Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. Д. Мильман, Явления, возникающие в высоких размерностях, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 157–168

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm706>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:56:25

УДК 517.98+514

ЯВЛЕНИЯ, ВОЗНИКАЮЩИЕ В ВЫСОКИХ РАЗМЕРНОСТЯХ

В. Д. МИЛЬМАН

Мы обсуждаем некоторые общие свойства конечномерных, но очень высокой размерности нормированных пространств (или, что то же, выпуклых тел). Оказывается, эти объекты демонстрируют намного меньше разнообразия, чем априори мы могли ожидать. Затем мы анализируем некоторые асимптотические явления, которые управляют, по нашему мнению, асимптотическим поведением систем большой размерности.

Библиография: 30 названий.

СОДЕРЖАНИЕ

1. Введение	157
2. Симметризации	158
3. Универсальность, фазовый переход, порог и другие признаки высокой размерности	159
4. Связь со сложностью	162
5. Явления концентрации	164
6. Результаты рамсеевского типа, или понятие спектра/искажения	164
7. Полярность (QS-принцип, или принцип фактор-подпространства)	165
8. Заключение	167
Список литературы	167

1. Введение

В этой статье я попытаюсь описать основные принципы и явления, управляющие асимптотическим поведением нормированных пространств и выпуклых тел высокой размерности. Я полагаю, что те же принципы приложимы к любой системе с большим числом параметров, скажем, в асимптотической комбинаторике или теории сложности. Несколько примеров такой аналогии уже известны, и я укажу их. Конечно, это описание имеет предварительную форму, основанную на накопленном знании, и будет корректироваться и выверяться в будущем. Но я считаю, что мозаика фактов и результатов уже должна быть приведена в некоторый порядок.

Исследование частично поддержано Научным Фондом Израиля (грант 142/01).

Недавно было опубликовано несколько обзоров на эту тему (см. [5], [6], [23]), и я попытаюсь избежать повторений просто с помощью соответствующих ссылок. Конечно, иногда я не смогу избежать иллюстрирования некоторых принципов с помощью по крайней мере одного или двух примеров, но я буду очень краток. Несколько книг было написано в конце 80-х годов: [25], [29], [30]. Они очень хорошо отражают состояние теории того времени, и я рекомендую их для углубленного чтения.

Для начала рассмотрим несколько недавних неожиданных результатов, указывающих на интересные явления, которые ожидают нас в этой теории.

2. Симметризации

Для некоторых классических симметризаций мы выясним, сколько элементарных шагов нужно сделать для аппроксимации эллипсоида, исходя из произвольного выпуклого тела $K \subset \mathbb{R}^n$. Мы проанализируем две процедуры симметризации: симметризацию Штейнера (определение см., например, в [14]) и симметризацию Минковского, которая также называется симметризацией Бляшке. В обоих случаях каждый элементарный шаг состоит в выборе гиперплоскости h в $\mathbb{R}^n$. Мы сейчас определим менее известную симметризацию Минковского. Рассмотрим отражение $r_h K$ тела K относительно h ; тогда элементарный шаг этой симметризации есть $S_h K := \frac{K + r_h K}{2}$, где “+” означает сумму Минковского для множеств. Элементарный шаг симметризации Штейнера, связанный с гиперплоскостью h , обозначим через $St_h K$.

Зафиксируем некоторое $c > 1$. Каково наименьшее N , удовлетворяющее условию, что для любого $K \subset \mathbb{R}^n$ можно найти такие $\{h_i\}_1^N$, что существует эллипсоид $\mathcal{E}$, для которого

$$\mathcal{E} \subset \prod_{h=1}^N St_{h_i} K := K_N \subset c \cdot \mathcal{E} ? \quad (1)$$

Вот краткая история этого вопроса:

Хадвигер (около 1955 г.) оценил N сверху величиной $\sim (c_1 \cdot n)^{n/2}$.

Бургейн, Линденштраус и Мильман (около 1988 г.) осуществили очень серьезное улучшение до $N \lesssim c_1 n \ln n$ (для некоторого $c \sim 3$). Однако на самом деле множитель “ $\ln$ ” не нужен, и ответ имеет вид $N \leq \frac{3}{2}n$ (Клартаг–Мильман [14]).

На самом деле для любого $\varepsilon > 0$ существует такая постоянная $c(\varepsilon)$, зависящая от ε и заменяющая величину c в (1), для которой

$$N \leq (1 + \varepsilon)n$$

(и для некоторых K необходимо не меньше чем $n - c_1 \ln n$ шагов). Если $\mathcal{D}$ – стандартный евклидов шар, то дополнительные симметризации в количестве $n - 1$ шага превращают $\mathcal{E}$ в $r\mathcal{D}$, и в целом $N \leq (2 + \varepsilon)n$ шагов достаточны для приближения евклидова шара. (Заметим, что ответ носит изоморфный характер. Мы не приближаем евклидов шар “почти изометрически”, а только с точностью до постоянной, не зависящей ни от размерности, ни от тела K . Такие результаты об изоморфизме в геометрии на самом деле имеют смысл как *асимптотические* результаты, представляющие интерес в больших размерностях.)

В случае симметризации Минковского наилучший известный результат в ответе на тот же вопрос вплоть до 1987 г. выглядел так [3]: для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое

$c(\varepsilon)$, что можно найти набор $\{h_i\}_1^N$ с $N \leq \frac{1}{2}n \ln n + c(\varepsilon)n$, удовлетворяющий условию (для некоторого $r > 0$)

$$r\mathcal{D} \subset \prod_{i=1}^N S_{h_i} K \subset (1 + \varepsilon)r\mathcal{D} \quad (2)$$

(и случайный выбор h_i дает соотношение (2) с высокой вероятностью). Клартаг позже показал [12], что для некоторого K и при случайном выборе гиперплоскостей этот ответ является наилучшим возможным (с точностью до постоянного множителя), и дал “изоморфную формулу” для N для любого тела K .

Однако наилучший выбор гиперплоскостей оказался другим, и Клартаг показал [13], что наименьшее N всегда не превосходит $5n(!)$; это условие выполняется при $\varepsilon \sim c \sqrt{\frac{\ln \ln n}{\ln n}}$. Таким образом, в этом случае мы видим изоморфный ответ, который является “асимптотически изометрическим” в больших размерностях n .

3. Универсальность, фазовый переход, порог и другие признаки высокой размерности

Мы продолжим накопление примеров.

За. Поведение типа фазового перехода: “локальный” пример. Рассмотрим подмножество $K \subset \mathbb{R}^n$. Пусть $|\cdot|$ – евклидова норма в $\mathbb{R}^n$. Обозначим через D единичный евклидов шар, $D(E) = D \cap E$ для подпространства $E \hookrightarrow \mathbb{R}^n$. Кроме того, пусть $d(K)$ – диаметр K и $P_E K$ – ортогональная проекция K на подпространство E . Пусть $\mathcal{D}_\ell(K) := \mathbb{E}(d(P_E K) \mid \dim E = \ell)$. (Таким образом, $\mathcal{D}_\ell(K)$ – средний диаметр ортогональной проекции по отношению к мере Хаара на грассманиане $G_{n,\ell}$.) Нам также нужна средняя ширина K ,

$$\mathcal{D}_1(K) := w(K) = \int_{S^{n-1}} w(K, u) d\sigma(u),$$

где $w(K, u)$ – ширина в направлении $u \in S^{n-1}$,

$$w(K, u) = \sup\{(u, x) \mid x \in K\} - \inf\{(u, x) \mid x \in K\}.$$

Пусть

$$k^* = n \left(\frac{w(K)}{d(K)} \right)^2.$$

Тогда существуют такие $c > 0$ и C , что для любого n и любого множества $K \subset \mathbb{R}^n$ имеем

$$c \sqrt{\frac{\ell}{n}} d(K) \leq \mathcal{D}_\ell(K) \leq C \sqrt{\frac{\ell}{n}} d(K)$$

при $k^* \leq \ell \leq n$ и

$$cw(K) \leq \mathcal{D}_\ell(K) \leq Cw(K)$$

при $1 \leq \ell \leq k^*$. Отметим стабилизацию функции $\mathcal{D}_\ell(K)$ при критическом значении k^* и единую форму поведения для всего семейства множеств в пространствах высокой размерности (см. [23] по поводу ссылок).

Дополнительная информация. Единственная причина стабилизации для малых ℓ состоит в том, что “случайная” проекция $P_E K$ при $\dim E \lesssim \varepsilon^2 k^*$ есть ε -сеть евклидова шара (радиуса $w(K)/2$). Если K выпукло, $K = -K$ и $\|x\|_K$ – норма, отвечающая единичному шару K , то для случайного подпространства E размерности $\lesssim \varepsilon^2 k^*$ само множество $P_E K$ является почти евклидовым шаром,

$$(1 - \varepsilon) \frac{w(K)}{2} \mathcal{D}(E) \subseteq P_E K \subseteq (1 + \varepsilon) \frac{w(K)}{2} \mathcal{D}(E).$$

В этом случае $w(K, u) = 2(\|u\|_K)^* := 2\|u\|_{K^\circ}$, где K° – поляр K , и $w(K) := 2M^* = 2 \int_{S^{n-1}} \|x\|_{K^\circ} d\sigma(x)$, где $\sigma(x)$ – инвариантная относительно вращений вероятностная мера на S^{n-1} .

3b. Соответствующие глобальные задачи. Сейчас мы собираемся аппроксимировать евклидов шар $r\mathcal{D}$, усредняя по вращениям K : $K_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t u_i K$, $u_i \in O(n)$. Мы достигнем этого, изучая затухание диаметра.

Мы выразим результаты на языке функционального анализа.

Пусть $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, |\cdot|)$, $b := \|\text{Id}: \ell_2^n \rightarrow X\|$ и $M = \int_{S^{n-1}} \|x\| d\sigma(x)$. Рассмотрим новую усредняющую норму

$$\|x\|_t = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \|u_i x\|, \quad u_i \in O(n),$$

и пространство $X_t = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_t, |\cdot|)$. В дальнейшем мы используем обозначение $a \sim b$, если существуют две универсальные постоянные, скажем, $c > 0$ и $C > 0$, удовлетворяющие условию $c \cdot b \leq a \leq C \cdot b$. Тогда, согласно [26], с очень высокой вероятностью (по выбору u_i) имеем

$$\|\text{Id}: \ell_2^n \rightarrow X_t\| \sim \frac{1}{\sqrt{t}} \|\text{Id}: \ell_2^n \rightarrow X\| \quad \text{при} \quad t < \left(\frac{b}{M}\right)^2 = \left(\sup_{|x|=1} \frac{\|x\|}{\mathbb{E}_{x \in S^{n-1}} \|x\|}\right)^2 := t_0$$

и $\|x\|_t \sim M \cdot |x|$ при $t \gtrsim t_0$.

(Чтобы связать геометрический язык суммы множеств и аналитический язык сумм норм, заметим, что $\|x\|_{K_1+K_2}^* = \|x\|_{K_1}^* + \|x\|_{K_2}^*$, где $\|x\|_T$ обозначает норму с единичным шаром T , т.е. функционал Минковского выпуклого множества T .)

Мы снова видим фазовый переход при t_0 , стабилизацию после этого критического значения и причину для стабилизации: усредняющая норма вблизи t_0 оказывается евклидовой с высокой вероятностью.

Первые асимптотические явления. Рассмотренные выше примеры указывают на следующие явления, сопровождающие многомерные процессы.

- (а) “Изоморфный” фазовый переход. Я подчеркиваю, что это явление является изоморфным аналогом того, что хорошо известно в статистической физике в точной “изометрической” форме; наши утверждения справедливы с точностью до некоторых универсальных множителей, но они применимы к любым (выпуклым) множествам, без какой-либо особой симметрии или структуры. Кроме того, пока что мы наблюдали в некотором смысле “элементарные” переходы:

только одну точку фазового перехода с постоянным поведением по одну сторону от нее.

- (б) *Постоянное поведение* (в “конце” процесса) *соответствует стабилизации по (только) одной причине: достигается “максимальная” симметрия.*
- (в) Кроме того, в “глобальных” процессах, т.е. при изучении изменений во всем пространстве, а не в подпространствах или проекциях, “наилучшая” *возможность*, которую мы ищем, *приблизительно состоит в “случайном” выборе.* (Однако есть некоторая свобода в определении правильного понятия случайности, которое может меняться от задачи к задаче.)

3с. Более сложный фазовый переход. Поведение в следующем примере фазового перехода более сложно, с “постоянным” поведением другой природы (см. [16]).

Пусть снова $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|, |\cdot|)$. При $q \geq 1$ положим

$$M_q = \left(\int_{S^{n-1}} \|x\|^q d\sigma(x) \right)^{1/q}$$

и рассмотрим L_q -среднее от повернутых норм,

$$\|x\|_{q;t} = \left(\frac{1}{t} \sum_1^t \|u_i x\|^q \right)^{1/q}, \quad u_i \in O(n)$$

(наши обозначения игнорируют зависимость от операторов $\{u_i\}$). Тогда

$$\begin{cases} M_q \sim M_1 & \text{при } 1 \leq q \leq k(X) = n(M_1/b)^2, \\ M_q \sim b\sqrt{q/n} & \text{при } k(X) \leq q \leq n, \\ M_q \sim b & \text{при } q > n. \end{cases} \quad (M_q)$$

Таким образом, мы видим два (изоморфных) фазовых перехода: $q = k(X)$ и $q = n$.

Пусть $t_q := t_q(X)$ – *наименьшее* из чисел t , для которых существуют $u_i \in O(n)$, удовлетворяющие условию

$$\frac{1}{2} M_q |x| \leq \left(\frac{1}{t} \sum_1^t \|u_i x\|^q \right)^{1/q} \leq 2 M_q |x|$$

для всех $x \in \mathbb{R}^n$. Тогда

- (i) t_q – примерно те же, что и для случайного выбора величин u_i ,
- (ii) $t_q \sim t_1$ при $1 \leq q \leq 2$,
 $t_q^{2/q} \sim t_1 (M_1/M_q)^2$ при $q \geq 2$.

Это выглядит так, как будто у нас есть один фазовый переход, $q = 2$. Но, вставляя (M_q) внутрь формулы, мы получаем другой фазовый переход при $q = k(X)$. Таким образом, в целом наш процесс имеет два фазовых перехода для t_q на наиболее интересном интервале $1 < q < n$.

Мы можем подвести итог **дополнительным явлениям**.

- а') Более сложные процессы с двумя (или более) фазовыми переходами являются суперпозициями “элементарных”.
- б') Постоянное поведение (но в “начале” процесса) соответствует инерции; в поведении M_q это – явление концентрации, а в случае t_q (при $q = 2$) причина явления состоит в овыпуклении: неравенство Хинчина преобразует L_p -средние в $L_{p/2}$ -средние, которые при $1 \leq p \leq 2$ ведут себя как и в L_1 по причине отсутствия выпуклости (т.е. как в случае $p = 2$).

На самом деле этот тип поведения, подобного фазовому переходу, наблюдался давно (но не распознавался нами). “Простейший” известный нам (с 1976 г. [4]) пример – теорема типа Дворецкого для ℓ_p^n -пространств:

$$k(\ell_p^n) \sim \begin{cases} n, & 0 < p \leq 2, \\ pn^{2/p}, & 2 < p \leq \ln n \end{cases}$$

(и, конечно, $\ell_{\ln n}^n \simeq \ell_\infty^n$). Здесь $k(\ell_p^n)$ обозначает наибольшую размерность k , для которой ℓ_p^n содержит 2-изоморфную копию пространства ℓ_2^k .

3d. Порог (в задачах аппроксимации). Пусть $x_i \in S^{n-1}$ и $I_i = [-x_i, x_i]$ – интервал. Аппроксимируем евклидов шар $r\mathcal{D}$ (некоторого радиуса $r \sim 1/\sqrt{n}$) с помощью $K_N = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N I_i$. Мы будем измерять различие между двумя центрально симметричными выпуклыми телами K и T геометрическим (мультипликативным) расстоянием $d_g(K, T) = \min\{a \cdot b \mid K \subset bT, T \subset aK\}$. Мы также будем пользоваться ниже расстоянием Банаха–Мазура $d(K, T) = \inf\{d_g(uK, T) \mid u \in GL_n\}$. Тогда, следуя Кашину [11],

$$\inf_{\{x_i\}} d_g(K_N, \mathcal{D}) = \begin{cases} \infty, & N < n, \\ \sqrt{n}, & N = n, \\ C(\lambda), & N = \lambda n, \lambda > 1. \end{cases}$$

Кроме того (при $\lambda < 2$), согласно Глускину [7],

$$C(\lambda) \sim \min \left\{ \sqrt{n}, \sqrt{\left(\ln \frac{1}{\lambda - 1} \right) / (\lambda - 1)} \right\}.$$

Мы видим четкий *порог* в “ n ”.

Аналогичная картина может наблюдаться для различных выпуклых тел K в задаче аппроксимации $\mathcal{D}$ путем усреднения множеств $u_i K$, $u_i \in O(n)$. При замене изучаемого параметра “уменьшения диаметра типичного среднего K_N ” параметром “расстояния до евклидова шара” этого среднего наблюдаемое поведение типа “фазовый переход” часто меняется на поведение типа “порог”. Было бы интересно доказать наличие аналогичного перехода от поведения порогового типа к поведению типа фазового перехода в задачах асимптотической комбинаторики, которые обычно имеют дело с порогами.

4. Связь со сложностью

Конечно, теория сложности – другая область, в которой асимптотическое поведение многопараметрических систем находится сейчас в центре внимания. Здесь я хотел

бы показать, как идеология сложности приводит к чрезвычайно интересным гипотезам в многомерной выпуклости и асимптотическом геометрическом анализе. Дадим пример такого влияния.

Схема работает следующим образом: фиксируем выпуклое множество K (скажем, многогранник $K = \text{conv}\{\pm e_i\}_1^n$). Пусть $u \in GL_n$ – некоторый (неизвестный) оператор. Пусть T – такое (неизвестное) выпуклое тело, что $d(T, D) \leq 10$. Наконец, пусть

$$K_0 = \begin{cases} \text{либо } uK, \\ \text{либо } T. \end{cases}$$

Выберем (скажем, случайно) набор $\{x_i \in K_0\}_1^N$. Пусть N – полином от размерности n . Какой признак можно применить к $\{x_i\}_1^N$, чтобы отличить случай “ uK ” от случая “ T ”? Можно ли отличить K (представленное в виде uK) от слегка искаженного эллипсоида T ?

Интуиция, связанная с кругом идей сложности, подсказывает, что это невозможно в более высокой шкале (относительно размерности), чем логарифмическая. Например, можно привести пример теста на сложность, который линеен по размерности и который показывает, что расстояние от куба, т.е. шара в ℓ_∞^n , до евклидова пространства не меньше $\sqrt{\ln n}$. Однако истинное расстояние равно $\sqrt{n}$.

Конечно, это не “отрицательная” гипотеза, – напротив, она очень “положительна”. На самом деле она означает следующее.

ГИПОТЕЗА. Любой признак полиномиальной (по размерности) вычислительной сложности, относящийся ко всем выпуклым телам K , дает, с точностью до некоторого логарифмического множителя, тот же ответ, что и для некоторого эллипсоида.

(Уровень неточности в формулировке этой гипотезы тоже связан с влиянием теории сложности.)

Чтобы показать, что идеи такого рода могут быть очень полезны, мы сформулируем недавно доказанную теорему, показывающую, что некоторый признак, предназначенный отличать некоторые пространства от евклидова пространства, на самом деле их не отличает.

ТЕОРЕМА (Глускин–Мильман [8]). *Существует такое $c > 0$, что для любого n и любого $X = (\mathbb{R}^n, \|\cdot\|_K)$ случайные независимые одинаково равномерно распределенные в K величины $\{x_i \in K\}_{i=1}^n$ удовлетворяют неравенству*

$$\text{Ave}_\pm \left\| \sum_1^n \pm \lambda_i x_i \right\| \geq c \sqrt{\sum_i^n |\lambda_i|^2}$$

с вероятностью, экспоненциально близкой к 1, для любых $\lambda_i \in \mathbb{R}$, $i = 1, \dots, n$, т.е. любое конечномерное нормированное пространство имеет “случайный” тип 2.

5. Явления концентрации

“Понятие концентрации” является понятием, относящимся к поведению больших систем, и, грубо говоря, означает, что любая достаточно хорошая (в смысле “гладкости”) функция слишком многих переменных на самом деле вырождается в постоянную. Или, более точно, мы не в состоянии проверить, что эта функция не является почти постоянной. Это может рассматриваться как параллельное наблюдение к так называемому принципу “самоусреднения” в статистической физике.

На самом деле, похоже, что должны иметь место более общий результат. Во многих предыдущих примерах мы наблюдали явление “самооформления”, – скажем, можно рассматривать таким образом пример в п. 3b: очень небольшое число вращений “формирует” приблизительно евклидов шар для любой начальной “формы” K . На самом деле, гораздо более легкое “вмешательство” переводит любое выпуклое тело K в почти эллипсоид. (См. также новый пример такого явления в [24].)

Это явление привело к полному перевороту в нашей интуиции, относящейся к результатам в высоких размерностях. Вместо хаотического разброса с ростом размерности, который подсказывала прошлая интуиция, мы наблюдаем хорошо организованные и простые образцы поведения.

Это соображение должно рассматриваться главным образом как (технический) инструмент. Однако на идеологическом уровне оно связывает анализ с геометрией, а геометрию с вероятностью и комбинаторикой. Оно позволяет распространить факты типа результатов об отклонениях на нелинейные задачи вместо рассматривавшихся ранее линейных и приводит во многих случаях к устранению традиционных вероятностных ограничений (вроде “независимости”, “мартингала” и т.д.). Мы теперь понимаем, что важность этих условий заключалась главным образом в том, чтобы обеспечить высокую размерность. Однако высокая размерность достаточна, чтобы получать результаты того же типа.

В комбинаторике, для специальных графов, свойство концентрации эквивалентно понятию “экспандеров”.

По этой теме имеется много обзоров и книг, и в прошлом я обсуждал их достаточно подробно. Поэтому я ограничусь лишь несколькими ссылками: [22], [15], [23], [10].

6. Результаты рамсеевского типа, или понятие спектра/искажения

Смысл этого понятия – в том, что достаточно хорошие функции почти постоянны на больших подструктурах. (Аналогичное явление мы наблюдаем при отображениях структур очень высокой размерности в структуры много меньшей размерности.) В дискретной (комбинаторной) постановке мы можем часто получить постоянное значение (и тем самым прийти к результатам рамсеевского типа), но это не так в анализе, где слово “почти” становится существенным и играет против понятия “хорошие отображения”. Первые статьи, в которых эта схема была реализована, – это [18]–[20]; основной пример, на котором реализуется эта идея, – знаменитая теорема Дворецкого. По поводу исторических связей см. [22]. Эти связи позже исследовал Громов [9]; по поводу совершенно недавнего поворота, имеющего бесконечномерный оттенок, см. [27], [28]. Имеется еще один ряд таких результатов – с одной стороны, дискретных, а с другой – изоморфных, и при этом в духе понятия спектра, см. [2], [1].

Однако в общем случае размер подструктур, на которых наше отображение почти постоянно, невелик, и даже очень мал (скажем, логарифмический по отношению к исходной размерности), если функции не являются хорошими липшицевыми функциями, и этот факт блокирует многие возможные приложения в анализе. (К моему удивлению, изоморфные дискретные примеры могут быть весьма отличными [1].)

И тогда другой мощный принцип принимает вызов.

7. Полярность

(QS-принцип, или принцип фактор-подпространства)

Поскольку понятие “полярности” использует определенные структуры типа выпуклости, этот принцип хорошо развит только при некоторых предположениях выпуклости; однако, на самом деле, достаточны уже весьма слабые условия типа выпуклости.

Следующий пример поможет объяснить, что я имею в виду. Вернемся к задаче аппроксимации евклидовой нормы:

$$|x| \sim \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t \|u_i x\|_K, \quad u_i \in O(n).$$

Даже если мы используем большее семейство, $u_i \in GL_n$, для некоторого K минимальное значение t может иметь величину $n/\ln n$.

Таким образом, мы не можем надеяться обойтись одним оператором u или, скажем, двумя: u_1, u_2 . Мы, однако, разрешим применение “двойственных” операций.

Тогда справедливо следующее утверждение.

Для любого n и любой нормы $\|\cdot\|$ в $\mathbb{R}^n$ найдутся два линейных отображения u_1, u_2 , которых достаточно для аппроксимации: для любого $x \in \mathbb{R}^n$ положим

$$\|x\| := \|x\| + \|u_1 x\|$$

и, переходя к дуальному пространству, рассмотрим новую норму $\|x\|^* + \|u_2 x\|^*$, которая уже C -эквивалентна евклидовой норме (C – универсальная постоянная).

Аналогичная картина возникает для любой пары дуальных операций.

Первый факт этого рода – следующая “теорема о подфакторе” [21].

Пусть $1/2 \leq \lambda < 1$ и X – n -мерное нормированное пространство. Тогда существуют такие подпространства $F \hookrightarrow E \hookrightarrow X$, что

$$k = \dim E/F \geq \lambda n, \quad \text{dist}(E/F, \ell_2^k) \leq c \frac{|\ln(1-\lambda)|}{1-\lambda}.$$

Недавно этот результат получил очень интересное развитие, которое доказывает наличие сходного явления в случае дискретного конечного метрического пространства [17]. В то же время между линейным и дискретным случаем имеются заметные различия. Мендель и Наор [17] заметили в дискретном случае странный фазовый

переход, которого мы не видели в линейном случае, и пока что неясно, имеет ли это явление соответствующий аналог в случае нормированных пространств.

Я приведу другой легко формулируемый пример, чтобы доказать влияние полярности на результаты “спектрального типа” в линейной постановке. Пусть $f \in C(S^{n-1})$, где $f > 0$ и 1-липшицева. Тогда для любого $\varepsilon > 0$ существует такое подпространство $E \hookrightarrow \mathbb{R}^n$, $k = \dim E$, $k \geq c\varepsilon^2 n / \ln(1/\varepsilon)$, где c – абсолютная постоянная, что колебание

$$\text{Osc}\{f \mid x \in S^{n-1} \cap E\} < \varepsilon$$

(такие подпространства образуют множество в $G_{n,k}$, мера которого экспоненциально близка к 1).

Однако важные семейства функций $\{f_n \in C(S^{n-1})\}$ НЕ имеют равномерно ограниченных липшицевых постоянных, которые часто, напротив, слишком быстро растут с ростом размерности.

Тогда применима другая схема. Продолжим $f > 0$ по однородности, $\widehat{f}(x) = |x|f(x/|x|)$ ($x \neq 0$). При $x \in E$, где E – подпространство в $\mathbb{R}^n$, положим

$$(q_E f)(x) = \inf\{\widehat{f}(z) \mid z = x + y, y \in E^\perp\}.$$

Теперь, при очень мягких условиях типа выпуклости на функцию $\widehat{f}$ (скажем, достаточно выпуклости функции $\widehat{f}$ или квазивыпуклости $\widehat{f}$ с постоянной квазивыпуклости C), мы можем сформулировать следующее утверждение.

Существует такой эллипсоид $\mathcal{E}$ (и евклидова структура, связанная с ним), что

$$\forall \lambda, 0 < \lambda < 1, \text{ и } \forall \mu, 0 < \mu < \lambda$$

[скажем, $\lambda = 1/2$, $\mu = 1/4$], и для “случайных” (относительно $\mathcal{E}$ -структуры) подпространств E , где $\dim E = [\lambda n]$ и $F \hookrightarrow E$, $\dim F = [\mu n]$, имеем

$$\text{Osc}\{(q_E f) \mid \mathcal{E} \cap F\} < C(\lambda; \mu),$$

причем постоянная зависит только от $\lambda < 1$ и $\mu < \lambda$ (но не зависит ни от размерности n , ни от функции f из выбранного класса).

Теперь для “случайного” подпространства F_ε с $\dim F_\varepsilon \sim (\varepsilon^2 \mu)n / \ln(1/\varepsilon)$ имеем

$$\text{Osc}\{(q_E f) \mid \mathcal{E} \cap F_\varepsilon\} < \varepsilon.$$

Заметим, что принадлежность таким классам означает некоторое условие гладкости глобального (а не локального) типа: звездные тела $K = \{x \mid \widehat{f}(x) \leq 1\}$ не должны иметь много иголок и не должны выглядеть, как еж.

8. Заключение

Я хотел бы в заключение высказать одно общее замечание о моей интуиции, относящейся к этому предмету.

Я рассматриваю системы высокой размерности так, как будто некоторые случайные среды за сценой “управляют” ими (и именно так я их и воспринимаю). Разные “реализации” конкретных объектов в таких средах могут выглядеть очень различными (как, скажем, две реализации броуновского движения выглядят различными). Но они обнаруживают одно и то же, почти тождественное статистическое поведение. И наша общая теория описывает образцы этого поведения.

Я благодарю Мириам Херцберг за редактирование английской версии этой статьи.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Y. Bartal, N. Linial, M. Mendel, A. Naor. On metric Ramsey-type phenomena // *Ann. of Math.* (to appear).
- [2] J. Bourgain, T. Figiel, V. Milman. On Hilbertian subsets of finite metric spaces // *Israel J. Math.* 1986. V. 55. №2. P. 147–152.
- [3] J. Bourgain, J. Lindenstrauss, V. D. Milman. Minkowski sums and symmetrizations // *Lecture Notes in Math.* 1988. V. 1317. P. 44–66.
- [4] T. Figiel, J. Lindenstrauss, V. D. Milman. The dimension of almost spherical sections of convex bodies // *Acta Math.* 1977. V. 139. № 1–2. P. 53–94.
- [5] A. A. Giannopoulos, V. D. Milman. Euclidean structure in finite dimensional normed spaces // *Handbook of the Geometry of Banach Spaces*. V. 1. Amsterdam: North-Holland, 2001. P. 707–779.
- [6] A. A. Giannopoulos, V. D. Milman. Asymptotic convex geometry: a short overview // *Different Faces of Geometry* / ed. S. K. Donaldson, Ya. Eliashberg, and M. Gromov. New York: Kluwer/Plenum, 2004. (International Mathematical Series (New York). V. 3.) (To appear.)
- [7] E. D. Gluskin. On the sum of intervals // *Lecture Notes in Math.* 2003. V. 1807. P. 122–130.
- [8] E. Gluskin, V. Milman. Randomizing properties of convex high-dimensional bodies and some geometric inequalities // *C. R. Math. Acad. Sci. Paris*. 2002. V. 334. № 10. P. 875–879.
- [9] M. Gromov. Filling Riemannian manifolds // *J. Differential Geom.* 1983. V. 18. № 1. P. 1–147.
- [10] M. Gromov. *Metric Structures for Riemannian and Non-Riemannian Spaces*. Based on the 1981 French original “Structures métriques des variétés Riemanniennes”. Boston: Birkhäuser, 1999 (with appendices by M. Katz, P. Pansu, and S. Semmes).
- [11] Б. С. Капшин. Поперечники некоторых конечномерных множеств и классов гладких функций // *Изв. АН СССР. Сер. матем.* 1977. Т. 41. № 2. С. 334–351.
- [12] B. Klartag. Remarks on Minkowski symmetrizations // *Lecture Notes in Math.* 2000. V. 1745. P. 109–117.
- [13] B. Klartag. $5n$ Minkowski symmetrizations suffice to arrive at an approximate Euclidean ball // *Ann. of Math.* (2). 2002. V. 156. № 3. P. 947–960.
- [14] B. Klartag, V. Milman. Isometric Steiner symmetrization // *Invent. Math.* 2003. V. 153. № 3. P. 463–485.
- [15] M. Ledoux. *Concentration of Measure Phenomenon*. Providence, RI: Amer. Math. Soc., 2001. (Math. Surveys Monogr. V. 89.)
- [16] A. E. Litvak, V. D. Milman, G. Schechtman. Averages of norms and quasi-norms // *Math. Ann.* 1998. V. 312. № 1. P. 95–124.
- [17] M. Mendel, A. Naor. Euclidean quotients of finite metric space // *Adv. Math.* (to appear).

- [18] В. Д. Мильман. Спектр ограниченных непрерывных функций, заданных на единичной сфере B -пространства // Функци. анализ и его прил. 1969. Т. 3. № 2. С. 67–79.
- [19] В. Д. Мильман. Новое доказательство теоремы А. Дворецкого о сечениях выпуклых тел // Функци. анализ и его прил. 1971. Т. 5. № 4. С. 28–37.
- [20] В. Д. Мильман. Асимптотические свойства функций многих переменных, определенных на однородных пространствах // Докл. АН СССР. 1971. Т. 199. № 6. С. 1247–1250.
- [21] V. D. Milman. Almost Euclidean quotient spaces of subspaces of finite-dimensional normed spaces // Proc. Amer. Math. Soc. 1985. V. 94. № 3. P. 445–449.
- [22] V. D. Milman. The heritage of P. Lévy in geometrical functional analysis // Astérisque. 1988. № 157/158. P. 273–301.
- [23] V. Milman. Topics in asymptotic geometric analysis // Geom. Funct. Anal. 2002. Special Volume, Part II. P. 792–815.
- [24] V. Milman, A. Pajor. Regularization of star-bodies by random hyperplane cutoff // Studia Math. 2003. V. 159. № 2. P. 247–261.
- [25] V. D. Milman, G. Schechtman. Asymptotic Theory of Finite-dimensional Normed Spaces. With an appendix by M. Gromov. Berlin: Springer-Verlag, 1986. (Lecture Notes in Math. V. 1200.)
- [26] V. D. Milman, G. Schechtman. Global versus local asymptotic theories of finite-dimensional normed spaces // Duke Math. J. 1997. V. 90. № 1. P. 73–93.
- [27] V. Pestov. Amenable representations and dynamics of the unit sphere in an infinite-dimensional Hilbert space // Geom. Funct. Anal. 2000. V. 10. № 5. P. 1171–1201.
- [28] V. Pestov. Ramsey–Milman phenomenon, Urysohn metric spaces, and extremely amenable groups // Israel J. Math. 2002. V. 127. P. 317–357.
- [29] G. Pisier. The Volume of Convex Bodies and Banach Space Geometry. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1989. (Cambridge Tracts in Math. V. 94.)
- [30] N. Tomczak-Jaegermann. Banach–Mazur Distances and Finite-dimensional Operator Ideals. Harlow/New York: Longman/Wiley, 1989. (Pitman Monogr. Surveys in Pure Appl. Math. V. 38.)

School of Mathematical Sciences, Sackler Faculty of Exact Sciences,
Tel Aviv University, Israel

Поступила в редакцию
27.10.2003