(\nu)} g_{nm1}^{\gamma_1} g_{nm2}^{\gamma_2} \cdots g_{nmn}^{\gamma_n},$$

где $0 \leq \gamma_j < p(\nu)$, и учитывая (80) и (83), заключаем, что при $x \in E_{p(\nu)m+r}^{(n+1)}$ справедливо равенство

$$\exp\left(-2\pi i \frac{\alpha(k)}{p(\nu)}\right) \chi_k(x) = \exp\left(2\pi i \frac{r}{p(\nu)}\right). \quad (84)$$

Обозначим

$$A_{nm}^{(\nu)} = \{k; \chi_k \in H_{nm}^{(\nu)}\}. \quad (85)$$

Определим теперь коэффициенты $\{c_k\}$. При $M(N_\nu) \leq k < M(N_{\nu+1})$ положим

$$c_k = \begin{cases} \exp\left(-2\pi i \frac{\alpha(k)}{p(\nu)}\right) \frac{\mu(N_\nu + l_{2n+1})}{(p(\nu))^n w(M(N_\nu + l_{2n+1}))} & \text{при } k \in A_{nm}^{(\nu)}, \\ 0 & \text{при остальных } k \in [M(N_\nu), M(N_{\nu+1})]. \end{cases} \quad (86)$$

Из соотношений (74), (77)–(81) и (85), (86) следует, что

$$\begin{aligned} \sum_{k=0}^{\infty} |c_k|^2 w(k) &= \sum_{\nu=1}^N \sum_{n=0}^{q(\nu)} \sum_{m=0}^{(p(\nu))^n - 1} \sum_{k \in A_{nm}^{(\nu)}} |c_k|^2 w(k) \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{q(\nu)} w(M(N_\nu + l_{2n+1})) \sum_{m=0}^{(p(\nu))^n - 1} \sum_{k \in A_{nm}^{(\nu)}} |c_k|^2 \\ &\leq \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{n=0}^{q(\nu)} \frac{\mu^2(N_\nu + l_{2n+1})}{w(M(N_\nu + l_{2n+1}))} < \infty. \end{aligned}$$

Следовательно, условие (73) выполнено.

Введем функции (см. (85))

$$S_{nm}^{(\nu)}(x) = \sum_{k \in A_{nm}^{(\nu)}} c_k \chi_k(x). \quad (87)$$

В силу равенства (84), имеем (см. (86), (87))

$$S_{nm}^{(\nu)}(x) = \frac{\mu(N_\nu + l_{2n+1})}{w(M(N_\nu + l_{2n+1}))} \exp\left(2\pi i \frac{r}{p(\nu)}\right), \quad (88)$$

если $x \in E_{p(\nu)m+r}^{(n+1)}$.

Вместе с тем, используя (82) и учитывая, что порядок группы $G_{nm}^{(\nu)}$ равен $(p(\nu))^n$, получаем

$$\int_{E_m^{(n)}} |S_{nm}^{(\nu)}(x)|^2 dx = \|S_{nm}^{(\nu)}\|_2^2$$

и, значит (см. (68)–(70)),

$$\text{supp } S_{nm}^{(\nu)} = E_m^{(n)}. \quad (89)$$

Определим теперь требуемую перестановку $\sigma(k)$ ряда $\sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k(x)$. Для каждого $\nu = 1, 2, \dots$ определим взаимно однозначное отображение $\lambda_\nu(n, m)$ пар (n, m) , $n = 0, 1, \dots, q(\nu)$, $m = 0, 1, \dots, (p(\nu))^n - 1$, на отрезок натурального ряда

$$\left[1, \frac{(p(\nu))^{q(\nu)+1} - 1}{p(\nu) - 1}\right].$$

Положим

$$\lambda_\nu(n, m) > \lambda_\nu(n, m_1), \quad \text{если } m < m_1.$$

Если $s < n$ и

$$E_m^{(n)} \subseteq E_q^{(s+1)},$$

где $q = p(\nu)l + k$, то положим

$$\lambda(s, l-1) > \lambda(n, m) > \lambda(s, l) \quad \text{при } k = 0, 1, \dots, \left\lfloor \frac{p(\nu)}{2} \right\rfloor - 1, \quad (90)$$

$$\lambda(s, l) > \lambda(n, m) > \lambda(s, l+1) \quad \text{при } k = \left\lfloor \frac{p(\nu)}{2} \right\rfloor, \dots, p(\nu) - 1. \quad (91)$$

Для каждого фиксированного $\nu = 1, 2, \dots$ расположим функции $S_{nm}^{(\nu)}(x)$ в порядке возрастания чисел $\lambda_\nu(n, m)$. Суммы

$$\sum_{M(N_\nu) \leq k < M(N_{\nu+1})} c_k \chi_k(x)$$

как целое расположим в порядке возрастания номера ν .

Установим, что справедливо следующее утверждение. Пусть

$$\lambda_\nu(n_1, m_1) > \lambda_\nu(n, m) \quad (92)$$

и при некотором $[p(\nu)/2] \leq q < p(\nu)$ выполняется соотношение

$$E_{p(\nu)m+q}^{(n+1)} \cap E_{m_1}^{(n_1)} \neq \emptyset. \quad (93)$$

Тогда $n_1 < n$ и

$$E_{p(\nu)m+q}^{(n+1)} \subseteq E_{p(\nu)m_1+l}^{(n_1+1)} \quad (94)$$

при некотором $[p(\nu)/2] \leq l < p(\nu)$.

Докажем, что $n_1 < n$. В самом деле, если $n_1 = n$, то из (80), (81), (93) следует $m_1 = m$, а это противоречит (92). Пусть теперь $n_1 > n$. Тогда из (93) следует, что

$$E_{m_1}^{(n_1)} \subseteq E_{p(\nu)m+q}^{(n+1)},$$

и в силу соотношения (91) имеем

$$\lambda_\nu(n, m) > \lambda_\nu(n_1, m_1),$$

что противоречит (92).

Итак, $n_1 < n$ и, следовательно (см. (80), (81), (93)),

$$E_m^{(n)} \subseteq E_{p(\nu)m_1+l}^{(n_1+1)} \quad (95)$$

при некотором $l = 0, 1, \dots, p(\nu) - 1$.

Применяя соотношения (90), (91) и учитывая (92), находим (см. (95)), что $[p(\nu)/2] \leq l < p(\nu)$. Тем самым утверждение доказано (см. (80), (94), (95)).

Для каждого $x \in [0, 1)$ определим номер $L_\nu(x)$ следующим образом:

$$L_\nu(x) = \min \lambda_\nu(n, m), \quad (96)$$

где минимум берется по таким парам (n, m) , для которых $x \in E_{p(\nu)m+q}^{(n+1)}$, $[p(\nu)/2] \leq q < p(\nu)$.

Используя определение перестановки $\sigma(k)$, получаем (см. (96))

$$\begin{aligned} & \sum_{M(N_\nu) \leq k < M(N_{\nu+1})} c_{\sigma(k)} \chi_{\sigma(k)}(x) \\ &= \sum_{\lambda_\nu(n, m) < L_\nu(x)} S_{nm}^{(\nu)}(x) + \sum_{\lambda_\nu(n, m) \geq L_\nu(x)} S_{nm}^{(\nu)}(x) = \sum^{(1)} + \sum^{(2)}. \end{aligned} \quad (97)$$

Применим доказанное утверждение (см. (92)–(94)) и используем определение (96). Имеем (см. (89)):

$$\sum^{(1)} = \sum_{\lambda_\nu(n, m) < L_\nu(x)} S_{nm}^{(\nu)}(x), \quad x \in E_{p(\nu)m+q}^{(n+1)}, \quad (98)$$

где $0 \leq q < [p(\nu)/2]$;

$$\sum^{(2)} = \sum_{\lambda_\nu(n, m) \geq L_\nu(x)} S_{nm}^{(\nu)}(x), \quad x \in E_{p(\nu)m+q}^{(n+1)}, \quad (99)$$

где $[p(\nu)/2] \leq q < p(\nu)$.

Далее, для любой последовательности положительных чисел $\{a_k\}$ и любых натуральных N и p справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=1}^N a_k \exp\left(2\pi i \frac{q(k)}{p}\right) \right| \geq \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{p}\right) \cdot \sum_{k=1}^N a_k, \quad (100)$$

если натуральные числа $q(k)$ удовлетворяют соотношению

$$0 \leq q(k) < \left[\frac{p}{2}\right],$$

или если $q(k)$ удовлетворяют неравенству

$$\left[\frac{p}{2}\right] \leq q(k) < p.$$

Объединяя соотношения (71), (76), (88) и (98)–(100), находим, что

$$\begin{aligned} \left| \sum^{(1)} \right| + \left| \sum^{(2)} \right| &\geq \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) \cdot \sum_{n=0}^{q(\nu)} \frac{\mu(N_\nu + l_{2n+1})}{w(M(N_\nu + l_{2n+1}))} \\ &\geq C(d) \cos \frac{\pi}{2} \left(1 - \frac{1}{d}\right) \cdot \nu. \end{aligned} \quad (101)$$

Отсюда следует (см. (97), (100)), что ряд $\sum_{k=0}^{\infty} c_{\sigma(k)} \chi_{\sigma(k)}(x)$ неограниченно сходится при любом $x \in [0, 1)$. Теорема 5 доказана.

Приведем теперь оценки снизу мажоранты частных сумм для полиномов по переставленным мультипликативным системам (см. [33]).

ТЕОРЕМА 6. Пусть $\{\chi_n\}$ – ограниченная мультипликативная система. Тогда для любого $N = 2, 3, \dots$ существует перестановка $\sigma(n)$ чисел $n = 0, 1, \dots, N$ такая, что

$$\int_0^1 \max_{m \leq N} \left| \sum_{n=0}^m \chi_{\sigma(n)}(x) \right|^2 dx \geq C(d) N \log N.$$

ТЕОРЕМА 7. Пусть $\{\chi_n\}$ – ограниченная мультипликативная система. Для любого $N = 2, 3, \dots$ существует полином $P_N(x) = \sum_{n=0}^N a_n \chi_n(x)$ такой, что

$$|P_N(x)| = 1 \quad \text{при всех } x \in [0, 1),$$

и существует перестановка $\sigma(n)$ чисел $n = 0, 1, \dots, N$, для которой

$$\text{mes} \left\{ \max_{m \leq N} \left| \sum_{n=0}^m a_{\sigma(n)} \chi_{\sigma(n)}(x) \right| > \alpha \sqrt{\log N} \right\} \geq \gamma,$$

где α, γ – положительные постоянные, зависящие только от d .

Автор предполагает, что теоремы 5–7 являются точными для общих мультипликативных систем.

Конструкция, использованная для доказательства теоремы 7, была применена для доказательства следующего утверждения (см. [34], [35]).

ТЕОРЕМА 8. Пусть модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\omega(\frac{1}{n})}{n \sqrt{\log n}} = \infty.$$

Тогда для любой ограниченной мультипликативной системы $\{\chi_k\}$ существует непрерывная функция $f \in H^\omega$ такая, что

$$f(x) \sim \sum_{k=0}^{\infty} c_k \chi_k(x), \quad c_k = \int_0^1 f(x) \overline{\chi_k}(x) dx,$$

и существует перестановка натурального ряда $\sigma(k)$, для которой ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_{\sigma(k)} \chi_{\sigma(k)}(x)$$

расходится почти всюду.

Теоремы 5 и 8 являются в настоящее время наиболее сильными результатами о безусловной сходимости почти всюду рядов Фурье по мультипликативным системам и, в частности, по системе Уолша. Отметим, что для тригонометрической системы сейчас нет результатов о существовании функций из классов H^ω с рядами, расходящимися на множестве полной меры после перестановки.

Автором также установлены два утверждения, относящиеся к оценке сверху мажоранты частных сумм рядов по переставленным системам характеров (см. [34], [36]).

ТЕОРЕМА 9. Пусть $\{\chi_n\}$ – ограниченная мультипликативная система, и пусть функция $n(x)$ принимает целые положительные значения, $\|n(x)\|_\infty < M(q)$ при некотором $q = 1, 2, \dots$ и

$$n(x) = \sum_{j=1}^N m_j(x),$$

где функции $m_j(x)$ имеют непересекающиеся носители и каждая из них монотонна на своем носителе. Тогда неравенство

$$\left\| \sum_{k=0}^{n(x)} c_k \chi_{\sigma(k)}(x) \right\|_1 \leq B(d) \sqrt{N} \|c\|_2$$

выполняется для всех перестановок $\sigma(k)$ чисел $k = 0, 1, \dots, M(q) - 1$ и для любой последовательности комплексных чисел $c = \{c_k\}$.

Из теоремы 9 следует, что оценка типа результата Л. Карлесона имеет место для любой перестановки ограниченной мультипликативной системы, если мажоранта монотонна. При доказательстве теоремы 9 использовались результаты Р. Ханга и М. Тейблсона [9] и Дж. Госселина и У. Янга [37].

Следующая теорема показывает, что для оценки мажоранты частных сумм рядов по переставленным мультипликативным системам достаточно иметь оценку мажоранты переставленного ядра Дирихле.

ТЕОРЕМА 10. Пусть $\{\chi_n\}$ – мультипликативная система, q – натуральное число и $\sigma(n)$ – перестановка чисел $n = 0, 1, \dots, M(q) - 1$. Тогда для любой последовательности комплексных чисел $c = \{c_n\}$ выполняется неравенство

$$\max_{\sigma} \left\| \max_{m < M(q)} \left| \sum_{n=0}^m c_n \chi_{\sigma(n)}(x) \right| \right\|_1 \ll (M(q))^{-\frac{1}{2}} \|c\|_2 \max_{\sigma} \left\| \max_{m < M(q)} \left| \sum_{n=0}^m \chi_{\sigma(n)}^{(1)}(x) \right| \right\|_2,$$

где $\{\chi_n^{(1)}\}$ – мультипликативная система, образованная последовательностью $\{p_{q-j+1}\}$, $j = 1, \dots, q$.

Отметим, что в теореме 10 мультипликативная система $\{\chi_n\}$ не предполагается ограниченной.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] A. N. Kolmogoroff. Une série de Fourier–Lebesgue divergente presque partout // Fund. Math. 1923. V. 4. P. 324–328. (Рус. пер.: Ряд Фурье–Лебега, расходящийся почти всюду // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 8–11.)
- [2] A. N. Kolmogoroff. Une série de Fourier–Lebesgue divergente partout // C. R. Acad. Sci. Paris. 1926. V. 183. P. 1327–1329. (Рус. пер.: Ряд Фурье–Лебега, расходящийся всюду // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 73–75.)
- [3] A. N. Kolmogoroff, G. A. Seliverstoff. Sur la convergence des séries de Fourier // Atti Accad. Naz. Lincei Rend. 1926. V. 3. P. 307–310. (Рус. пер.: О сходимости рядов Фурье // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 69–73.)

- [4] A. N. Kolmogoroff, D. E. Menchoff. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales // *Math. Z.* 1927. V. 26. № 2/3. P. 432–441. (Рус. пер.: О сходимости ортогональных рядов // А. Н. Колмогоров. Избранные труды. Математика и механика. М.: Наука, 1985. С. 75–85.)
- [5] D. E. Menchoff. Sur la convergence des séries de fonctions orthogonales. I // *Fund. Math.* 1923. V. 4. P. 82–105.
- [6] D. E. Menchoff. Sur la sommation des séries de fonctions orthogonales par des méthodes de Cesaro // *Матем. сб.* 1940. Т. 8 (50). № 1. С. 121–136.
- [7] L. Carleson. On convergence and growth of partial sums of Fourier series // *Acta Math.* 1966. V. 116. P. 135–157.
- [8] R. Hunt. Almost everywhere convergence of Walsh–Fourier series of L^2 functions // *Actes du Congrès International des Mathématiciens (Nice, 1970)*. V. 2. Paris: Gauthier-Villars, 1971. P. 655–661.
- [9] R. Hunt, M. Taibleson. Almost everywhere convergence of Fourier series on the ring of integers of a local field // *SIAM J. Math. Anal.* 1971. V. 2. № 4. P. 607–625.
- [10] P. Sjölin. An inequality of Paley and convergence a.e. of Walsh–Fourier series // *Ark. Mat.* 1969. V. 7. P. 551–570.
- [11] J. Gosselin. Almost everywhere convergence of Vilenkin–Fourier series // *Trans. Amer. Math. Soc.* 1973. V. 185. P. 345–370.
- [12] P. Sjölin, F. Soria. Remarks on a theorem by N. Y. Antonov // *Studia Math.* (to appear).
- [13] E. Stein. On limit of sequences of operators // *Ann. of Math.* (2). 1961. V. 74. P. 140–170.
- [14] F. Schipp. Über die Divergenz der Walsh–Fourierreihen // *Ann. Univ. Sci. Budapest. Eötvös Sec. Math.* 1969. V. 12. P. 49–62.
- [15] F. Schipp. On boundedly divergent Walsh–Fourier series // *Acta Math. Hungar.* 1990. V. 56. № 3–4. P. 361–367.
- [16] K. Moon. An everywhere divergent Fourier–Walsh series of the class $L(\log^+ \log^+ L)^{1-\varepsilon}$ // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1975. V. 50. P. 309–314.
- [17] P. Simon. On the divergence of Vilenkin–Fourier series // *Acta Math. Hungar.* 1983. V. 41. № 3–4. P. 359–370.
- [18] С. В. Бочкарев. Расходящийся на множестве положительной меры ряд Фурье для произвольной ограниченной ортонормированной системы // *Матем. сб.* 1975. Т. 98. № 3. С. 436–449.
- [19] К. С. Казарян. О некоторых вопросах теории ортогональных рядов // *Матем. сб.* 1982. Т. 119. № 2. С. 278–294.
- [20] С. В. Бочкарев. Всюду расходящиеся ряды Фурье–Уолша // *Докл. РАН.* 2003. Т. 390. № 1. С. 11–14.
- [21] П. Л. Ульянов. Расходящиеся ряды по системе Хаара и по базисам // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 138. № 3. С. 556–559.
- [22] А. М. Олевский. Расходящиеся ряды из L_2 по полным системам // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 138. № 3. С. 545–548.
- [23] С. В. Бочкарев. О мажоранте частных сумм для переставленной системы Уолша // *Докл. АН СССР.* 1978. Т. 239. № 3. С. 509–510.
- [24] С. В. Бочкарев. Метод усреднений в теории ортогональных рядов // *Proceedings of the International Congress of Mathematicians (Helsinki, 1978)* / ed. O. Lehto. V. 2. Helsinki: Univ. of Helsinki, 1979. P. 598–604.
- [25] С. В. Бочкарев. Перестановки рядов Фурье–Уолша // *Изв. АН. Сер. матем.* 1979. Т. 43. № 5. С. 1025–1041.
- [26] S. Nakata. On the unconditional convergence of Walsh series // *Anal. Math.* 1979. V. 5. № 3. P. 201–205.
- [27] F. Schipp, W. Wade, P. Simon. *Walsh Series. An Introduction to Dyadic Harmonic Analysis.* Bristol: Hilger, 1990.
- [28] В. В. Петров. *Предельные теоремы для сумм независимых случайных величин.* М.: Наука, 1987.
- [29] S. V. Konyagin. On divergence of trigonometric Fourier series everywhere // *C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math.* 1999. V. 329. № 8. P. 693–697.

- [30] С. В. Бочкарев. О проблеме гладкости функций, ряды Фурье–Уолша которых расходятся почти всюду // Докл. РАН. 2000. Т. 371. № 6. С. 730–733.
- [31] J. Price. Certain groups of orthonormal step functions // Canad. J. Math. 1957. V. 9. № 3. P. 413–425.
- [32] Г. Н. Агаев, Н. Я. Виленкин, Г. М. Джафарли, А. И. Рубинштейн. Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах. Баку: Элм, 1981.
- [33] С. В. Бочкарев. Оценки некоторых сумм характеров // Труды МИАН. 1994. Т. 207. С. 42–53.
- [34] С. В. Бочкарев. Перестановки мультипликативных систем // Докл. АН СССР. 1991. Т. 318. С. 521–524.
- [35] С. В. Бочкарев. Почти всюду расходящиеся перестановки рядов Фурье по мультипликативным системам функций классов H^ω // Труды МИАН. 1992. Т. 201. С. 115–130.
- [36] S. V. Bochkarev. Rearrangements of periodic multiplicative orthogonal series // Colloq. Math. 1990. V. 60/61. № 1. P. 291–299.
- [37] J. Gosselin, W. Young. On rearrangements of Vilenkin–Fourier series which preserve almost everywhere convergence // Trans. Amer. Math. Soc. 1975. V. 209. P. 157–174.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН
E-mail: bochkarev@mi.ras.ru

Поступила в редакцию
20.11.2003