Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, Э. Г. Рис, Кольца непрерывных функций, симметрические произведения и алгебры Фробениуса, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 125–144

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm704>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.205.225.156

26 апреля 2023 г., 15:16:19

УДК 515.42+517.982

КОЛЬЦА НЕПРЕРЫВНЫХ ФУНКЦИЙ, СИММЕТРИЧЕСКИЕ
ПРОИЗВЕДЕНИЯ И АЛГЕБРЫ ФРОБЕНИУСА

В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис

Приводится конструктивное доказательство классической теоремы И. М. Гельфанда и А. Н. Колмогорова (1939), характеризующей образ вычисляющего отображения компактного хаусдорфова пространства X в линейном пространстве $C(X)^*$, двойственном кольцу непрерывных функций $C(X)$ на X . Предложенный метод доказательства позволил получить более общий результат, характеризующий образ вычисляющего отображения симметрических произведений $\text{Sym}^n(X)$ в $C(X)^*$. Аналогичный результат имеет место и в случае, когда $X = \mathbb{C}^m$. Он приводит к характеристизации многообразий полисимметрических полиномов и симметрических произведений аффинных алгебраических многообразий как алгебраических подмногообразий в линейном пространстве, двойственном кольцу полиномов.

Доказательство всех этих результатов опирается на формулу, при помощи которой Фробениус в 1896 году определил высшие характеры конечных групп. Долгое время эта формула не находила дальнейших применений, но в последние десять-пятнадцать лет она неоднократно появлялась в различных независимых контекстах. Ее использовали Э. Уайлс и Р. Тейлор при изучении представлений, Х.-Ю. Хёнке и К. Джонсон, и позднее Дж. Маккай при изучении конечных групп. Она играет важную роль в наших работах по теории многозначных групп. Мы приводим описание различных свойств этой замечательной формулы. Мы применяем ее также для доказательства теоремы о структурных константах алгебр Фробениуса, которые сейчас оказались в центре внимания благодаря конструкциям, пришедшим из топологической теории поля и теории особенностей. Эта теорема развивает результат Х.-Ю. Хёнке, опубликованный в 1958 году. В качестве следствия получено прямое замкнутое доказательство того факта, что 1-, 2- и 3-характеры регулярного представления определяют конечную группу с точностью до изоморфизма. Этот результат впервые был опубликован Х.-Ю. Хёнке и К. Джонсоном в 1992 году.

Библиография: 19 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	126
2. Симметрические произведения	129
3. Свойства n -гомоморфизмов	133
4. Алгебры Фробениуса	137
5. Приложение А. Доказательство леммы Мэнсфильда	141
6. Приложение В. Алгебра полисимметрических полиномов	142
Список литературы	144

В основе настоящей статьи лежит доклад Е. Риса на конференции “Колмогоров и современная математика”. Москва, 2003.

1. Введение

В 1939 году А. Н. Колмогоров совместно с И. М. Гельфандом опубликовали работу “О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах” (см. [11]). Центральным результатом этой работы отождествляет компактное хаусдорфово пространство X с пространством максимальных идеалов кольца непрерывных функций на X . Все монографии и учебники, содержащие основы функционального анализа, включают теперь этот результат. В современной терминологии его можно сформулировать следующим образом.

ТЕОРЕМА 1. Пусть X – компактное хаусдорфово пространство. Тогда для соответствующей топологии в пространстве непрерывных комплекснозначных функций $C(X)$ на X вычисляющее отображение

$$\mathcal{E}: X \rightarrow \text{Hom}(C(X), \mathbb{C}), \quad \mathcal{E}(x)\varphi = \varphi(x),$$

является гомеоморфизмом на множество всех кольцевых гомоморфизмов $C(X) \rightarrow \mathbb{C}$.

Эта теорема является аналогом теоремы Гильберта о нулях: пусть V – аффинное алгебраическое многообразие с координатным кольцом $A = \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]/J$, где J – некоторый (радикальный) идеал, задающий V , тогда вычисляющее отображение

$$\mathcal{E}: V \rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{C})$$

задает изоморфизм многообразия V с множеством всех кольцевых гомоморфизмов.

Известные переформулировки этих теорем получаются, если заметить, что множество всех кольцевых гомоморфизмов $A \rightarrow \mathbb{C}$ нетрудно отождествить с множеством (обычно обозначаемым $\text{m-Spec}(A)$) всех максимальных идеалов в A .

Мы будем придерживаться точки зрения, что множество всех кольцевых гомоморфизмов $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ является алгебраическим многообразием в линейном пространстве $\text{Hom}(A, \mathbb{C})$, задаваемым бесконечным множеством уравнений

$$\{f(1) = 1 \text{ и } f(ab) = f(a)f(b) \text{ для всех } a, b \in A\},$$

относительно координатных отображений $a: \text{Hom}(A, \mathbb{C}) \rightarrow \mathbb{C}, a(f) = f(a)$. Так как мы имеем дело с линейными гомоморфизмами, то достаточно рассматривать только уравнения $f(1) = 1$ и $f(a^2) = f(a)^2$, где a пробегает аддитивный базис в A .

Стандартное доказательство теоремы Гельфанда–Колмогорова, которое можно найти в учебниках, использует приведение к следующему противоречию.

Пусть I – собственный идеал в кольце функций $C(X)$ такой, что не существует точек $x \in X$, в которых обращаются в нуль все функции $\varphi \in I$. Тогда для каждой точки $x \in X$ существует неотрицательная вещественнозначная функция $\varphi_x \in I$, значения которой больше 1 в некоторой окрестности U_x точки x . Используя теперь компактность пространства X , мы можем построить вещественнозначную функцию $\varphi \in I$, значения которой больше 1 на всем X . Такая функция обратима, и, следовательно, в I лежит постоянная функция, т.е. $I = C(X)$.

В [2] мы дали конструктивное доказательство нашей теоремы из [3], характеризующей симметрические степени $\text{Sym}^n(X)$ как алгебраические многообразия в $C(X)^*$. В случае $n = 1$ оно дает доказательство теоремы Гельфанда–Колмогорова, которое для данного кольцевого гомоморфизма $f: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ строит единственную точку

$x \in X$ такую, что $f(\varphi) = \varphi(x)$ для всех $\varphi \in C(X)$. В многочисленной литературе на эту тему мы не нашли доказательства теоремы Гельфанда–Колмогорова, аналогичного тому, что приводится ниже.

Рассмотрим сначала случай, когда X – конечное множество. Тогда $C(X) \cong \mathbb{C}^n$, где n – число элементов в X . Выберем базис $\{\delta_x : x \in X\}$ в $C(X)$ такой, что $\delta_x(x) = 1$, $\delta_x(y) = 0$, если $x \neq y$. Ясно, что $1 = \sum \delta_x$. Так как $\delta_x^2 = \delta_x$, то для кольцевого гомоморфизма f мы имеем $f(\delta_x)^2 = f(\delta_x)$, и, следовательно, $f(\delta_x) = 0$ или 1 . С другой стороны, $1 = f(1) = \sum_{x \in X} f(\delta_x)$, поэтому существует единственная точка $x_0 \in X$ такая, что $f(\delta_{x_0}) = 1$, и используя, наконец, разложение $\varphi = \sum \varphi(x)\delta_x$, получаем, что $f(\varphi) = \varphi(x_0)$ для всех $\varphi \in C(X)$.

Покажем теперь, как распространить это рассуждение на случай, когда X – компактное хаусдорфово пространство.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $K \subset X$ – некоторое компактное подмножество топологического пространства X . Последовательность непрерывных функций $\varphi_r : X \rightarrow [0, 1]$ ($r \in \mathbb{N}$) назовем *огораживающей* для K , если

- 1) $\varphi_r(\text{Supp}(\varphi_{r+1})) = 1$ для каждого $r \in \mathbb{N}$,
- 2) $\varphi_r(x) = 1$ для всех $r \Leftrightarrow x \in K$.

Ясно, что $\varphi_r \varphi_s = \varphi_s$, если $s > r$.

ПРИМЕР. Пусть K – компактное подмножество метрического пространства X с метрикой $d(\cdot, \cdot)$, тогда последовательность функций

$$\varphi_r(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } d(x, K) \geq 1/r, \\ 1, & \text{если } d(x, K) \leq 1/(r+1), \\ (r+1)(1 - rd(x, K)), & \text{если } 1/(r+1) \leq d(x, K) \leq 1/r, \end{cases}$$

является огораживающей для K .

Определение огораживающей последовательности компакта K очевидным образом приводит к определению *огораживающей сети* (иначе, *обобщенной последовательности*) непрерывных функций $\varphi_t : X \rightarrow [0, 1]$ ($t \in T$), где T – некоторое направленное множество. Мы оставляем читателю доказательство того, что огораживающая сеть существует для любого компакта K хаусдорфова пространства X . Более того, чтобы не перегружать рассуждения техническими деталями, мы далее будем говорить об огораживающих последовательностях, а в конце используем то, что все полученные утверждения верны и для огораживающих сетей.

ЛЕММА 2. Пусть $\{\varphi_r\}$ – некоторая огораживающая последовательность компакта K . Тогда для каждого r существует открытая окрестность U_r этого компакта, такая, что $\varphi_r = 1$ на U_r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Возьмем $U_r = \{x : \varphi_{r+1}(x) > 0\}$. Тогда $K \subset U_r$ и $U_r \subset \text{Supp}(\varphi_{r+1})$. Следовательно, $\varphi_r = 1$ на U_r .

ЛЕММА 3. Пусть $\{\varphi_r\}$ – некоторая огораживающая последовательность компакта K и $\psi : X \rightarrow \mathbb{R}$ – такая функция, что $\psi(x) = 1$ для всех $x \in U$, где U – открытая окрестность компакта K . Тогда $(1 - \psi)\varphi_r = 0$ для достаточно больших r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x \notin U$. Выберем такое r , что $\varphi_r(x) = 0$, тогда $\varphi_r^{-1}[0, 1]$ является открытой окрестностью точки x , замыкание которой не пересекается с U . Покроем компактное пространство $X \setminus U$ конечным числом таких окрестностей. Обозначим через r_0 наибольшее из r , соответствующих этим окрестностям. Тогда $(1 - \psi)\varphi_{r_0} = 0$ и, следовательно, $(1 - \psi)\varphi_s = (1 - \varphi)\varphi_{r_0}\varphi_s = 0$ для $s > r_0$.

ЛЕММА 4. Пусть $f: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторый кольцевой гомоморфизм и φ_r – последовательность функций из $C(X)$ такая, что $\varphi_r\varphi_s = \varphi_s$ для всех $r < s$. Тогда существует r_0 такое, что $f(\varphi_r) = 0$ для $r \geq r_0$, либо $f(\varphi_r) = 1$ для всех r .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Имеем $(f(\varphi_r) - 1)f(\varphi_s) = 0$ для всех $r < s$. Тогда если $f(\varphi_r) \neq 1$, то $f(\varphi_s) = 0$ для всех $s > r$. Из этого рассуждения вытекает требуемый результат.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть $f: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторый кольцевой гомоморфизм и $\{\varphi_r\}$ – некоторая огораживающая последовательность компакта $K \subset X$. Весом K относительно последовательности $\{\varphi_r\}$ назовем число $w_f^\varphi(K) \in \{0, 1\}$, равное $f(\varphi_r)$ для больших значений r .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 5. Пусть $\{\varphi_r\}$ и $\{\psi_r\}$ – две огораживающие последовательности данного компакта K . Тогда $w_f^\varphi(K) = w_f^\psi(K)$.

Таким образом, определен вес компакта $w_f(K)$, не зависящий от выбора огораживающей последовательности.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что $w_f^\varphi(K) = 1$ и $w_f^\psi(K) = 0$. Тогда $f(\varphi_r) = 1$ для всех r , в то время как $f(\psi_r) = 0$ для всех r , больших некоторого r_0 . Используя лемму 3 с $\psi = \psi_{r_0}$, мы находим такое $m > r_0$, что $\psi_{r_0}\varphi_m = \varphi_m$. Таким образом, $f(1 - \psi_{r_0})f(\varphi_m) = 0$; но $f(1 - \psi_{r_0}) = 1$, следовательно, $f(\varphi_r) = 0$ для $r > m$. Полученное противоречие доказывает предложение.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 3. Носителем кольцевого гомоморфизма $f: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ будем называть множество $S_f = \{x : w_f(x) = 1\}$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 6. Для любого кольцевого гомоморфизма f множество S_f состоит из одной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим сначала, что S_f содержит две различные точки x и y . Выберем огораживающую последовательность $\{\varphi_r\}$ для множества $\{x, y\}$. Тогда $f(\varphi_r) = 1$. Для достаточно больших r мы можем выбрать также непрерывные функции ψ_1 и ψ_2 такие, что $\psi_1(x) = 1$, $\psi_1(y) = 0$, $\psi_2(x) = 0$, $\psi_2(y) = 1$, причем $(\psi_1 + \psi_2)^{-1}1 \subset \varphi_r^{-1}1$ и $\text{Supp } \psi_1 \cap \text{Supp } \psi_2 = \emptyset$. Тогда, по построению, $f(\psi_1) = f(\psi_2) = 1$, т.е. $f(\psi_1 + \psi_2) = 2$. Пришли к противоречию.

Допустим теперь, что множество S_f пусто. Тогда для любой точки $x \in X$ существует функция $\varphi_x: X \rightarrow \mathbb{R}$ такая, что $\varphi_x(x) = 1$ и $f(\varphi_x) = 0$. Открытые множества $\{y : \varphi_x(y) > 0\}$ покрывают пространство X . Выбрав из этого покрытия конечное подпокрытие, возьмем соответствующее ему множество функций $\varphi_1, \dots, \varphi_n$. Тогда функция $\Phi = \varphi_1 + \dots + \varphi_n$ не обращается в нуль ни в одной точке из X , но $f(\Phi) = f(\varphi_1) + f(\varphi_2) + \dots + f(\varphi_n) = 0$. Получаем, что, с одной стороны, $f\left(\Phi \frac{1}{\Phi}\right) = f(1) = 1$, а с другой стороны, $f\left(\Phi \frac{1}{\Phi}\right) = f(\Phi)f\left(\frac{1}{\Phi}\right) = 0$. Полученное противоречие доказывает предложение 6.

Таким образом, для каждого кольцевого гомоморфизма $f: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$ определен кольцевой гомоморфизм $\hat{f}: C(X) \rightarrow \mathbb{C}$, $\hat{f}(\varphi) = \varphi(x_0)$, где $S_f = \{x_0\}$. Для завершения доказательства теоремы 1 осталось показать, что $\hat{f} = f$.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 7. Пусть $S_f = \{x_0\}$ и $\psi: X \rightarrow \mathbb{C}$ — некоторая непрерывная функция. Тогда $f(\psi) = \psi(x_0)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $\{\varphi_r\}$ — огораживающая последовательность точки $\{x_0\}$. Рассмотрим два случая.

Пусть сначала $\text{Supp } \psi \cap S_f = \emptyset$, тогда существует открытая окрестность точки x_0 , на которой функция ψ обращается в нуль. Тогда $\psi\varphi_r = 0$ для всех достаточно больших r и одновременно $f(\varphi_r) = 1$. Следовательно, $f(\psi) = 0$.

Пусть теперь $x_0 \in \text{Supp } \psi$. Рассмотрим функцию $\theta_r = (\psi - \psi(x_0))\varphi_r$. Имеем $|\theta_r| \leq |\psi - \psi(x_0)|$, и θ_r обращается в нуль вне некоторой окрестности точки x_0 за счет множителя φ_r . Ввиду непрерывности функции ψ , получаем, что функция θ_r стремится к нулю в суп-норме, и, следовательно, $f(\theta_r) \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. С другой стороны, $f(\theta_r) = (f(\psi) - \psi(x_0)f(1))f(\varphi_r) \rightarrow (f(\psi) - \psi(x_0))w_f(x_0)$ при достаточно больших r . Следовательно, $f(\psi) = \psi(x_0)$. Предложение 7 доказано.

2. Симметрические произведения

Напомним, что симметрической степенью пространства X называется факторпространство

$$\text{Sym}^n(X) = X^n / S_n = \{(x_1, \dots, x_n) : (x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)}) \sim (x_1, \dots, x_n), \sigma \in S_n\},$$

где S_n — группа перестановок множества из n элементов.

Непрерывные функции на $\text{Sym}^n(X)$ — это в точности непрерывные функции $f: X^n \rightarrow \mathbb{C}$, инвариантные относительно перестановок координат, так называемые симметрические функции.

Рассмотрим аналог вычисляющего отображения

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(X) \rightarrow \text{Hom}(C(X), \mathbb{C}), \quad \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)(\varphi) = \varphi(x_1) + \dots + \varphi(x_n).$$

Мы опишем образ этого отображения при помощи уравнений. Эти уравнения задаются формулами, которые впервые были использованы Г. Фробениусом [9], [10], а совсем недавно рядом авторов, включая Э. Уайлса [19], Р. Тейлора [18], Х.-Ю. Хёнке и К. Джонсона [13], Р. Рукье [17], Л. Ниссен [15]. Они играют важную роль в теории многозначных групп (см. [4]–[6]). Будем следовать подходу, развитому в [3].

Пусть A — некоторая ассоциативная алгебра с единицей над полем комплексных чисел $\mathbb{C}$ и $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ — линейное следовое отображение (т.е. $f(ab) = f(ba)$). Введем линейные отображения $\Phi_n(f): A^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$, полагая $\Phi_1(f) = f$, $\Phi_2(f)(a_1 \otimes a_2) = f(a_1)f(a_2) - f(a_1a_2)$ и далее по индукции

$$\begin{aligned} \Phi_{n+1}(f)(a_1 \otimes a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) &= f(a_1)\Phi_n(f)(a_2 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) \\ &\quad - \Phi_n(f)(a_1a_2 \otimes a_3 \otimes \dots \otimes a_{n+1}) - \dots - \Phi_n(f)(a_2 \otimes a_3 \otimes \dots \otimes a_1a_{n+1}). \end{aligned}$$

Заметим, что кольцевой гомоморфизм $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ удовлетворяет условиям $f(1) = 1$ и $\Phi_2(f) \equiv 0$.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 4. *Фробениусовым n -гомоморфизмом* называется линейный гомоморфизм $f: A \rightarrow \mathbb{C}$, удовлетворяющий условиям $f(1) = n$ и $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$.

Наш выбор названия для описанных выше гомоморфизмов объясняется тем, что формула для определяющей рекурсии, первые примеры и важные приложения их появились в работах Фробениуса [9] и [10] для случая групповых алгебр конечных групп. Так, в [9] в наших обозначениях был получен следующий результат.

Пусть G – конечная группа и $A = \mathbb{C}G$ – ее групповая алгебра. Тогда характер $\chi: G \rightarrow \mathbb{C}$ любого n -мерного линейного представления группы G продолжается до линейного гомоморфизма $\chi: A \rightarrow \mathbb{C}$ такого, что $\chi(1) = n$ и $\Phi_{n+1}(\chi) \equiv 0$.

Обобщением теоремы Гельфанда–Колмогорова на случай симметрических произведений является следующий результат.

ТЕОРЕМА 8. *Пусть X – компактное хаусдорфово пространство. Тогда образ отображения*

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(X) \rightarrow \text{Hom}(C(X), \mathbb{C})$$

представляет собой в точности подпространство всех фробениусовых n -гомоморфизмов, т.е. задается уравнениями $f(1) = n$ и $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$.

Более детальную формулировку и конструктивное доказательство этой теоремы, использующее изложенную выше технику огораживающих последовательностей (огораживающих сетей в случае общих компактных хаусдорфовых пространств), можно найти в [2].

Аналогично определению 4 вводится понятие фробениусовых n -гомоморфизмов $f: A \rightarrow B$, где B – любая коммутативная алгебра. В случае, когда B не имеет делителей нуля, фробениусовы n -гомоморфизмы обладают важными для нас свойствами. Поэтому далее мы будем предполагать, что B – область целостности. В [3] доказательство теоремы 8 получено как следствие общего результата, характеризующего фробениусовы n -гомоморфизмы $f: A \rightarrow B$.

Пусть A – коммутативная алгебра. Обозначим через $S^n A$ симметрическую подалгебру в $A^{\otimes n}$. Каждый элемент $a \in S^n A$ можно записать в виде

$$a = \sum_{\sigma \in S_n} a_{\sigma(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma(n)}$$

и произведение в $S^n A$ в виде

$$ab = \sum_{\sigma_1, \sigma_2 \in S_n} a_{\sigma_1(1)} b_{\sigma_2(1)} \otimes \cdots \otimes a_{\sigma_1(n)} b_{\sigma_2(n)}.$$

ТЕОРЕМА 9. *Линейное отображение $f: A \rightarrow B$ является фробениусовым n -гомоморфизмом тогда и только тогда, когда $f(1) = n$ и ограничение гомоморфизма $\Phi_n(f): A^{\otimes n} \rightarrow B$ на $S^n A$ дает кольцевой гомоморфизм*

$$\frac{1}{n!} \Phi_n(f): S^n A \rightarrow B.$$

Приведем комбинаторный результат, на который существенно опирается доказательство этой теоремы.

Пусть X – конечное множество и $\mathcal{P}(X)$ – свободная абелева группа, порожденная множеством всех разбиений множества X . Напомним, что для любой перестановки σ

множества X определяет разбиение X , заданное орбитами действия подгруппы порожденной σ . Перестановки, задающие одно разбиение, имеют одинаковый знак; для данного разбиения π обозначим через $\epsilon(\pi)$ соответствующий знак и через $n(\pi)$ – число перестановок, которые порождают π . Положим

$$\chi(X) = \sum_{\pi} \epsilon(\pi) n(\pi) \pi \in \mathcal{P}(X),$$

где сумма берется по всем разбиениям множества X .

Пусть π_1, π_2 – разбиения множеств X, Y соответственно, тогда определено естественное разбиение $\pi_1 \pi_2$ дизъюнктного объединения $X \sqcup Y$. Таким образом, определен элемент $\chi(X)\chi(Y) \in \mathcal{P}(X \sqcup Y)$.

Если $g: X \rightarrow Y$ – отображение “на” и π – разбиение множества Y , то взяв прообразы частей π , получим разбиение $g^* \pi$; таким образом задан индуцированный гомоморфизм $g^*: \mathcal{P}(Y) \rightarrow \mathcal{P}(X)$.

Если отображения $i_1: X \rightarrow Z, i_2: Y \rightarrow Z$ являются вложениями и $Z = i_1(X) \cup i_2(Y)$, скажем, что (Z, i_1, i_2) является *амальгамированным объединением* множеств X и Y . Имеет место отображение “на” $q: X \sqcup Y \rightarrow Z$.

Следующий, довольно неожиданный, чисто комбинаторный результат был получен в [3] с использованием производящих полиномов, являющихся решением некоторого гипергеометрического дифференциального уравнения.

ЛЕММА 10.

$$\sum q^* \chi(Z) = \chi(X)\chi(Y),$$

где сумма берется по всем различным амальгамированным объединениям X и Y , включая и дизъюнктное.

Ключевые моменты доказательства теоремы 9:

1. Пусть $X = (a_1, \dots, a_n)$, где $a_k \in A$. Используя гомоморфизм $f: A \rightarrow B$, зададим гомоморфизм

$$f: \mathcal{P}(X) \rightarrow B,$$

значение которого на разбиении $\pi = (P_1, \dots, P_k) \in \mathcal{P}(X)$, где $P_i = (a_{i_1}, \dots, a_{i_q})$, равно

$$f(\pi) = \prod_{i=1}^k f(a_{i_1} \cdots a_{i_q}).$$

Тогда

$$f(\chi(X)) = \Phi_n(f)(a_1, \dots, a_n).$$

2. Пусть $X = (a_1, \dots, a_n)$ и $Y = (b_1, \dots, b_n)$ – непересекающиеся множества. Из определений получаем

$$f(\varrho(X)\varrho(Y)) = f(\varrho(X))f(\varrho(Y)).$$

3. Пусть $f: A \rightarrow B$ – некоторый n -гомоморфизм. На основе леммы 10, используя, что $\Phi_{n+1}(f) \equiv 0$, получаем

$$f(\chi(X)\chi(Y)) = \sum_{\sigma \in S_n} f(\chi(X \sqcup_{\sigma} Y)).$$

Здесь $Z = X \sqcup_{\sigma} Y$ обозначает амальгамированное объединение такое, что Z состоит из n элементов; в этом случае отображения i_1 и i_2 являются взаимно однозначными, и поэтому Z определяется некоторой перестановкой σ .

4. Последний шаг доказательства состоит в проверке равенства

$$\sum_{\sigma \in S_n} \Phi_n(f)(a_1 b_{\sigma(1)}, \dots, a_n b_{\sigma(n)}) = n! \Phi_n(f)(\mathbf{ab}).$$

Обозначим теперь через $\Phi_n(A)$ множество всех фробениусовых n -гомоморфизмов кольца A в поле комплексных чисел $\mathbb{C}$. По построению $\Phi_n(A)$ – алгебраическое подмногообразие в линейном пространстве $A^* = \text{Hom}(A, \mathbb{C})$ с координатами $a: A^* \rightarrow \mathbb{C}$, где $a(f) = f(a)$. Положим

$$\Phi_n(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_m]) = \Phi_n(m).$$

ТЕОРЕМА 11. *Отображение*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: \text{Sym}^n(\mathbb{C}^m) &\rightarrow \text{Hom}(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_m], \mathbb{C}), \\ \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)(p) &= p(x_1) + \dots + p(x_n), \end{aligned}$$

задает гомеоморфизм

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \rightarrow \Phi_n(m).$$

На основе этого результата в приложении В мы приводим описание вложения

$$\text{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \subset \mathbb{C}^N, \quad N = \binom{n+m}{n} - 1,$$

в контексте теории полисимметрических полиномов.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Проверка того, что вычисляющее отображение $\mathcal{E}$ является вложением, проводится непосредственно (см. [3]). Пусть теперь $f: \mathbb{C}[u_1, \dots, u_m] \rightarrow \mathbb{C}$ – некоторый фробениусов n -гомоморфизм. Тогда согласно теореме 9 отображение

$$\frac{1}{n!} \Phi_n(f): S^n(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_m]) \rightarrow \mathbb{C}$$

является кольцевым гомоморфизмом. Далее, симметрическую алгебру $S^n(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_m])$ можно отождествить с алгеброй полиномиальных функций на алгебраическом многообразии $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$ – алгеброй полисимметрических полиномов. Тогда согласно теореме Гильберта о нулях существует набор точек $(x_1, \dots, x_n) \in \text{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$ такой, что для $a = \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)} \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n)}$ имеет место формула

$$a(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} p_{\sigma(1)}(x_1) \otimes \dots \otimes p_{\sigma(n)}(x_n).$$

Возьмем в качестве a элемент

$$a = p \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1 + 1 \otimes p \otimes \dots \otimes 1 + \dots + 1 \otimes 1 \otimes \dots \otimes p,$$

где $p \in \mathbb{C}[u_1, \dots, u_m]$. Тогда

$$\frac{1}{n!} \Phi_n(f)(p) = \sum_{k=1}^n p(x_k).$$

С другой стороны, используя линейность гомоморфизма $\Phi_n(f)$, его симметричность и формулу (см. [3])

$$\Phi_n(f)(p \otimes 1 \otimes \dots \otimes 1) = f(p)(f(1) - 1) \cdots (f(1) - (n - 1)),$$

мы получаем

$$\frac{1}{n!} \Phi_n(f)(a) = f(p),$$

так как $f(1) = n$, т.е. $f(p) = \sum_{k=1}^n p(x_k)$, и, следовательно, $f = \mathcal{E}(x_1, \dots, x_n)$. Доказательство теоремы 11 закончено.

ТЕОРЕМА 12. Пусть A – конечно порожденная коммутативная алгебра и V – аффинное алгебраическое многообразие $\text{Spec}(A)$. Тогда отображение

$$\begin{aligned} \mathcal{E}: \text{Sym}^n(V) &\rightarrow \text{Hom}(A, \mathbb{C}), \\ \mathcal{E}(f_1, \dots, f_n)(a) &= f_1(a) + \dots + f_n(a), \end{aligned}$$

где $f_k: A \rightarrow \mathbb{C}$, $k = 1, \dots, n$, – кольцевые гомоморфизмы, задает гомеоморфизм

$$\mathcal{E}: \text{Sym}^n(V) \rightarrow \Phi_n(A).$$

Подробное доказательство этого результата см. в [3].

Доказательство теоремы 8 на основе теоремы 9 проводится по той же схеме, что и доказательство теоремы 11. Дополнительно требуется воспользоваться лишь тем, что для компактного хаусдорфова пространства X согласно теореме Стоуна–Вейерштрасса кольцо $C(X)^{\otimes n}$ всюду плотно в кольце $C(X^n)$ (детали см. в [16; утверждение 1.10.21]) и поэтому кольцо $S^n(C(X))$ всюду плотно в кольце $C(\text{Sym}^n(X))$. Это позволяет применить теорему Гельфанда–Колмогорова и по кольцевому гомоморфизму $\frac{1}{n!} \Phi_n(f): S^n(C(X)) \rightarrow \mathbb{C}$ получить точку пространства $\text{Sym}^n(X)$.

3. Свойства n -гомоморфизмов

Как показывают результаты предыдущего раздела, фробениусовы n -гомоморфизмы коммутативных алгебр имеют важные приложения. Таким образом возникла задача более детального изучения их свойств в этом специальном случае. При этом полезным оказалось другое описание определяющих уравнений для них, данное в [4], [5].

Итак, пусть A – коммутативная алгебра. Тогда:

1. Значение $\Phi_n(a, \dots, a) = \Phi_n(f)(a \otimes \dots \otimes a)$ для $a \in A$ равно детерминанту матрицы

$$\begin{pmatrix} f(a) & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ f(a^2) & f(a) & 2 & 0 & \dots & 0 \\ f(a^3) & f(a^2) & f(a) & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & f(a) & n-1 \\ f(a^n) & f(a^{n-1}) & \dots & \dots & f(a^2) & f(a) \end{pmatrix}.$$

2. Значение $\Phi_n(f)(a_1, \dots, a_n) = \Phi_n(f)(a_1 \otimes \dots \otimes a_n)$ является полилинейной функцией переменных $a_1, \dots, a_n$ и поэтому может быть получено стандартной процедурой поляризации из $\Phi_n(a, \dots, a)$.

3. Представим перестановку $\sigma \in S_n$ в виде произведения непересекающихся циклов общей длины n , скажем, $\sigma = \gamma_1 \cdots \gamma_r$. Пусть $\gamma = (i_1, \dots, i_m)$ – некоторый цикл. Положим $f_\gamma(a_1, \dots, a_n) = f(a_{i_1} \cdots a_{i_m})$. Тогда имеет место формула

$$\Phi_n(f)(a_1, \dots, a_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \varepsilon_\sigma f_{\gamma_1}(a_1, \dots, a_n) \cdots f_{\gamma_r}(a_1, \dots, a_n), \quad (3.1)$$

где ε_σ – знак перестановки σ .

Например,

$$\begin{aligned} \Phi_3(f)(a_1, a_2, a_3) &= f(a_1)f(a_2)f(a_3) - f(a_1)f(a_2a_3) \\ &\quad - f(a_2)f(a_1a_3) - f(a_3)f(a_1a_2) + 2f(a_1a_2a_3). \end{aligned}$$

Заметим, что формула (3.1) имеет место и в случае следовых гомоморфизмов f некоммутативной алгебры A . В случае матричных алгебр A и следовых гомоморфизмов f эта формула появилась в [7].

Часто бывает проще работать с формулой (3.1) в “диагональном” виде, а затем использовать поляризацию для получения общей формулы. Например, $\Phi_3(f)(a, a, a) = s_1^3 - 3s_1s_2 + 2s_3$, где $s_1 = f(a)$, $s_2 = f(a^2)$ и $s_3 = f(a^3)$.

Мы применяем обозначение s_k , чтобы подчеркнуть связь с классической формулой Ньютона, выражающей элементарные симметрические функции $e_n = \sum t_{i_1} \cdots t_{i_n}$ коммутирующих переменных $t_1, t_2, \dots$ (сумма берется по всем наборам $I_n = (i_1 < \dots < i_n)$) как полиномы от степенных сумм $s_k = \sum t_i^k$:

$$n! e_n = \det \begin{pmatrix} s_1 & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s_2 & s_1 & 2 & 0 & \cdots & 0 \\ s_3 & s_2 & s_1 & 3 & & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \\ \vdots & \vdots & & & s_1 & n-1 \\ s_n & s_{n-1} & \cdots & \cdots & s_2 & s_1 \end{pmatrix}.$$

Опишем теперь развитие этой связи, обозначая через F_n полином от переменных s_k , $k = 1, \dots, n$, который становится равным $\Phi_n(f)(a, \dots, a)$ при подстановке $s_k = f(a^k)$. Непосредственно из определения полинома $F_n(s_1, \dots, s_n)$ получаем формулу

$$F_n = \sum_{\sigma \in S_n} \left(\prod_{k=1}^n ((-1)^{k+1} s_k)^{m_k(\sigma)} \right),$$

где $m_k(\sigma)$ – число циклов длины $k \geq 1$ в разложении перестановки σ на произведение непересекающихся циклов. Далее, число элементов группы S_n с m_k циклами длины k равно

$$n! / \prod_{k=1}^n (k^{m_k} m_k!).$$

Следовательно,

$$F_n = \sum_{\mathbf{m} \in \Pi(n)} \prod_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \frac{s_k}{k} \right)^{m_k}.$$

Здесь $\Pi(n)$ – множество разбиений числа n и $\mathbf{m} = (m_1, \dots, m_n)$ – разбиение числа n , где m_k – кратность числа k в этом разбиении. Таким образом, $\sum_{k=1}^n k m_k = n$. Следовательно,

$$F_n t^n = \sum_{\mathbf{m} \in \Pi(n)} \prod_{k=1}^n \left((-1)^{k+1} \frac{s_k t^k}{k} \right)^{m_k},$$

и мы получаем, что имеет место

ТЕОРЕМА 13.

$$\sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!} = \exp \left(\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k+1} s_k \frac{t^k}{k} \right).$$

Из этого результата вытекает следующая рекурсия.

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 14.

$$F_n = (n-1)! \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1} s_k \frac{F_{n-k}}{(n-k)!}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Положим

$$F(t) = \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!}.$$

Тогда согласно теореме 13 имеет место соотношение

$$F'(t) = F(t)(s_1 - s_2 t + s_3 t^2 - \dots),$$

из которого немедленно вытекает требуемая формула.

Дадим теперь характеристику полиномов F_n , используя дифференциальные операторы.

ЛЕММА 15. Пусть $d = \sum_{r=2}^{\infty} r s_{r-1} \frac{\partial}{\partial s_r}$. Тогда:

- а) $\frac{\partial F_n}{\partial s_1} = n F_{n-1}$;
- б) $d F_n = -n(n-1) F_{n-1}$;
- в) $\left[\frac{\partial}{\partial s_k}, d \right] = (k+1) \frac{\partial}{\partial s_{k+1}}$;
- г) $\left(\text{Ker } \frac{\partial}{\partial s_1} \right) \cap (\text{Ker } d)$ состоит только из констант.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. а) Дифференцируя по s_1 правую часть соотношения из теоремы 13, получаем, что $\frac{\partial F(t)}{\partial s_1} = tF(t)$. Следовательно,

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\partial F_n}{\partial s_1} \frac{t^n}{n!} = t \sum_{n=0}^{\infty} F_n \frac{t^n}{n!}.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t , получаем результат а).

б) Применяя оператор d к тому же соотношению, получаем

$$dF(t) = F(t)[-s_1 t^2 + s_2 t^3 - s_3 t^4 + \dots] = -t^2 F'(t).$$

Опять сравнивая коэффициенты при t^n , получаем

$$\frac{dF_n}{n!} = -\frac{F_{n-1}}{(n-2)!}.$$

$$\text{в) } d \frac{\partial}{\partial s_k} - \frac{\partial}{\partial s_k} d = \sum_{r=2}^{\infty} r s_{r-1} \frac{\partial}{\partial s_r} \frac{\partial}{\partial s_k} - \frac{\partial}{\partial s_k} \sum_{r=2}^{\infty} r s_{r-1} \frac{\partial}{\partial s_k} = (k+1) \frac{\partial}{\partial s_{k+1}}.$$

г) Пусть $\frac{\partial f}{\partial s_1} = 0$, тогда $f = f(s_2, s_3, \dots)$. Если f принадлежит пересечению ядер операторов $\frac{\partial}{\partial s_1}$ и d , то $\frac{\partial}{\partial s_2} f = 0$ согласно утверждению в). Утверждение в) позволяет по индукции завершить доказательство результата г).

Из леммы 5 непосредственно вытекает следующий результат.

ТЕОРЕМА 16. Последовательность полиномов $\{F_n(s_1, \dots, s_n)\}$ полностью характеризуется следующими свойствами:

- 0) $F_n(0) = 0, n = 1, 2, \dots$,
- 1) $F_0 = 1$,
- 2) $\frac{\partial F_n}{\partial s_1} = n F_{n-1}$,
- 3) $dF_n = -n(n-1)F_{n-1}$,

т.е. производящая функция $F(t) = F(t; s_1, s_2, \dots)$ является единственным решением системы уравнений

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial s_1} F(t) &= tF(t), \\ dF(t) &= -t^2 \frac{\partial}{\partial t} F(t) \end{aligned}$$

при начальном условии $F(0; s_1, s_2, \dots) = 1$.

4. Алгебры Фробениуса

Пусть A – некоторая ассоциативная алгебра над $\mathbb{C}$. Линейное отображение $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ называется следовым (англ. “trace-like”), если $f(ab) = f(ba)$ для любых a и b из A .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 5. *Фробениусовой алгеброй* A называется алгебра A вместе со следовым линейным отображением $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ таким, что билинейная форма

$$A \times A \rightarrow \mathbb{C}, \quad (a, b) \mapsto f(ab)$$

является невырожденной.

Обозначим через $J(A)$ йорданову алгебру, которая аддитивно совпадает с A и имеет умножение

$$a \circ b = \frac{1}{2}(ab + ba).$$

Рассмотрим в A некоторый базис $\{e_i: i \in J\}$ и получим соответствующие ему структурные константы a_{ij}^k (т.е. $e_i e_j = \sum a_{ij}^k e_k$). Тогда $a_{(ij)}^k = \frac{1}{2}(a_{ij}^k + a_{ji}^k)$ будут структурными константами йордановой алгебры $J(A)$ относительно того же базиса.

ТЕОРЕМА 17. *Пусть (A, f) – некоторая фробениусова алгебра. Тогда структурные константы йордановой алгебры $J(A)$ полностью определяются заданием гомоморфизмов $\Phi_k = \Phi_k(f)$, $k = 1, 2$ и 3 .*

Результат, связанный с теоремой 17, при других предположениях был получен в [12]. Эта теорема включает утверждение, похожее на результат теоремы 2.8 из [3] и, следовательно, дает более сильный результат.

СЛЕДСТВИЕ 18. *Для данного гомоморфизма $f: A \rightarrow \mathbb{C}$ линейные отображения $\Phi_k = \Phi_k(f): A^{\otimes n} \rightarrow \mathbb{C}$, $k \geq 4$, определяются отображениями Φ_1, Φ_2, Φ_3 .*

Из следствия 18 вытекает известный результат [13] о том, что конечная группа полностью определяется своими k -характерами Фробениуса для $k = 1, 2, 3$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 17. По определению

$$\Phi_2(e_i, e_j) = f(e_i)f(e_j) - f(e_i e_j).$$

Положим $R_{ij} = f(e_i e_j)$. Имеем

$$R_{ij} = \sum_r a_{ij}^r f(e_r) = f(e_i)f(e_j) - \Phi_2(e_i, e_j). \quad (4.1)$$

Аналогично,

$$\begin{aligned} \Phi_3(e_i, e_j, e_k) &= f(e_i)f(e_j)f(e_k) - f(e_i) \sum_r a_{jk}^r f(e_r) \\ &\quad - f(e_j) \sum_r a_{ik}^r f(e_r) - f(e_k) \sum_r a_{ij}^r f(e_r) \\ &\quad + \sum_{r,s} (a_{ij}^r + a_{ji}^r) a_{rk}^s f(e_s). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} \sum (a_{ij}^r + a_{ji}^r)R_{rk} &= f(e_i)R_{jk} + f(e_j)R_{ik} + f(e_k)R_{ij} \\ &\quad - f(e_i)f(e_j)f(e_k) + \Phi_3(e_i, e_j, e_k). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Из определения фробениусовой алгебры следует, что матрица $R_{ij} = f(e_i e_j) = \sum_r a_{ij}^r f(e_r)$ является симметричной и невырожденной. Рассматривая уравнение (4.2) при фиксированных i, j как систему линейных уравнений относительно вектора (a_{ij}^r) , $r = 1, \dots, n$, получаем, что эта система имеет единственное решение. Теорема доказана.

В случае коммутативной фробениусовой алгебры A получается более явный ответ. Положим

$$R_i = f(e_i), \quad R_{ij} = f(e_i e_j), \quad R_{ijk} = f(e_i e_j e_k).$$

В терминах значений гомоморфизмов Φ_2 и Φ_3 мы имеем

$$\begin{aligned} R_{ij} &= \Phi_2(e_i, e_j) - R_i R_j, \\ 2R_{ijk} &= \Phi_3(e_i, e_j, e_k) + R_i R_{jk} + R_j R_{ik} + R_k R_{ij} - R_i R_j R_k. \end{aligned}$$

Согласно определению фробениусовой алгебры матрица R_{ij} обратима. Обозначим через R^{ij} матрицу, обратную к R_{ij} . Прямые вычисления дают следующую явную формулу для структурных констант алгебры A .

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 19. *Структурные константы коммутативной фробениусовой алгебры задаются следующей формулой:*

$$a_{ij}^k = \sum_m R_{ijm} R^{mk}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя формулу

$$R_{ijk} = f(e_i e_j e_k) = \sum_n f(a_{ij}^n e_n e_k),$$

получаем

$$\sum_m R_{ijm} R^{mk} = \sum_{m,n} a_{ij}^n R_{nm} R^{mk} = a_{ij}^k.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО СЛЕДСТВИЯ 18. Нам достаточно показать, что для вычисления значений гомоморфизмов Φ_k необходимы структурные константы $a_{(ij)}^k$, а не a_{ij}^k . Используем индукцию.

В разложении $\Phi_m(e_1, \dots, e_m)$ в терминах значений гомоморфизма f единственное слагаемое, которое нельзя непосредственно выразить через Φ_r с $r < m$, есть

$$\sum_{\sigma \in S_{m-1}} f(e_1 e_{\sigma(2)} e_{\sigma(3)} \cdots e_{\sigma(m)}) = \frac{1}{m} \sum_{\sigma \in S_m} f(e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(m)}).$$

Умножение в йордановой алгебре $J(A)$ может быть не ассоциативным, но ассоциатор выражается через коммутаторы, а именно:

$$\begin{aligned} 4((a \circ b) \circ c - a \circ (b \circ c)) &= abc + bac + cab + cba - abc - acb - bca - cba \\ &= [b, ac] - [b, ca] = [b, [a, c]]. \end{aligned}$$

Так как гомоморфизм f является следовым, то $f([a, b]) = 0$, и мы получаем, что

$$f((a \circ b) \circ c) = f(a \circ (b \circ c)).$$

Следовательно, гомоморфизм f на итерированных произведениях элементов алгебры $J(A)$ ведет себя так, как будто это ассоциативная алгебра. Таким образом,

$$2^{m-1} \sum_{\sigma \in S_m} f(e_{\sigma(1)} \cdots e_{\sigma(m)}) = \sum_{\sigma \in S_m} f(e_{\sigma(1)} \circ \cdots \circ e_{\sigma(m)}).$$

В случае конечных групп получаем следующий результат.

Пусть G – конечная группа с множеством элементов $\{g_1, \dots, g_n\}$. Рассмотрим фробениусову алгебру $\mathbb{C}G$ со структурным отображением $f = \frac{1}{n}\chi: \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$, где χ – регулярное представление группы G .

СЛЕДСТВИЕ 20. *Линейные отображения $\Phi_1 = f$, Φ_2 и Φ_3 восстанавливают следующую структуру групповой алгебры $\mathbb{C}G$:*

- 1) Φ_1 выделяет единицу e группы G ;
- 2) Φ_2 задает операцию перехода к обратному элементу, т.е. выделяет пары (g_i, g_j) такие, что $g_i g_j = e$;
- 3) Φ_1 , Φ_2 и Φ_3 задают структурные константы йордановой алгебры $J(\mathbb{C}G)$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Регулярное представление χ принимает значение n на единице e группы G и значение 0 на всех остальных элементах, откуда, очевидно, вытекает утверждение 1), так как $\Phi_1 = f = \frac{1}{n}\chi$. Далее, согласно (4.1)

$$\Phi_2(h, g) = \begin{cases} -1, & \text{если } hg = e, h \neq e; \\ 0 & \text{во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Таким образом мы находим все пары взаимно обратных элементов. Перепишем полученный результат в терминах структурных констант. Упорядочим элементы группы G так, чтобы $g_1 = e$, и запишем $g_i g_j = \sum_{k=1}^n a_{ij}^k g_k$. В рассматриваемом случае a_{ij}^k принимают значения 0 или 1, причем $\sum_{k=1}^n a_{ij}^k = 1$ для всех пар (i, j) . Утверждение 1) означает, что

$$a_{i1}^k = a_{1i}^k = \delta_{i,k}.$$

Утверждение 2) восстанавливает значения

$$a_{ij}^1 = -\Phi_2(g_i, g_j), \quad \text{если } i + j > 2.$$

Выясним, какую информацию о структурных константах a_{ij}^k несет отображение Φ_3 . Согласно (4.2)

$$\Phi_3(g_i, g_j, g_k) = \sum_r (a_{ij}^r + a_{ji}^r) a_{rk}^1, \quad \text{если } i + j + k > 3.$$

Обратимая матрица $a_{r,k}^1$ нам полностью известна, что позволяет завершить доказательство.

ТЕОРЕМА 21. Пусть G – конечная группа и χ – характер ее регулярного представления. Линейные отображения χ , $\Phi_2(\chi)$ и $\Phi_3(\chi)$ определяют группу G с точностью до изоморфизма, задаваемого отображением $g \mapsto g^{-1}$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Используя следствие 20, немедленно получаем, что гомоморфизмы χ , $\Phi_2(\chi)$ и $\Phi_3(\chi)$ задают умножение на множестве элементов группы G с точностью до перестановки сомножителей.

Следующая лемма позволяет завершить доказательство этой теоремы.

ЛЕММА 22 (Р. Мэнсфилд [14]). Пусть G – конечная группа, умножение в которой известно не точно, но так, что для каждой пары элементов $g, h \in G$ мы знаем множество значений $\{gh, hg\}$. Тогда можно восстановить множество функций $\{m, m^{\text{op}}: G \times G \rightarrow G\}$, где $m(x, y) = xy$ и $m^{\text{op}}(x, y) = yx$.

Доказательство этой леммы, приведенное в [14], представляет собой элементарный (но трюковый) перебор всех возможных случаев. Для полноты изложения мы приводим в приложении А (раздел 5) несколько упрощенное доказательство.

В [14] эта лемма была применена для доказательства результата Форманека и Сибли [8] о том, что групповой детерминант конечной группы (впервые рассмотренный еще Делекингом) определяет группу.

Групповой детерминант группы G определяется следующим образом.

Выберем взаимно однозначное соответствие между множеством элементов $\{g_1, \dots, g_n\}$ группы G и множеством коммутирующих переменных $\{x_1, \dots, x_n\}$. Групповой детерминант – это определитель матрицы, полученной из таблицы умножения группы заменой $g_i \rightarrow x_i$. Групповой детерминант является однородным полиномом степени n от $\{x_1, \dots, x_n\}$ с целыми коэффициентами.

Зададим матрицу $M_G = (m_{ij} = x_k)$, где соответствие $(i, j) \rightarrow k$ задается правилом $g_i g_j^{-1} = g_k$. Ясно, что M_G отличается от таблицы умножения порядком столбцов, так что $D_G = \pm \det M_G$. Отметим, что $\det M_G = x_1^n + \dots$.

Рассмотрим n -мерное линейное пространство $\mathbb{C}^n \simeq \mathbb{C}G$ и правое регулярное представление группы G в базисе $\{g_1, \dots, g_n\}$:

$$T: \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}^n, \quad T(g)g_k = g_k g^{-1}.$$

Обозначим через T_i матрицу действия оператора $T(g_i)$ в этом базисе. Тогда

$$M_G = \sum x_i T_i.$$

Рассмотрим теперь характер представления T

$$\chi: \mathbb{C}G \rightarrow \mathbb{C}$$

и продолжим его до линейного $\mathbb{C}[x_1, \dots, x_n]$ -гомоморфизма

$$f: \mathbb{C}G[x_1, \dots, x_n] \rightarrow \mathbb{C}[x_1, \dots, x_n].$$

ЛЕММА 23. Положим $a = \sum_{i=1}^n x_i g_i \in \mathbb{C}G[x_1, \dots, x_n]$. Тогда

$$\Phi_n(f)(a, \dots, a) = D_G.$$

Знаменитое разложение группового детерминанта на неприводимые множители, полученное Фробениусом в [10], получается немедленно из разложения регулярного представления T на неприводимые: пусть $\chi = \chi_1 + \dots + \chi_q$ – разложение регулярного представления T на неприводимые представления и n_i – размерность представления с характером χ_i , тогда

$$D_G = \prod_{i=1}^q \Phi_{n_i}(\chi_i)^{n_i}.$$

5. Приложение А. Доказательство леммы Мэнсфильда

Здесь мы приводим новое обещанное доказательство следующего результата.

ЛЕММА 24. Пусть G — группа с умножением $(x, y) \rightarrow xy$. Тогда если $*$ — некоторое ассоциативное умножение на G , связанное с исходным умножением таким образом, что для каждой пары $x, y \in G$ произведение $x * y$ равно xy или yx , то $x * y = xy$ для всех $x, y \in G$ или $x * y = yx$ для всех $x, y \in G$.

Переформулируем лемму следующим образом: пусть $A = \{(x, y) : x * y = xy\}$ и $B = \{(x, y) : x * y = yx\}$, тогда согласно условиям леммы $A \cup B = G \times G$, и надо доказать, что $A = G \times G$ или $B = G \times G$. Ясно, что множество $A \cap B$ симметрично.

Доказательство леммы опирается на упражнение 26 из § 4 в [1]. Для данной пары $x, y \in G$ мы имеем:

ФАКТ 25. $x * y = y * x \iff xy = yx$.

Импликация $xy = yx \implies x * y = y * x$ очевидна. В обратном направлении, пусть $x * y = y * x$, тогда без ограничения общности можно положить $x * y = xy$. Действительно, если это не так, то $y * x = x * y = yx$, и достаточно сделать замену x и y .

Далее будем считать, что $xy \neq yx$, в противном случае доказывать нечего. Рассмотрим элемент $x * x * y = x^2 * y$ и предположим, что он не равен $x^2 y$. В то же время, в силу предыдущих соглашений $x * x * y = x * xy = xyx$ или $x^2 y$. Таким образом, $yx^2 = xyx$ и, следовательно, $yx = xy$. Полученное противоречие показывает, что $x * x * y = x^2 y$.

Имеем $x * y * x * x * y = xy * xy = (xy)^2$. С другой стороны, по предположению элемент $x * y * x * x * y = x * x * y * y = x^2 y * y$ равен $x^2 y^2$ или $yx^2 y$, т.е. $(xy)^2 = x^2 y^2$ или $(xy)^2 = yx^2 y$. И в том и в другом случае мы приходим к соотношению $xy = yx$, т.е. к противоречию.

СЛЕДСТВИЕ 26. $x * y = xy \iff y * x = yx$, т.е. множество A симметрично.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $x * y = xy$ и $y * x = xy$, тогда согласно факту 25 мы имеем $xy = yx$. Таким образом, $x * y = xy \implies y * x = yx$. Обратная импликация следует по симметрии.

Так как оба множества A и $A \cap B$ симметричны и $A \cup B = G \times G$, то мы немедленно получаем, что и B симметричное множество. Таким образом, доказано, что имеет место

СЛЕДСТВИЕ 27. $x * y = yx \iff y * x = xy$.

ФАКТ 28. $x * y * x = xyx$ для всех $x, y \in G$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Пусть $xy = yx$, тогда $x * y * x = xy * x = xyx$ или $x^2 y$. Требуемое равенство имеет место, так как $xyx = x^2 y$. С другой стороны, пусть $xy \neq yx$ и $x * y * x \neq xyx$. Тогда возможны следующие два случая.

а) $x * y = xy$ и $y * x = yx$. Тогда $x * y * x = xy * x = x^2 y$ или xyx . По ассоциативности $x * y * x = x * yx = xyx$ или yx^2 . Таким образом, $x * y * x = x^2 y = yx^2$. Имеем: $x * x * y = x^2 * y = x^2 y = x * y * x$. Следовательно, $x * y = y * x$, что противоречит нашим предположениям.

б) $x * y = yx$ и $y * x = xy$. Опять мы имеем $x * y * x = yx * x = yx^2$ и $x * y * x = x * xy = x^2 y$. Таким образом, $x * x * y = x * y * x$ и $x * y = y * x$. Полученное противоречие завершает доказательство.

Будем рассматривать теперь $G \times G$ как квадратную таблицу со строками $R_x = \{(x, y) : y \in G\}$.

ФАКТ 29. Для любого $x \in G$ либо $R_x \subset A$, либо $R_x \subset B$.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Допустим, что факт 29 не верен. Тогда существует такой элемент x , что R_x пересекает оба множества $G \times G \setminus A$ и $G \times G \setminus B$, т.е. существуют такие $y, z \in G$, что $x * y = yx \neq xy = y * x$ и $x * z = xz \neq zx = z * x$. Покажем, что при этих предположениях $yxz = zxy$. Здесь возможны два случая.

а) $y * z \neq z * y$. Тогда, как показано выше, $yz \neq zy$. Элемент $z * x * y$ равен zxy или yzx . Этот элемент равен также $z * yx = zyx$ или yxz . Но $yzx \neq zyx$, $yzx \neq yxz$ и $zxy \neq zyx$, таким образом, $z * x * y = zxy = yxz$.

б) $y * z = z * y$ ($= yz = zy$). Покажем, что предположение $yxz \neq zxy$ приводит к противоречию. Рассмотрим элемент $z * x * y$. Он равен $zx * y = yzx$ или zxy , а также равен $z * yx = zyx$ или yxz . При наших предположениях, если $zxy \neq zyx$ и $yzx \neq yxz$, то мы получаем $z * x * y = yzx = zyx$. Рассмотрим элемент $x * z * y$. Он не равен $z * x * y = yzx$. Но он равен $x * y * z = x * yz = xyz$ или yxz . Следовательно, $x * z * y = xyz = xzy$. Наконец, рассмотрим элемент $z * y * x$. Он не равен $z * x * y = yzx$, но равен $yz * x = xyz$ или yxz . Следовательно, $z * y * x = xyz = xzy$. Таким образом, $x * (z * y) = (z * y) * x$, т.е. $x * zy = zy * x$, и поэтому $xzy = zyx$. Из этого мы получаем, что $z * x * y = x * z * y$, а это противоречит условию $x * z \neq z * x$.

Возьмем, наконец, элемент $x * z * x * y$. Согласно факту 2 он равен $xzx * y = xzxy$ или $yxzx$. С другой стороны, он равен $xz * yx = xzyx$ или $yxxz$. Опять надо рассматривать два случая.

а) $x * z * x * y = xzxy = xzyx$ или $yxxz$. При первом варианте получаем, что $xy = yx$, т.е. – противоречие. Второй вариант вместе с предыдущими вычислениями дает $yxxz = xzxy = xzyx$, что опять приводит к $xy = yx$.

б) $x * z * x * y = yxxz = xzyx$ или $yxxz$. Второй вариант дает $xz = zx$, т.е. противоречие. Таким образом, $xzyx = yxxz = xzyx$, но это также дает $xz = zx$. Это завершает доказательство факта 29.

Согласно факту 29 для каждого x мы имеем $R_x \subset A$ или $R_x \subset B$. Предположим, что $R_x \subset A$, но $R_x \not\subset B$, и $R_u \subset B$, но $R_u \not\subset A$. Тогда $x * y = xy$ для всех y и существует такое z , что $xz \neq zx$. Аналогично, $u * v = vu$ для всех v и существует такое w , что $uw \neq wu$.

Рассмотрим элемент $x * u = xu$, он равен $ux = u * x$ и $R_{xu} \subset A$ или B . Предположим, что $R_{xu} \subset A$, тогда рассмотрим элемент $x * u * w = xu * w = xuw$, который должен быть равен также $x * wu = xwu$. Пришли к противоречию. Теперь предположим, что $R_{xu} \subset B$, и рассмотрим элемент $z * x * u = z * xu = xiz = uxz$, который также равен $zx * u = uzx$. Из этого вытекает, что $xz = zx$ – противоречие. Лемма Мэнсфильда доказана.

6. Приложение В. Алгебра полисимметрических полиномов

Пусть $n > 1$. Напомним, что полином $p(x_1, \dots, x_n)$, где $x_k = (x_{k1}, \dots, x_{km}) \in \mathbb{C}^m$, называется полисимметрическим, если он инвариантен относительно всех перестановок множества аргументов $(x_1, \dots, x_n)$. Алгебра полиномиальных функций на алгебраическом многообразии $\text{Sym}^n(\mathbb{C}^m)$ канонически отождествляется с алгеброй полисимметрических полиномов, которую мы будем обозначать через $\mathcal{S}\mathcal{P}^n(\mathbb{C}^m)$. Для

каждого набора неотрицательных целых чисел $\omega = (i_1, \dots, i_m)$ введем полисимметрические полиномы Ньютона p_ω :

$$p_\omega(x_1, \dots, x_n) = \sum_{k=1}^n x_{1k}^{i_1} \cdots x_{mk}^{i_m};$$

видно, что при $m = 1$ получаются классические полиномы Ньютона.

Положим $|\omega| = i_1 + \dots + i_m$. Пусть $\{z_\omega\}$, $\omega \in \mathbb{Z}_{\geq 0}^m$, — множество коммутирующих переменных, градуированных по правилу $\deg z_\omega = |\omega|$. Рассмотрим градуированное кольцо полиномов $L = \mathbb{C}[z_\omega]$. Зададим в L систему однородных полиномов $\{\mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_j}\}$, $\deg \mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_j} = |\omega_1| + \dots + |\omega_j|$, по формулам “типа Фробениуса”:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_{\omega_1} &= z_{\omega_1}, \quad \mathcal{F}_{\omega_1, \omega_2} = z_{\omega_1} z_{\omega_2} - z_{\omega_1 + \omega_2} \quad \text{и далее по индукции:} \\ \mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_{j+1}} &= z_{\omega_1} \mathcal{F}_{\omega_2, \dots, \omega_{j+1}} - \mathcal{F}_{\omega_1 + \omega_2, \omega_3, \dots, \omega_{j+1}} - \dots - \mathcal{F}_{\omega_2, \dots, \omega_j, \omega_1 + \omega_{j+1}}. \end{aligned}$$

Следуя схеме, приведенной выше (см. раздел 3), нетрудно получить явное выражение полинома $\mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_j}$. Для дальнейшего будет важным, что линейная часть полинома $\mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_j}$ равна $(-1)^j (j-1)! z_{\omega_1 + \dots + \omega_j}$.

Тот факт, что кольцо L можно канонически отождествить с кольцом полиномов на линейном пространстве $\text{Hom}(\mathbb{C}[u_1, \dots, u_m], \mathbb{C})$, позволяет, переходя к гомоморфизму колец полиномов, индуцированному отображением вычисления $\mathcal{E}$, получить из теоремы 11 следующий результат.

ТЕОРЕМА 30. *При данных n и m кольцевой гомоморфизм*

$$\mathcal{E}^*: L \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}^n(\mathbb{C}^m)$$

является эпиморфизмом.

Обозначим $\mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{L}(m, n)$ ядро гомоморфизма $\mathcal{E}^$. Тогда $\mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{L}(m, n)$ — идеал в кольце L , порожденный полиномами $\mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_{n+1}}$, при условии $|\omega_1| \cdots |\omega_{n+1}| > 0$.*

Рассмотрим подкольцо $L_n \subset L$, порожденное образующими $\{z_\omega\}$, $|\omega| \leq n$. Используя указанный выше вид линейной части полиномов $\mathcal{F}_{\omega_1, \dots, \omega_{n+1}}$, получаем

СЛЕДСТВИЕ 31. *Ограничение гомоморфизма $\mathcal{E}^*$ на L_n дает эпиморфизм*

$$\mathcal{E}_n^*: L_n \rightarrow \mathcal{S}\mathcal{P}^n(\mathbb{C}^m).$$

Обозначим через $\text{Syz}(m, n)$ ядро гомоморфизма $\mathcal{E}_n^$. Тогда*

$$\text{Syz}(m, n) = \mathcal{S}\mathcal{U}\mathcal{L}(m, n) \cap L_n.$$

По построению L_n — кольцо полиномов на $\mathbb{C}^N$, где $N = \binom{n+m}{n} - 1$. Получаем

СЛЕДСТВИЕ 32.

$$\mathrm{Sym}^n(\mathbb{C}^m) \sim \mathrm{Spec}(L_n/\mathrm{Syz}(n, m)) \subset \mathbb{C}^N.$$

Отметим, в заключение, что утверждение об эпиморфности гомоморфизма $\mathcal{E}^*$ эквивалентно первой фундаментальной теореме классической теории инвариантов о том, что любой полисимметрический полином от n векторных аргументов можно выразить (неоднозначно) в виде полинома от полисимметрических полиномов Ньютона p_ω , $|\omega| \leq n$. Классический случай $m = 1$ – единственный, когда такое выражение однозначно.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] N. Bourbaki. *Éléments de Mathématique. Algèbre. Chapitres 1–3*. Paris: Hermann, 1970. (Пер. на рус. яз. (предыд. изд.): Н. Бурбаки. Алгебра, гл. 1–3. М.: Физматгиз, 1962.)
- [2] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис. Конструктивное доказательство обобщенного изоморфизма Гельфанда // *Функц. анализ и его прил.* 2001. Т. 35. № 4. С. 20–25.
- [3] V. M. Buchstaber, E. G. Rees. The Gelfand map and symmetric products // *Selecta Math.* (N.S.). 2002. V. 8. № 4. P. 523–535.
- [4] V. M. Buchstaber, E. G. Rees. Multivalued groups, their representations and Hopf algebras // *Transform. Groups*. 1997. V. 2. № 4. P. 325–349.
- [5] V. M. Buchstaber, E. G. Rees. Multivalued groups, n -Hopf algebras and n -ring homomorphisms // *Lie Groups and Lie Algebras*. Dordrecht: Kluwer, 1998. P. 85–107. (Math. Appl. V. 433.)
- [6] В. М. Бухштабер, Е. Г. Рис. k -характеры Фробениуса и n -кольцевые гомоморфизмы // *УМН*. 1997. Т. 52. № 2. С. 159–160.
- [7] E. Formanek. *The Polynomial Identities and Invariants of $n \times n$ Matrices*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 1991.
- [8] E. Formanek, D. Sibley. The group determinant determines the group // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1991. V. 112. № 3. P. 649–656.
- [9] G. Frobenius. Über Gruppencharaktere // *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin*. 1896. P. 985–1021.
- [10] G. Frobenius. Über die Primfaktoren der gruppensdeterminante // *Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin*. 1896. P. 1343–1382.
- [11] И. М. Гельфанд, А. Н. Колмогоров. О кольцах непрерывных функций на топологических пространствах // *Докл. АН СССР*. 1939. V. 22. № 1. P. 11–15.
- [12] H.-J. Hoehnke. Über komponierbare Formen und konkordante hyperkomplexe Größen // *Math. Z.* 1958. V. 70. P. 1–12.
- [13] H.-J. Hoehnke, K. W. Johnson. The 1-, 2- and 3-characters determine a group // *Bull. Amer. Math. Soc. (N.S.)*. 1992. V. 27. № 2. P. 243–245.
- [14] R. Mansfield. A group determinant determines its group // *Proc. Amer. Math. Soc.* 1992. V. 116. № 4. P. 939–941.
- [15] L. Nyssen. Pseudo-représentations // *Math. Ann.* 1996. V. 306. № 2. P. 257–283.
- [16] T. W. Palmer. *Banach Algebras and the General Theory of *-Algebras*. V. 1: Algebras and Banach Algebras. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1994. (Encyclopedia Math. Appl. V. 49.)
- [17] R. Rouquier. Caractérisation des caractères et pseudo-caractères // *J. Algebra*. 1996. V. 180. № 2. P. 571–586.
- [18] R. L. Taylor. Galois representations associated to Siegel modular forms of low weight // *Duke Math. J.* 1991. V. 63. № 2. P. 281–332.
- [19] A. Wiles. On ordinary λ -adic representations associated to modular forms // *Invent. Math.* 1988. V. 94. № 3. P. 529–573.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
University of Edinburgh, School of Mathematics
E-mail: buchstab@mendeleev.ru; E.Rees@ed.ac.uk

Поступила в редакцию
15.01.2004