Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Л. Микишанов, Индуцирование решеточного изоморфизма категорной эквивалентностью, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 179–180

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm708>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 44.207.124.84

26 апреля 2023 г., 16:29:00

В МОСКОВСКОМ МАТЕМАТИЧЕСКОМ ОБЩЕСТВЕ

СООБЩЕНИЯ МОСКОВСКОГО МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОБЩЕСТВА

ИНДУЦИРОВАНИЕ РЕШЕТОЧНОГО ИЗОМОРФИЗМА
КАТЕГОРНОЙ ЭКВИВАЛЕНТНОСТЬЮ

А. Л. Микишанов

В статье рассмотрен вопрос об индуцировании решеточного изоморфизма категорной эквивалентностью (функтором, ассоциированным с прообразующим). Специальные обозначения: $L({}_R M)$ – решетка подмодулей ${}_R M$, $L({}_R M) \cong L({}_S N)$ – решеточный изоморфизм, $\approx$ – естественная эквивалентность функторов. Все кольца предполагаются с 1, $1 \neq 0$. При рассмотрении решеток подмодулей возникает вопрос описания их изоморфизмов. История вопроса начинается с Основной теоремы проективной геометрии, где решеточный изоморфизм над полями (телами) индуцируется полулинейным изоморфизмом (см. [1]). Были сделаны многие попытки обобщить Основную теорему проективной геометрии с тел на разные кольца (Стефенсон, Скорняков, Камилло; см. [2], [3], [5]). Однако при переходе от тел к кольцам выяснилось, что для описания решеточных изоморфизмов одних полулинейных изоморфизмов мало. В работе [2] Стефенсон предложил идею индуцирования решеточного изоморфизма категорной эквивалентностью. В результате возникает вопрос: когда данный решеточный изоморфизм $\Sigma: L({}_R M) \cong L({}_S N)$ индуцируется некоторой категорной эквивалентностью F? Полученный ниже результат (теорема 1) дает новый взгляд на эту задачу: теорема 1 сводит задачу изучения решеточного изоморфизма на индуцируемость категорной эквивалентностью в $R\text{-MOD}$ к вопросу об индуцируемости решеточного изоморфизма полулинейным изоморфизмом в $\text{End}_R P\text{-MOD}$, где ${}_R P$ есть некоторый прообразующий $R\text{-MOD}$.

ТЕОРЕМА 1. Пусть $\Sigma: L({}_R M) \cong L({}_S N)$ – решеточный изоморфизм, пусть в ${}_R M$ существует свободный элемент u (или в ${}_S N$ существует свободный элемент v). Тогда Σ индуцируется некоторой категорной эквивалентностью тогда и только тогда, когда выполнено одно из эквивалентных условий:

1) $\Sigma({}_R R u)$ – прообразующий $S\text{-MOD}$ такой, что $R \cong \text{End}_S \Sigma({}_R R u)$ и ${}_S \Sigma({}_R R u)_R \otimes_R - \approx \Sigma$ на $L({}_R M)$, т.е. существует $t: {}_S \Sigma({}_R R u)_R \otimes_R {}_R M \cong {}_S N$ – изоморфизм $S\text{-MOD}$, такой, что $\Sigma = {}_S \Sigma({}_R R u)_R \otimes_R - * t$ на $L({}_R M)$;

2) $\Sigma({}_R R u)$ – прообразующий $S\text{-MOD}$ такой, что $R \cong \text{End}_S \Sigma({}_R R u)$ и существует полулинейный изоморфизм $(l, s): [S; {}_S \Sigma({}_R R u)_R \otimes_R {}_R M] \cong [S; {}_S N]$ такой, что (l, s) индуцирует решеточный изоморфизм $\Sigma': L({}_S \Sigma({}_R R u)_R \otimes_R {}_R M) \cong L({}_S N)$, где $\Sigma' =$

$({}_S\Sigma({}_R R u)_R \otimes_R -)^{-1} * \Sigma$, т.е.:

$$\begin{array}{ccc} {}_S\Sigma({}_R R u)_R \otimes_R {}_R M & & \\ {}_S\Sigma({}_R R u)_R \otimes_R -)^{-1} \swarrow & & \searrow \Sigma' \\ {}_R M & \xrightarrow[\Sigma]{} & {}_S N \end{array}$$

1') $\Sigma^{-1}({}_S S v)$ – прообразующий R -MOD такой, что $S \cong \text{End}_R \Sigma^{-1}({}_S S v)$ и $\text{Hom}_R({}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), -) \approx \Sigma$ на $L({}_R M)$, т.е. существует $t: \text{Hom}_R({}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), {}_R M) \cong {}_S N$ – изоморфизм S -MOD такой, что $\Sigma = \text{Hom}_R({}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), -) * t$ на $L({}_R M)$;

2') $\Sigma^{-1}({}_S S v)$ – прообразующий R -MOD такой, что $S \cong \text{End}_R \Sigma^{-1}({}_S S v)$ и существует полулинейный изоморфизм $(l, s): [\text{End}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), \text{Hom}_R({}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), {}_R M)] \cong [{}_S, {}_S N]$ такой, что (l, s) индуцирует решеточный изоморфизм $\Sigma': L(\text{Hom}_R({}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), {}_R M)) \cong L({}_S N)$, где $\Sigma' = \text{Hom}_R({}_R \Sigma^{-1}({}_S S v), -)^{-1} * \Sigma$, т.е.:

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(\Sigma^{-1}({}_S S v), {}_R M) & & \\ \text{Hom}_R(\Sigma^{-1}({}_S S v), -)^{-1} \swarrow & & \searrow \Sigma' \\ {}_R M & \xrightarrow[\Sigma]{} & {}_S N \end{array}$$

Таким образом, эта теорема дает частичный ответ на вопрос, поставленный Стефенсоном: она сводит его к полулинейным изоморфизмам. К примеру, учитывая результат Камилло (см. [5]), получаем:

ПРЕДЛОЖЕНИЕ 1. Пусть $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$ и $\lambda: L({}_R R^n = \sum_{k=1}^n \oplus {}_R R i_k) \cong L({}_S N)$ – решеточный изоморфизм. Пусть кольцо R является одним из следующих: 1) прямое произведение колец, каждое из которых имеет линейно-упорядоченную решетку левых идеалов, 2) полунаследственное кольцо, 3) область целостности (не обязательно коммутативная). Тогда λ индуцируется некоторой категорной эквивалентностью тогда и только тогда, когда для некоторого $k \in \{1, \dots, n\}$ $\lambda({}_R R i_k) = {}_S P$ – прообразующий S -MOD.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 1. Основная идея в доказательстве – применение теоремы Мориты (см. [2]) с условием, что в качестве прообразующих надо брать ${}_R P = \Sigma^{-1}({}_S S v)$ или ${}_S Q = \Sigma({}_R R u)$ соответственно. При этом если для этого ${}_R P$ [${}_S Q$] не выполнено 1) или 2) теоремы 1 [соответственно 1') или 2')], то и Σ не индуцируется никакой категорной эквивалентностью, и обратно.

Автор выражает признательность профессору А. В. Михалеву за постоянное внимание к работе и ценные обсуждения.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Р. Бэр. Линейная алгебра и проективная геометрия. М.: ИЛ, 1957. [2] W. Stephenson. Characterisation of rings and modules by lattices // Ph.D. Thesis. Bedford College (Univ. of London), 1967. [3] Л. А. Скорняков // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1960. Т. 24. С. 511–520. [4] А. В. Михалев // Вестник МГУ. Сер. I. Матем., мех. 1989. № 2. С. 20–27. [5] V. P. Camillo // Rocky Mountain J. Math. 1984. V. 14. № 2. P. 475–486.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Принято редколлегией
24.11.2003