Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

Е. Б. Дынкин, Супердиффузии и положительные решения нелинейных дифференциальных уравнений с частными производными, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 145–156

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm705>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 3.89.197.203

26 апреля 2023 г., 14:10:42

УДК 519.218.1

СУПЕРДИФФУЗИИ И ПОЛОЖИТЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ

Е. Б. Дынкин

Используя суперброуновское движение, все положительные решения нелинейного дифференциального уравнения $\Delta u = u^\alpha$ с $1 < \alpha \leq 2$ в ограниченной гладкой области E характеризуются их (тонким) следом на границе. Этим решается поставленная несколько лет назад автором задача. Решение для специального случая $\alpha = 2$ было дано Б. Мселати в 2002 году.

Библиография: 18 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

§ 1. Введение	145
§ 2. Теория следа для уравнения (1.1)	146
§ 3. Вероятностные инструменты	148
§ 4. Соотношения между супердиффузиями и условными диффузиями	151
§ 5. Все решения уравнения (1.2) σ -умеренны	152
§ 6. Исторические и библиографические замечания	154
Список литературы	155

§ 1. Введение

1.1. Мы рассматриваем полулинейное дифференциальное уравнение с частными производными

$$Lu = \psi(u) \quad \text{в } E, \quad (1.1)$$

где L — эллиптический дифференциальный оператор второго порядка, E — ограниченная гладкая¹ область в $\mathbb{R}^d$ и ψ — непрерывно дифференцируемая положительная функция. Наша цель — описать множество $\mathcal{U}$ всех положительных решений этого уравнения.

Исследование частично поддержано грантом NSF DMS-0204237.

¹Мы называем гладкими открытые множества класса $C^{2,\lambda}$, если другой класс не указан явно.

Мы называем элемент u множества $\mathcal{U}$ *умеренным*, если $u \leq h$ для некоторого h , удовлетворяющего условию $Lh = 0$ в E . Элемент u называется σ -*умеренным*, если он является пределом возрастающей последовательности умеренных решений. При весьма мягких условиях на функцию ψ мы определяем для любой функции $u \in \mathcal{U}$ ее след на границе. Этот след – пара (Γ, ν) , где Γ – подмножество ∂E , а ν – σ -конечная мера на $\partial E \setminus \Gamma$. (Точка y принадлежит Γ , если $\psi'(u)$ достаточно быстро стремится к бесконечности при $x \rightarrow y$.) В [7] были описаны все возможные значения следа и было установлено взаимно однозначное соответствие между этими значениями и σ -умеренными решениями. Возникает естественный вопрос: *все ли решения являются σ -умеренными?*² В случае уравнения $\Delta u = u^2$ в области класса C^4 положительный ответ на этот вопрос был дан Б. Мселати в [18]. Однако его основной инструмент – броуновская змея – неприменим к более общим уравнениям.

В [4], [8], [9] и [12] Е. Б. Дынкин и С. Е. Кузнецов изучили уравнение

$$\Delta u = u^\alpha \quad \text{при } 1 < \alpha \leq 2, \quad (1.2)$$

используя супердиффузию вместо броуновской змеи. Большая часть рассуждений Мселати была перенесена на этот случай. Однако критический пробел оставался незаполненным, пока он не был закрыт в августе 2003 года в [5] с помощью нового неравенства для супердиффузии (см. (5.1)).

1.2. В § 2 мы излагаем теорию следа для уравнения (1.1), развитую в [11] и [7]. Мы отложим до § 3 обсуждение связей между уравнением (1.1) и супердиффузией. Вначале эта связь играла решающую роль (см. [11]). Позже теория была распространена на случай уравнений, не соответствующих никакой супердиффузии (включая уравнение (1.2) с $\alpha > 2$). В §§ 3, 4 мы также готовим вероятностные средства для § 5, где мы даем набросок доказательства того, что все решения уравнения (1.2) σ -умеренны. Заключительный § 6 содержит исторические и библиографические замечания.

§ 2. Теория следа для уравнения (1.1)

2.1. Наша теория приложима к широкому классу непрерывно дифференцируемых функций ψ , удовлетворяющих условиям $\psi(0) = 0$ и $\psi(u) > 0$ при $u > 0$.³ Все результаты остаются справедливыми (с заменой ∂E на границу Мартина) для любой области E и, более общим образом, для любых дифференцируемых многообразий.

2.2. Умеренные и σ -умеренные решения. Нашей исходной точкой является представление положительных решений линейного уравнения

$$Lh = 0 \quad \text{в } E \quad (2.1)$$

интегралами Пуассона. Если $k(x, y)$ – ядро Пуассона для L в E , то формула

$$h_\nu(x) = \int_{\partial E} k(x, y) \nu(dy) \quad (2.2)$$

²Этот вопрос был задан как ключевая нерешенная задача в эпилоге книги [3].

³Она также применима к функциям $\psi(x, u)$, зависящим от $x \in E$. См. главу 11 в [3].

устанавливает взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{M}(\partial E)$ всех конечных мер ν на ∂E и множеством $\mathcal{H}$ всех положительных решений (2.1). (Мы называем решения уравнения (2.1) гармоническими функциями.)

Существует взаимно однозначное соответствие между множеством $\mathcal{U}_1$ всех умеренных решений и некоторым подмножеством $\mathcal{H}_1$ семейства $\mathcal{H}$, а именно, $h \in \mathcal{H}_1$ – минимальная гармоническая функция, мажорирующая $u \in \mathcal{U}_1$, и u – максимальное решение, мажорируемое h . Положим $\nu \in \mathcal{N}_1$, если $h_\nu \in \mathcal{H}_1$. Обозначим через u_ν элемент $\mathcal{U}$, соответствующий h_ν .

Индексирование умеренных решений мерами $\nu \in \mathcal{N}_1$ можно продолжить следующим образом на σ -умеренные решения: если $\nu_n \in \mathcal{N}_1$, $\nu_n \uparrow \nu$ и $u_{\nu_n} \uparrow u$, то мы полагаем $\nu \in \mathcal{N}_0$ и $u = u_\nu$.

2.3. Решеточная структура в E . Положим $u \leq v$, если $u(x) \leq v(x)$ для всех $x \in E$. Это определяет частичный порядок в $\mathcal{U}$. Для любого $\mathcal{U} \subset \mathcal{U}$ существует единственный элемент u в $\mathcal{U}$ со следующими свойствами:

- (а) $u \geq v$ для любого $v \in \mathcal{U}$;
- (б) если $\tilde{u} \in \mathcal{U}$ удовлетворяет условию (а), то $u \leq \tilde{u}$.

Обозначим этот элемент через $\text{Sup } \mathcal{U}$.

Для любых $u, v \in \mathcal{U}$ положим $u \oplus v = \text{Sup } W$, где W – множество всех таких элементов $w \in \mathcal{U}$, что $w \leq u + v$. Заметим, что $u \oplus v$ – умеренный элемент, если u и v умеренные, и он σ -умерен, если u и v являются σ -умеренными элементами.

Вообще говоря, $\text{Sup } \mathcal{U}$ не совпадает с поточечным супремумом (который не обязан принадлежать $\mathcal{U}$). Однако эти функции совпадают, если множество $\mathcal{U}$ замкнуто относительно операции $\oplus$. Более того, в этом случае существует такое $u_n \in \mathcal{U}$, что $u_n(x) \uparrow u(x)$ для всех $x \in E$. Следовательно, если множество $\mathcal{U}$ замкнуто относительно операции $\oplus$ и состоит из умеренных решений, то $\text{Sup } \mathcal{U}$ является σ -умеренной функцией. В частности, любому борелевскому подмножеству Γ в ∂E соответствует σ -умеренное решение

$$u_\Gamma = \text{Sup}\{u_\nu : \nu \in \mathcal{N}_1, \nu \text{ сосредоточена на } \Gamma\}. \quad (2.3)$$

Мы сейчас свяжем с Γ еще одно решение w_Γ . Во-первых, определим w_K для замкнутого множества K формулой

$$w_K = \text{Sup}\{u \in \mathcal{U} : u = 0 \text{ на } \partial E \setminus K\}. \quad (2.4)$$

Для любого борелевского подмножества Γ в ∂E положим

$$w_\Gamma = \text{Sup}\{w_K : K \text{ – замкнутое множество, } K \subset \Gamma\}. \quad (2.5)$$

Доказательство равенства $u_\Gamma = w_\Gamma$ было важной частью программы, кратко описанной в [3].

2.4. Сингулярные точки решения u . Рассмотрим классические решения уравнения (1.1), которые дважды непрерывно дифференцируемы в E . Однако они могут

стремиться к бесконечности при $x \rightarrow y \in \partial E$. Мы будем говорить, что y — *сингулярная точка* u , если она является точкой быстрого роста $\psi'(u)$. (Особая роль $\psi'(u)$ связана с тем фактом, что касательное пространство к $\mathcal{U}$ в точке u описывается уравнением $Lv = \psi'(u)v$.)

Быстрый рост положительной непрерывной функции $a(x)$ может быть определен как аналитически, так и вероятностно. Аналитическое определение использует ядро Пуассона $k_a(x, y)$ оператора $Lu - au$: $y \in \partial E$ является точкой быстрого роста для a , если $k_a(x, y) = 0$ для всех $x \in E$. Более прозрачное вероятностное определение дано в § 3.

Мы будем говорить, что борелевское подмножество Γ в ∂E является *f -замкнутым*, если Γ содержит все сингулярные точки решения u_Γ , определенного формулой (2.3).

2.5. Определение и свойства следа. След $u \in \mathcal{U}$ (который мы обозначим через $\text{Tr}(u)$) определяется как пара (Γ, ν) , где Γ — множество всех сингулярных точек u и ν — мера на $\partial E \setminus \Gamma$, заданная формулой

$$\nu(B) = \sup\{\mu(B) : \mu \in \mathcal{N}_1, \mu(\Gamma) = 0, u_\mu \leq u\}. \quad (2.6)$$

Имеем

$$u_\nu = \text{Sup}\{u_\mu \text{ умеренно}, u_\mu \leq u, \mu(\Gamma) = 0\},$$

и поэтому u_ν является σ -умеренным.

След любого решения u имеет следующие свойства.

2.5.А. Γ — борелевское f -замкнутое множество; ν — такая σ -конечная мера класса $\mathcal{N}_0$, что $\nu(\Gamma) = 0$ и все сингулярные точки u_ν принадлежат Γ .

2.5.Б. Если $\text{Tr}(u) = (\Gamma, \nu)$, то

$$u \geq u_\Gamma \oplus u_\nu. \quad (2.7)$$

Кроме того, $u_\Gamma \oplus u_\nu$ — максимальное σ -умеренное решение, мажорируемое u .

2.5.В. Если (Γ, ν) удовлетворяет условию 2.5.А, то $\text{Tr}(u_\Gamma \oplus u_\nu) = (\Gamma', \nu)$, и симметрическая разность между Γ и Γ' не заряжена никакой мерой $\mu \in \mathcal{N}_1$. Кроме того, $u_\Gamma \oplus u_\nu$ является минимальным решением с этим свойством, и при этом единственным σ -умеренным решением.

§ 3. Вероятностные инструменты

3.1. Диффузия. При некоторых мягких предположениях относительно коэффициентов L существует непрерывный марковский процесс $\xi = (\xi_t, \Pi_x)$ в $\mathbb{R}^d$, переходная плотность которого является фундаментальным решением параболического уравнения $\partial u / \partial t = Lu$. Мы называем этот процесс диффузией. Для любого открытого множества D обозначим через τ_D время первого выхода ξ из D .

3.2. Условная диффузия. Пусть ξ — диффузия в области E с переходной функцией $p_t(x, dy)$, и пусть $h \in \mathcal{H}$. Тогда

$$p_t^h(x, dy) = \frac{1}{h(x)} p_t(x, dy) h(y) \quad (3.1)$$

– переходная функция непрерывного марковского процесса $(\xi_t, \hat{\Pi}_x^h)$ в E , который называется h -преобразованием ξ . Мы предпочитаем иметь дело с мерами $\Pi_x^h = h(x)\hat{\Pi}_x^h$, которые линейно зависят от h . Положим $\Pi_x^\nu = \Pi_x^{h_\nu}$ и $\hat{\Pi}_x^y = \hat{\Pi}_x^{\delta_y}$, где δ_y – единичная масса в точке y . Процесс $(\xi_t, \hat{\Pi}_x^y)$ можно интерпретировать как диффузию, начинающуюся в $x \in E$ и обусловленную выходом из E в точке $y \in \partial E$.

Вероятностное определение быстрого роста положительной непрерывной функции $a(x)$, $x \in E$, может быть сформулировано в терминах условной диффузии следующим образом: $y \in \partial E$ есть точка быстрого роста для a , если

$$\hat{\Pi}_x^y \left[\int_0^{\tau_E} a(\xi_t) dt = \infty \right] = 1 \quad \text{для любого } x \in E.$$

3.3. Супердиффузия. Обозначим через $\mathcal{M}(S)$ множество всех конечных мер и через $\mathcal{P}(S)$ множество всех вероятностных мер на пространстве S , снабженном семейством измеримых множеств. Пусть $\mathcal{B}(E)$ означает множество всех положительных борелевских функций на $E \subset \mathbb{R}^d$. Обозначим через $\langle u, \mu \rangle$ интеграл от u по мере μ и используем обозначение $P\{A, Y\}$ для $\int_A Y dP$.

Предположим, что любому открытому множеству D и любой мере $\mu \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^d)$ сопоставлена такая случайная мера (X_D, P_μ) на $\mathbb{R}^d$, что

$$P_\mu e^{-\langle f, X_D \rangle} = e^{-\langle u, \mu \rangle} \quad (3.2)$$

для любой функции $f \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$, где u удовлетворяет уравнению

$$u(x) + \Pi_x \int_0^{\tau_D} \psi[u(\xi_t)] dt = \Pi_x f(\xi_{\tau_D}). \quad (3.3)$$

Мы назовем $X = (X_D, P_\mu)$ *супердиффузией*. (Эвристически, мы имеем здесь модель случайной эволюции облака частиц, и X_D является распределением масс на ∂D , если любая частица замораживается в момент своего первого выхода из D .⁴) Существование супердиффузии доказано для выпуклого класса функций ψ , содержащего функции $\psi(u) = u^\alpha$ при $1 < \alpha \leq 2$.

Обозначим через $\mathcal{F}_{\subset D}$ σ -алгебру, порожденную $X_{D'}$, $D' \subset D$, а через $\mathcal{F}_{\supset D}$ – σ -алгебру, порожденную $X_{D''}$, $D'' \supset D$.

В теории супердиффузии и ее приложениях важную роль играют следующие два свойства:

Марковость. Если $Y \geq 0$ является $\mathcal{F}_{\subset D}$ -измеримым и $Z \geq 0$ является $\mathcal{F}_{\supset D}$ -измеримым, то

$$P_\mu(YZ) = P_\mu(Y P_{X_D} Z).$$

Абсолютная непрерывность. При любых $x_1, x_2 \in D$ P_{x_1} абсолютно непрерывна относительно P_{x_2} на σ -алгебре $\mathcal{F}_{\supset D}$.

⁴Процесс ξ описывает движение каждой частицы и ψ характеризует механизм размножения.

3.4. Меры $\mathbb{N}_x$. Новый инструмент – семейство мер $\mathbb{N}_x$, $x \in E$ (определенных на том же пространстве Ω , что и меры P_μ), – был введен в [9]. Нас мотивировала роль, которую аналог этих мер играет в теории Ле Галя броуновских змей.

Обозначим через $\mathcal{Z}_x$ класс всех функций вида

$$Z = \sum_1^n \langle f_i, X_{O_i} \rangle, \quad (3.4)$$

где $O_1, \dots, O_n$ – конечное семейство окрестностей x и $f_1, \dots, f_n \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^d)$. По теореме 1.1 в [8] существует единственное семейство мер $\mathbb{N}_x$ со следующими свойствами.

(i) Для любого $Z \in \mathcal{Z}_x$ имеем

$$\mathbb{N}_x(1 - e^{-Z}) = -\ln P_x e^{-Z}. \quad (3.5)$$

(ii) Если $\overline{\Omega}$ – пересечение множеств $\{X_O = 0\}$ по всем окрестностям x , то $\mathbb{N}_x(\overline{\Omega}) = 0$.

3.5. Стохастические граничные значения и ранг. Предположим, что $u \in \mathcal{B}(E)$. Случайная величина Z называется стохастическим граничным значением u (мы пишем $Z = \text{SBV}(u)$), если

$$Z = \lim \langle u, X_{D_n} \rangle \quad P_x\text{-п.н. и } \mathbb{N}_x\text{-п.н.} \quad (3.6)$$

для всех $x \in E$ и для любой последовательности D_n , исчерпывающей E .⁵

Стохастические граничные значения существуют для всех $h \in \mathcal{H}$ и всех $u \in \mathcal{U}$, и если $Z_u = \text{SBV}(u)$, то

$$u(x) = \mathbb{N}_x(1 - e^{-Z_u}) = -\ln P_x e^{-Z_u}. \quad (3.7)$$

Для любой области E существует случайное замкнутое множество $\mathcal{R}_E$ со следующими свойствами.

(а) Для любого открытого множества $O \subset E$ и любого $x \in E$ мера X_O сосредоточена (P_x -п.н. и $\mathbb{N}_x$ -п.н.) на $\mathcal{R}_E$.

(б) Если (а) выполняется для случайного замкнутого множества F , то для любого $x \in E$ соотношение $\mathcal{R}_E \subset F$ выполняется P_x -п.н. и $\mathbb{N}_x$ -п.н.

Назовем $\mathcal{R}_E$ *рангом* X в E и обозначим через $\mathcal{R}$ ранг X в $\mathbb{R}^d$.

3.6. Вероятностное представление решения. Положим

$$Z_\nu = \text{SBV}(h_\nu). \quad (3.8)$$

Если $\nu \in \mathcal{N}_1$, то $Z_\nu = \text{SBV}(u_\nu)$ и

$$u_\nu(x) = -\ln P_x e^{-Z_\nu} = \mathbb{N}_x(1 - e^{-Z_\nu}). \quad (3.9)$$

⁵Мы говорим, что области D_n исчерпывают E , если $\overline{D}_n \subset D_{n+1}$ и если E является объединением всех D_n .

Теперь решение w_Γ можно представить формулой

$$w_\Gamma(x) = -\ln P_x(\mathcal{R}_E \cap \Gamma = \emptyset) = \mathbb{N}_x(\mathcal{R}_E \cap \Gamma \neq \emptyset), \quad (3.10)$$

и

$$\begin{aligned} (w_\Gamma \oplus u_\nu)(x) &= -\ln P_x\{\mathcal{R}_E \cap \Gamma = \emptyset, e^{-Z_\nu}\} \\ &= \mathbb{N}_x(\mathcal{R}_E \cap \Gamma \neq \emptyset) + \mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \cap \Gamma = \emptyset, 1 - e^{-Z_\nu}\}. \end{aligned} \quad (3.11)$$

§ 4. Соотношения между супердиффузиями и условными диффузиями

Эти соотношения (установленные в [5]) играют ключевую роль в следующем параграфе.⁶

Положим

$$\mathcal{E}_x(\nu) = \Pi_x \int_0^{\tau_E} \psi[h_\nu(\xi_t)] dt. \quad (4.1)$$

Если $\mathcal{E}_x(\nu) < \infty$ для некоторого $x \in E$, то $\nu \in \mathcal{N}_1$.

Справедливы следующие утверждения.

4.А. Пусть $Z_\nu = \text{SBV}(h)$ и $Z_u = \text{SBV}(u)$, где $\nu \in \mathcal{N}_1$ и $u \in \mathcal{U}$. Тогда

$$P_x Z_\nu e^{-Z_u} = e^{-u(x)} \Pi_x^\nu e^{-\Phi(u)} \quad (4.2)$$

и

$$\mathbb{N}_x Z_\nu e^{-Z_u} = \Pi_x^\nu e^{-\Phi(u)}, \quad (4.3)$$

где

$$\Phi(u) = \int_0^{\tau_E} \psi'[u(\xi_s)] ds. \quad (4.4)$$

4.Б. Предположим, что D — гладкое открытое подмножество E . Обозначим через Λ замыкание $\partial D \cap E$ и положим $L = \partial D \setminus \Lambda$ и $D^* = D \cup L$. Пусть

$$\begin{aligned} w_\Lambda(x) &= \mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \cap \Lambda \neq \emptyset\}, \\ v_s(x) &= w_\Lambda(x) + \mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \cap \Lambda = \emptyset, 1 - e^{-sZ_\nu}\}. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Если $x \in D$, а ν — такая конечная мера на $\partial D \cap \partial E$, что $\mathcal{E}_x(\nu) < \infty$, то

$$\mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \subset D^*, Z_\nu\} = \Pi_x^\nu\{A, e^{-\Phi(w_\Lambda)}\}, \quad (4.6)$$

$$\mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \subset D^*, Z_\nu \neq 0\} = \int_0^\infty \Pi_x^\nu\{A, e^{-\Phi(v_s)}\} ds, \quad (4.7)$$

⁶ Формула (4.2) была доказана ранее в [2]. Аналог равенства (4.3) для броуновской змеи можно найти в [18].

где Φ определена формулой (4.4) и

$$A = \{\tau_E = \tau_D\} = \{\xi_t \in D \text{ для всех } t < \tau_E\}. \quad (4.8)$$

§ 5. Все решения уравнения (1.2) σ -умеренны

5.1. Пусть $u \in \mathcal{U}$ и $\text{Tr}(u) = (\Gamma, \nu)$. Доказательство того, что u σ -умеренно, состоит из трех частей:

- A. $u \geq u_\Gamma \oplus u_\nu$,
- B. $u \leq w_\Gamma \oplus u_\nu$,
- C. $u_\Gamma = w_\Gamma$.

Из A–C следует, что $u = u_\Gamma \oplus u_\nu = w_\Gamma \oplus u_\nu$, и поэтому u является σ -умеренным решением.

Мы уже сформулировали утверждение A как часть теории следа, охватывающей общее уравнение (1.1) (см. (2.7)). Часть B была доказана Мселати [18] для уравнения $\Delta u = u^2$. В [4] это утверждение было распространено на случай уравнения (1.2).

Доказательство утверждения C можно свести к доказательству того факта, что $w_K \leq C u_K$ для замкнутого множества K (см. [18; предложения 3.0.1 и 3.0.2]). Чтобы доказать эту оценку, мы используем новое неравенство для супердиффузии и неравенства для w_K и u_K в терминах пуассоновых емкостей.⁷

(Доказательства утверждений B и C зависят от неравенства (5.6), которое в настоящее время установлено для областей класса C^4 . Если доказать неравенство (5.6) для областей класса $C^{2,\lambda}$, то B и C будут автоматически доказаны для этих областей.)

5.2. Новое неравенство для супердиффузии. Следующий результат получен в [5] из утверждений 4.A и 4.B.

Предположим, что $D \subset E$ – ограниченные гладкие открытые множества и Λ, L, D^* – множества, введенные в 4.B. Пусть ν – конечная мера на $\partial D \cap \partial E$, $x \in E$ и $\mathcal{E}_x(\nu) < \infty$. Тогда

$$\mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \subset D^* = \emptyset, Z_\nu \neq 0\} \geq C(\alpha)[\mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \subset D^*, Z_\nu\}]^{\alpha/(\alpha-1)} \mathcal{E}_x(\nu)^{-1/(\alpha-1)}, \quad (5.1)$$

где $C(\alpha) = (\alpha - 1)^{-1} \Gamma(\alpha - 1)$.⁸

5.3. Пуассоновы емкости. Для любого борелевского подмножества B в ∂E положим

$$\text{Cap}_x(B) = \sup_{\nu \in \mathcal{P}(B)} \mathcal{E}_x(\nu)^{-1}. \quad (5.2)$$

Эта формула сопоставляет емкость Шоке каждой точке $x \in E$. Мы также вводим емкость

$$\text{Cap}(B) = \sup_{\nu \in \mathcal{P}(B)} \mathcal{E}(\nu)^{-1}, \quad (5.3)$$

⁷М. Маркус и Л. Верон анонсировали в [17], что равенство $u_K = w_K$ может быть доказано при $\alpha > 1$ другим, чисто аналитическим способом. Доказательство еще не опубликовано, но некоторые указания приведены в [17].

⁸ Γ – гамма-функция Эйлера.

где

$$\mathcal{E}(\nu) = \int_E \rho(x) h_\nu(x)^\alpha dx. \quad (5.4)$$

(Здесь $\rho(x)$ означает расстояние от x до границы ∂E .)

Обозначим через $d(x, K)$ расстояние от x до K и через $\text{diam}(K)$ диаметр K . Положим

$$E_\kappa(K) = \{x \in E : d(x, K) \geq \kappa \text{diam}(K)\}, \quad \varphi(x, K) = \rho(x) d(x, K)^{-d}.$$

Следующее соотношение между Cap и Cap_x было доказано в [8].

Существует такая постоянная⁹ C_κ , что для любого замкнутого множества $K \subset \partial E$ имеем

$$\text{Cap}(K) \leq C_\kappa \varphi(x, K) \text{Cap}_x(K) \quad \text{для всех } x \in E_\kappa(K). \quad (5.5)$$

5.4. Верхняя граница для w_K . Предположим, что $d \geq 4$.¹⁰ В [12] доказано, что существует постоянная C , удовлетворяющая условию

$$w_K(x) \leq C \varphi(x, K) \text{Cap}(K)^{1/(\alpha-1)} \quad (5.6)$$

для любого K и для любого $x \in E$. Из (5.6) и (5.5) следует, что для любого $\kappa > 0$ существует такая постоянная C_κ , что для любого компактного множества $K \subset \partial E$ и любого $x \in E_\kappa$ имеем

$$w_K(x) \leq C_\kappa [\varphi(x, K)^\alpha \text{Cap}_x(K)]^{1/(\alpha-1)}. \quad (5.7)$$

5.5. Нижние оценки для u_K . По определению u_K (см. (2.3)), $u_K \geq u_\nu$ для любой меры $\nu \in \mathcal{N}_1$, сосредоточенной на K . Так как $t\nu \in \mathcal{N}_1$ для всех $t > 0$, то

$$u_K \geq u_{\infty\nu} = \lim_{t \rightarrow \infty} u_{t\nu}.$$

Из формулы (3.7) следует, что $u_{\infty\nu} = \mathbb{N}_x\{Z_\nu \neq 0\}$. Следуя Мселати, мы заменим эту функцию меньшей функцией

$$\mathbb{N}_x\{\mathcal{R} \in \mathcal{B}_n(x, K), Z_\nu \neq 0\}, \quad (5.8)$$

где $B_n(x, K) = \{z : |x - z| < nd(x, K)\}$. Основное неравенство (5.1) позволяет заменить оценку функции (5.8) оценкой величины $\mathbb{N}_x\{\mathcal{R} \in \mathcal{B}_n(x, K), Z_\nu\}$. Мы сначала установим следующее утверждение.

Существуют такие постоянные n и $C_\kappa > 0$, что

$$\mathbb{N}_x\{\mathcal{R} \subset B_n(x, K), Z_\nu\} \geq C_\kappa \varphi(x, K) \quad (5.9)$$

⁹ $C_\kappa = 1 \vee \kappa^\gamma$, где $\gamma = 0 \vee (d\alpha - d - \alpha - 1)$. Если $\alpha < (d+1)/(d-1)$, то $\gamma = 0$, и (5.5) выполняется при $C_\kappa = 1$ для всех $x \in E$.

¹⁰Случай $d < 4$ может быть изучен отдельно. Здесь мы его не рассматриваем.

для любого замкнутого подмножества K в ∂E и для любых $x \in E_\kappa(K)$ и всех $\nu \in \mathcal{P}(K)$ таких, что $\mathcal{E}_x(\nu) < \infty$.

При $\alpha = 2$ это утверждение следует из леммы 3.2.2 в [18]. Рассуждения Мселати можно модифицировать так, чтобы покрыть случай более общего уравнения (1.2).

Используя (5.1), (5.9) и (5.2), мы можем доказать следующее утверждение.

Существуют постоянные $C_\kappa > 0$ и n со следующим свойством: для любого замкнутого $K \subset \partial E$ и любого $x \in E_\kappa(K)$ выполняется неравенство

$$\mathbb{N}_x\{\mathcal{R} \subset B_{2n}(x, K), Z_\nu \neq 0\} \geq C_\kappa [\varphi(x, K)^\alpha \text{Cap}_x(K)]^{1/(\alpha-1)} \quad (5.10)$$

для некоторой меры $\nu \in \mathcal{P}(K)$, удовлетворяющей условию $\mathcal{E}_x(\nu) < \infty$.

5.6. Из (5.7) и (5.10) вытекает следующее утверждение.

Существуют такие постоянные $C_\kappa > 0$ и n , что для любого замкнутого множества $K \subset \partial E$ и любого $x \in E_\kappa(K)$ выполняется неравенство

$$w_K(x) \leq C_\kappa \mathbb{N}_x\{\mathcal{R}_E \subset B_{2n}(x, K), Z_\nu \neq 0\} \quad (5.11)$$

для некоторой меры $\nu \in \mathcal{P}(K)$, удовлетворяющей условию $\mathcal{E}_x(\nu) < \infty$.

Используя рассуждения статьи [18] (с. 93–95), мы получаем отсюда, что $w_K \leq C u_K$.

§ 6. Исторические и библиографические замечания

След $\text{Tr}(u)$ был введен в [11] и [7] под названием тонкого следа. Было предложено называть вариант следа, который рассматривался в литературе ранее, грубым следом. (В монографии [3] грубый след изучается в главе 10, а тонкий след вводится и изучается в главе 11.) В субкритическом случае $1 < d < \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$ грубый след совпадает с тонким следом и однозначно определяет решение уравнения (1.2). Как показал Ле Галь, это не так в суперкритическом случае $d \geq \frac{\alpha+1}{\alpha-1}$.

В пионерской работе [10] А. Гмира и Л. Верон доказали, что в субкритическом случае обобщенная задача Дирихле

$$\begin{aligned} \Delta u &= u^\alpha \quad \text{в } E, \\ u &= \mu \quad \text{на } \partial E \end{aligned} \quad (6.1)$$

имеет единственное решение для любой конечной меры μ . (В наших обозначениях это решение есть u_μ .)

Программа исследования $\mathcal{U}$ с помощью супердиффузии была инициирована в [1]. В частности, автор высказал гипотезу, что для любого α , $1 < \alpha \leq 2$, и любого d задача (1.2) имеет решение в том и только том случае, когда $\mu(\Gamma) = 0$ для всякого Γ , не пересекающегося почти наверное с рангом супердиффузии.¹¹ (Гипотеза была доказана сначала Ле Галем в случае $\alpha = 2$ и затем для всех $1 < \alpha \leq 2$ Дынкиным и Кузнецовым.)

¹¹Ограничение $\alpha \leq 2$ необходимо, поскольку соответствующая супердиффузия существует только в этой области.

Классификация всех положительных решений уравнения $\Delta u = u^2$ в единичном диске $E = \{x \in \mathbb{R}^2 : |x| < 1\}$ была анонсирована Ле Галем в [13]. (Это – тоже субкритический случай.) Этот результат был доказан и распространен на широкий класс гладких плоских областей в [14]. Вместо супердиффузии Ле Галь использовал свой собственное изобретение – процесс со значениями в пространстве путей, так называемую броуновскую змею. Он установил взаимно однозначное соответствие между $\mathcal{U}$ и парами (Γ, ν) , где Γ – замкнутое подмножество ∂E , а ν – радонова мера на $\partial E \setminus \Gamma$.

Дынкин и Кузнецов [6] распространили результат Ле Галя на случай уравнения $Lu = u^\alpha$, $1 < \alpha \leq 2$. Они ввели грубый граничный след для решений этого уравнения, описали все возможные значения следа и представили максимальное решение с данным следом в терминах супердиффузии.

Маркус и Верон [15], [16] исследовали грубый след решений чисто аналитическими средствами. Они распространили теорию на случай $\alpha > 2$ и доказали, что грубый след однозначно определяет решение в субкритическом случае.

Теория тонкого следа, развитая в [7], привела к классификации всех σ -умеренных решений. Диссертация Мселати [18] завершила эту классификацию для уравнения $\Delta u = u^2$; там было доказано, что в рассматриваемом случае все решения являются σ -умеренными. Результаты [5], представленные в § 5, распространяют этот вывод на случай более общего уравнения (1.2).

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] E. B. Dynkin. A probabilistic approach to one class of nonlinear differential equations // Probab. Theory Related Fields. 1991. V. 89. № 1. P. 89–115.
- [2] E. B. Dynkin. A new relation between diffusions and superdiffusions with applications to the equation $Lu = u^\alpha$ // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1997. V. 325. № 4. P. 439–444.
- [3] E. B. Dynkin. Diffusions, Superdiffusions and Partial Differential Equations. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2002.
- [4] E. B. Dynkin. On upper bounds for positive solutions of semilinear equations // J. Funct. Anal. (to appear).
- [5] E. B. Dynkin. New relations between diffusions and superdiffusions and their applications to differential equations // Math. Res. Lett., submitted.
- [6] E. B. Dynkin, S. E. Kuznetsov. Trace on the boundary for solutions of nonlinear differential equations // Trans. Amer. Math. Soc. 1998. V. 350. № 11. P. 4499–4519.
- [7] E. B. Dynkin, S. E. Kuznetsov. Fine topology and fine trace on the boundary associated with a class of semilinear differential equations // Comm. Pure Appl. Math. 1998. V. 51. № 8. P. 897–936.
- [8] E. B. Dynkin, S. E. Kuznetsov. Poisson capacities // Math. Res. Lett. 2003. V. 10. № 1. P. 85–95.
- [9] E. B. Dynkin, S. E. Kuznetsov. N-measures for branching exit Markov systems and their applications to differential equations // Probab. Theory Related Fields, submitted.
- [10] A. Gmira, L. Véron. Boundary singularities of solutions of some nonlinear elliptic equations // Duke Math. J. 1991. V. 64. № 2. P. 271–324.
- [11] S. E. Kuznetsov. σ -moderate solutions of $Lu = u^\alpha$ and fine trace on the boundary // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1998. V. 326. № 10. P. 1189–1194.
- [12] S. E. Kuznetsov. An upper bound for positive solutions of the equation $\Delta u = u^\alpha$, in preparation.
- [13] J.-F. Le Gall. Les solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans le disque unité // C. R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 1993. V. 317. № 9. P. 873–878.

- [14] J.-F. Le Gall. A probabilistic Poisson representation for positive solutions of $\Delta u = u^2$ in a planar domain // Comm. Pure Appl. Math. 1997. V. 50. № 1. P. 69–103.
- [15] M. Marcus, L. Véron. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: The subcritical case // Arch. Rational Mech. Anal. 1998. V. 144. № 3. P. 201–231.
- [16] M. Marcus, L. Véron. The boundary trace of positive solutions of semilinear elliptic equations: The supercritical case // J. Math. Pures Appl. (9). 1998. V. 77. № 5. P. 481–524.
- [17] M. Marcus, L. Véron. Capacitary estimates of solutions of a class of nonlinear elliptic equations // C. R. Math. Acad. Sci. Paris. 2003. V. 336. № 11. P. 913–918.
- [18] B. Mselati. Classification et représentation probabiliste des solutions positives de $\Delta u = u^2$ dans un domaine // Thèse de Doctorat de l'Université Paris VI, 2002.

University, Ithaca, NY, USA
E-mail: ebd1@cornell.edu

Поступила в редакцию
09.09.2003