Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Г. Эршлер, Обобщенные броуновские петли, *УМН*,
2007, том 62, выпуск 3, 221–222

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7042>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 11:32:33

Обобщенные броуновские петли

А. Г. Эршлер

Мы определяем и изучаем случайные вложения конечных нормализованных графов в графы и группы. Рассмотрим связный конечный граф Γ с выделенной точкой O и граф G с выделенной точкой e . В этой заметке мы рассматриваем случай, когда G является графом Кэли бесконечной конечно порожденной группы.

Пусть $O = X_1, X_2, \dots, X_k$ – это вершины графа Γ . Для любого n мы рассматриваем граф $\Gamma^{(n)}$, который получается из Γ умножением длины каждого ребра на n и добавлением $n-1$ дополнительных вершин на каждое ребро таким образом, что длина каждого ребра в $\Gamma^{(n)}$ снова становится равной единице. Вершины $\Gamma^{(n)}$, соответствующие $X_1, \dots, X_k$, мы называем главными вершинами и обозначаем их $O^{(n)} = X_1^{(n)}, X_2^{(n)}, \dots, X_k^{(n)}$.

Случайные вложения $\Gamma^{(n)}$ в G . Пусть $\rho: \Gamma^{(n)} \rightarrow G$ – это сохраняющее ребра вложение такое, что $\rho(O^{(n)}) = e$. Мы рассматриваем равномерное вероятностное распределение на таких вложениях и изучаем предельное распределение расстояний между образами главных вершин $\rho(X_1^{(n)}), \rho(X_2^{(n)}), \dots, \rho(X_k^{(n)}) \subset G^k$. В дальнейшем мы предполагаем, что G имеет петлю в вершине e . Можно не делать это предположение и рассматривать только четные n .

Заметим, что для регулярного графа G вероятность $P[\phi(X_i^{(n)}) = g_i \text{ для всех } i: 1 \leq i \leq k]$ пропорциональна произведению $\prod p_n(g_i, g_j)$ по всем i, j таким, что X_i, X_j соединены ребром в Γ . Здесь $g_1 = e, g_2, \dots, g_k$ – это вершины в G и $p_n(g, h)$ – вероятность перехода из g в h за n шагов простого случайного блуждания на G .

Средний диаметр образа главных вершин мы обозначаем $\text{diam}_{G,e,O}(\Gamma, n)$. Нетрудно увидеть, что для графа Кэли конечно порожденной группы G распределение расстояний между образами главных вершин не зависит от выбора O в Γ и $e \in G$. Поэтому в этой ситуации далее мы будем опускать в обозначениях индексы O и e .

Сохраняющие ребра отображения между графами называются также гомоморфизмами графов. Случайные гомоморфизмы ненормализованных конечных графов в $\mathbb{Z}$ изучались в [1]–[3]. В этих статьях случайные вложения графа Γ называются Γ -индексированными случайными блужданиями. Заметим, что в случае рассматриваемых нами случайных вложений нормализованных графов аналогия со случайными блужданиями еще сильнее.

Пусть G – регулярный граф конечной валентности. Если $\Gamma = \Gamma_{rw}$ – это граф, имеющий две вершины X_1 и X_2 и одно ребро между ними, то распределение $\rho(X_2^{(n)})$ – это распределение n -го шага простого случайного блуждания по G , начинающегося в e . Если $\Gamma = \Gamma_{Bb}$ – это граф, имеющий две вершины X_1, X_2 и два ребра между ними, тогда $\rho(X_2^{(n)})$ распределена как средняя точка случайной петли в G (с начальной и конечной точкой в e). Случайные петли в группах изучались в [4]–[8]. Можно показать, что для нильпотентных (в частности, для абелевых) групп асимптотическое поведение вложений конечных графов сильно напоминает два вышеупомянутых случая: случайных блужданий и случайных петель. Из следующих теорем видно, что в общем случае ситуация может быть существенно иной.

Рассмотрим конечный граф Γ , имеющий по крайней мере две вершины. Напомним, что минимальный разрез mincut_Γ графа Γ – это минимальное число ребер, после удаления которых Γ перестает быть связным. Для пары различных вершин x и y в графе Γ минимальный разрез $\text{mincut}_\Gamma(x, y)$ между ними – это минимальное число ребер, после удаления которых x и y оказываются в разных компонентах связности. Ребро связного графа называется разделяющим, если после его удаления граф теряет связность.

ТЕОРЕМА 1. Рассмотрим свободную группу $G = F_m$ с $m \geq 2$ образующими, S_m – множество образующих, свободно порождающих F_m , и $S = S_m \cup \{e\}$. Пусть Γ – это конечный связный граф, x и y – две различные вершины графа Γ .

- (i) Если $\text{mincut}_\Gamma(x, y) = 1$, то асимптотическое расстояние между образами главных вершин, соответствующих x и y , линейно: $\mathbb{E}[d_G(\phi(X^{(n)}), \phi(Y^{(n)}))] \sim n$.
- (ii) Если $\text{mincut}_\Gamma(x, y) = 2$, то $\mathbb{E}[d_G(\phi(X^{(n)}), \phi(Y^{(n)}))] \sim n^{1/2}$.
- (iii) В остальных случаях (если $\text{mincut}_\Gamma(x, y) \geq 3$) $\mathbb{E}[d_G(\phi(X^{(n)}), \phi(Y^{(n)}))] \sim \text{const}$.

Наиболее простой частный случай второго пункта теоремы – случайные петли в свободной группе. Этот случай был известен ранее (см. [7], [4]).

Напомним, что сплетение групп A и B (обозначаемое $A \wr B$) – это полупрямое произведение A и $\sum_A B$ для действия сдвигами A на $\sum_A B$: для $a \in A$ и отображения $f: A \rightarrow B$ такого, что $f \in \sum_A B$, выполнено равенство $f^a(x) = f(a^{-1}x)$, $x \in A$. Сплетение конечно порожденных групп тоже конечно порождено. В следующей теореме мы описываем асимптотический диаметр конечных графов для сплетения $\mathbb{Z}$ с конечной группой (для любой системы образующих в таком сплетении).

ТЕОРЕМА 2. Пусть $G = \mathbb{Z} \wr A$, A – конечная группа, содержащая по крайней мере два элемента, а S – конечная симметричная система образующих группы G , содержащая нейтральный элемент.

Рассмотрим конечный связный граф Γ , имеющий по крайней мере две вершины.

- (i) Если в Γ есть по крайней мере одно разделяющее ребро, то $\text{diam}_{G,S}(\Gamma, n) \sim \sqrt{n}$.
- (ii) Если в Γ нет разделяющих ребер, то $\text{diam}_{G,S}(\Gamma, n) \sim n^{1/3}$.

Опять же, частный случай второй части теоремы 2 – это случайные петли в рассматриваемом сплетении. Это первый известный пример случайных петель на группе, размер которых не асимптотически эквивалентен $n^{1/2}$ (см. [5]).

Для изучения асимптотик, связанных со случайными вложениями нормированных графов в граф G , полезно знать достаточно точные оценки на переходные вероятности для случайного блуждания на G . В доказательстве теоремы 1 мы, в частности, пользуемся оценками Лэли для переходных вероятностей на свободных группах [9]. При доказательстве теоремы 2 мы используем следующую лемму.

ЛЕММА. Рассмотрим G , A и S такие, как в теореме 2. Существуют $C, D > 0$ такие, что для любого натурального n и для любого $g \in G$ вида $g = (0, f)$, имеющего длину меньше $Cn^{1/3}$, выполняется следующее неравенство для переходных вероятностей простого случайного блуждания (G, S) : $p_n(e, g) \geq Dp_n(e, e)$.

Для определенного выбора S утверждение леммы (без предположения $g = (e, f)$) было доказано ранее Д. Ревелем [10].

Список литературы

- [1] I. Benjamini, O. Höggström, E. Mossel, *J. Combin. Theory Ser. B*, **78**:1 (2000), 86–114.
- [2] I. Benjamini, G. Schechtman, *Random Structures Algorithms*, **17**:1 (2000), 20–25. [3] J. Kahn, *Israel J. Math.*, **124** (2001), 189–201. [4] P. Bougerol, T. Jeulin, *Probab. Theory Related Fields*, **115**:1 (1999), 95–120. [5] A. Erschler, *Probab. Theory Related Fields*, **136**:4 (2006), 560–586.
- [6] A. В. Лёгчиков, *УМН*, **51**:1 (1996), 51–100. [7] S. K. Nechaev, A. Yu. Grosberg, A. M. Vershik, *J. Phys. A*, **29**:10 (1996), 2411–2433. [8] S. K. Nechaev, Ya. G. Sinai, *Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.)*, **21**:2 (1991), 121–132. [9] S. P. Lalley, *J. Theoret. Probab.*, **4**:4 (1991), 701–723. [10] D. Revelle, *Electron. Comm. Probab.*, **8** (2003), 142–154.

А. Г. Эршлер (A. G. Erschler)

Université Paris XI (Orsay);

Санкт-Петербургское отделение

Математического института им. В. А. Стеклова РАН

E-mail: Anna.Erschler@math.u-psud.fr

Представлено В. М. Бухштабером

Принято редколлегией

30.03.2007