Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

А. Ф. Алиев, О принципе гладкого склеивания в $\mathbb{R}^n$,
УМН, 2007, том 62, выпуск 4, 147–148

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7086>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.198.55.26

26 апреля 2023 г., 12:40:36

О принципе гладкого склеивания в $\mathbb{R}^n$

А. Ф. Алиев

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан диффузионный процесс $(X_t)_{t \geq 0}$ с вектором сноса $a(x)$ и диффузионной матрицей $B(x)$. По заданной функции $G(x): \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ определим $V(x) = \sup_{\tau} E_x G(X_{\tau})$. Пусть в точке b функции V и G равны (оптимальная точка).

Представим две теоремы, дающие условия выполнения принципа гладкого склеивания функций V и G в точке b . Напомним, что функцией шкалы процесса X называется решение $s: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ дифференциального уравнения

$$(a(x), s'(x)) + \frac{1}{2} \operatorname{tr} B(x) B^*(x) s''(x) = 0.$$

Такое решение не является единственным, но нам будет достаточно существования набора из n решений, удовлетворяющего условиям теоремы. Этот вектор решений мы в дальнейшем будем обозначать S . Основное используемое нами свойство функции шкалы состоит в том, что процесс $(S(X_t))_{t \geq 0}$ является мартингалом (см. [1; гл. 3, § 3]).

Кроме того, введем в $\mathbb{R}^n$ топологию $\mathscr{W}$ как систему множеств W с условием: для любых $x \in W$ и последовательности контуров γ_n , стягивающихся к x , выполнено соотношение

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow x} \frac{E_x \|X_{\tau(\gamma_n)} - x\| I\{X_{\tau(\gamma_n)} \notin W\}}{E_x \|X_{\tau(\gamma_n)} - x\|} = 0 \quad (1)$$

(здесь и далее $\|\cdot\|$ обозначает стандартную норму в $\mathbb{R}^n$). Справедливость аксиом топологии легко проверяется по определению. Топология $\mathscr{W}$ содержит все множества, открытые в обычной топологии пространства $\mathbb{R}^n$. Для $n = 1$ при довольно слабых условиях, наложенных на процесс, эта топология совпадает с обычной топологией прямой, однако в многомерном случае она несколько богаче.

ТЕОРЕМА 1. Пусть в точке b функции G и S дифференцируемы, причем якобиан функции S отличен от нуля. Тогда функция $V - G$ является в топологии $\mathscr{W}$ бесконечно малой относительно $\|x - b\|$ при $x \rightarrow b$.

Из общей теории известно, что функция V является супергармонической. Отсюда для всякого момента остановки τ имеем неравенство $G(b) = V(b) \geq E_b V(X_{\tau})$, и, вычитая из обеих частей $E_b G(X_{\tau})$, получаем

$$E_b(G(b) - G(X_{\tau})) \geq E_b(V(X_{\tau}) - G(X_{\tau})) \geq 0. \quad (2)$$

Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и рассмотрим множество $B := \{x: V(x) - G(x) < \varepsilon \|b - x\|\}$. Заметим, что для процессов диффузионного типа доказана непрерывность функции V (см. [2; гл. 3, п. 2.1]). Следовательно, функция $V(x) - G(x)$ непрерывна, и для всякой точки x , отличной от b , найдется окрестность $U(x)$ такая, что $U(x) \subset B$. Это влечет справедливость (1) для всех точек $x \in B$, кроме b .

Заметим, что если S дифференцируема в точке b , то для всякого момента остановки τ при условии равномерной интегрируемости семейства $(S(X_{t \wedge \tau}))_{t \geq 0}$ выполнено свойство $0 = E_b(S(X_{\tau}) - S(b)) = E_b J(X_{\tau} - b) + \alpha_1(X_{\tau} - b)$, где J – матрица Якоби функции S в точке b , а $\alpha_1(x) \sim o(\|x\|)$ при $x \downarrow 0$. Отсюда в предположении $\det J \neq 0$ имеем $E_b(X_{\tau} - b) = -J^{-1} E_b \alpha_1(X_{\tau} - b)$. Преобразуем левую часть равенства (2) (здесь также α_2 – функция порядка $o(\|x\|)$ при $x \downarrow 0$, отвечающая за остаточный член): $E_b(G(b) - G(X_{\tau})) = E_b[\nabla G(X_{\tau} - b) + \alpha_2(X_{\tau} - b)] = -\nabla G J^{-1} E_b \alpha_1(X_{\tau} - b) + E_b \alpha_2(X_{\tau} - b)$. Итак, левая часть (2) может быть представлена в виде $E_b \alpha(X_{\tau} - b)$, где α – сумма бесконечно малых. Рассмотрим последовательность контуров, стягивающихся к b , а именно $\gamma_n \rightarrow b$: для любого δ все контуры начиная с некоторого лежат в $U_{\delta}(b) - \delta$ -окрестности точки b . Фиксируем $\beta > 0$. Тогда найдутся δ и N такие, что $|\alpha(t)| < \beta \|t\|$ для любого $0 < \|t\| < \delta$ и $\gamma_n \in U_{\delta}(b)$ для любого $n > N$. Поэтому при $n > N$

$$\psi(\gamma_n) = \frac{E_b(G(b) - G(X_{\tau(\gamma_n)}))}{E_b \|X_{\tau(\gamma_n)} - b\|} \leq \frac{E_b |\alpha(X_{\tau(\gamma_n)} - b)|}{E_b \|X_{\tau(\gamma_n)} - b\|} < \beta.$$

Это означает, что $\lim_{\gamma_n \rightarrow x} \psi(\gamma_n) = 0$, что в силу (2) влечет

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow x} \frac{\mathbb{E}_b(V(X_{\tau(\gamma_n)}) - G(X_{\tau(\gamma_n)}))}{\mathbb{E}_b \|X_{\tau(\gamma_n)} - b\|} = 0.$$

Ясно, что $\mathbb{E}_b(V(X_{\tau(\gamma_n)}) - G(X_{\tau(\gamma_n)})) = \mathbb{E}_b(V(X_{\tau(\gamma_n)}) - G(X_{\tau(\gamma_n)})) I\{X_{\tau(\gamma_n)} \in B\} + \mathbb{E}_b(V(X_{\tau(\gamma_n)}) - G(X_{\tau(\gamma_n)})) I\{X_{\tau(\gamma_n)} \notin B\} \geq \varepsilon \mathbb{E}_b \|X_{\tau(\gamma_n)} - b\| I\{X_{\tau(\gamma_n)} \notin B\}$. Поэтому

$$\lim_{\gamma_n \rightarrow x} \frac{\mathbb{E}_b \|X_{\tau(\gamma_n)} - b\| I\{X_{\tau(\gamma_n)} \notin B\}}{\mathbb{E}_b \|X_{\tau(\gamma_n)} - b\|} = 0.$$

Таким образом, в точке b также выполнено условие (1), и, значит, множество B открыто в топологии $\mathcal{W}$. Это справедливо для всякого $\varepsilon > 0$, что влечет $V(x) - G(x) = o(\|x - b\|)$, $x \rightarrow b$, в топологии $\mathcal{W}$.

ТЕОРЕМА 2. Пусть распределение приращений процесса X не зависит от начальной точки и точка b регулярна для множества остановки D относительно процесса X . Пусть, кроме того, функция G дифференцируема по всем направлениям и модули ее производных по всем направлениям ограничены в некоторой окрестности границы. Тогда в точке b дифференцируема по всем направлениям и функция V , причем производные совпадают с производными по соответствующим направлениям функции G .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО повторяет шаги доказательства аналогичной теоремы в одномерном случае (см. [2; гл. 4, 2.1, теорема 2]). Зафиксируем $\varepsilon > 0$ и выберем единичный вектор $\vec{n}$ (направление). Тогда из соотношений $V(b) = G(b)$ и $V \geq G$ следует неравенство $\varepsilon^{-1}(V(b + \varepsilon\vec{n}) - V(b)) \geq \varepsilon^{-1}(G(b + \varepsilon\vec{n}) - G(b))$, откуда при $\varepsilon \downarrow 0$ получаем

$$\lim_{\varepsilon} \varepsilon^{-1}(V(b + \varepsilon\vec{n}) - V(b)) \geq G'_n(b). \quad (3)$$

Обозначая через D множество остановки, введем $\tau^\varepsilon = \inf\{t: X_t \in D\}$ (оптимальный момент остановки) и $\sigma^\varepsilon = \inf\{t: b + \varepsilon\vec{n} + X_t \in D\}$. Тогда из соотношений $V(b + \varepsilon\vec{n}) = \mathbb{E}_{b+\varepsilon\vec{n}} G(X_{\tau^\varepsilon}) = \mathbb{E}_0 G(b + \varepsilon\vec{n} + X_{\sigma^\varepsilon})$ и $V(b) \geq \mathbb{E}_b V(X_{\tau^\varepsilon}) \geq \mathbb{E}_0 G(b + X_{\sigma^\varepsilon})$ получаем неравенство

$$\varepsilon^{-1}(V(b + \varepsilon\vec{n}) - V(b)) \leq \varepsilon^{-1} \mathbb{E}_0[G(b + \varepsilon\vec{n} + X_{\sigma^\varepsilon}) - G(b + X_{\sigma^\varepsilon})].$$

По теореме Лагранжа в силу существования производной функции G по направлению $\vec{n}$ имеем

$$\varepsilon^{-1} \mathbb{E}_0[G(b + \varepsilon\vec{n} + X_{\sigma^\varepsilon}) - G(b + X_{\sigma^\varepsilon})] = \mathbb{E}_0 G'_n(b + \theta\varepsilon\vec{n} + X_{\sigma^\varepsilon}), \quad \theta \in [0; 1].$$

Если $|G'_n(b + \theta\varepsilon\vec{n} + X_{\sigma^\varepsilon})| \leq Z$, где Z — некоторая интегрируемая случайная величина, то по теореме Лебега справедлив предельный переход при $\varepsilon \downarrow 0$. В нашем случае предельный переход возможен, поскольку производные по направлениям ограничены в совокупности в окрестности границы. Из условия регулярности получаем $\sigma^\varepsilon \rightarrow 0$, что и дает нам при $\varepsilon \downarrow 0$

$$\lim_{\varepsilon} \varepsilon^{-1}(V(b + \varepsilon\vec{n}) - V(b)) \leq \lim_{\varepsilon} \mathbb{E}_0 G'_n(b + \theta\varepsilon\vec{n} + X_{\sigma^\varepsilon}) = G'_n(b).$$

Это вместе с (3) и показывает справедливость теоремы.

Автор выражает благодарность А. Н. Ширияеву за постановку задачи.

Список литературы

- [1] И. И. Гихман, А. В. Скороход, *Теория случайных процессов*, т. 3, Наука, М., 1975.
- [2] A. Shiryaev, G. Peskir, *Optimal stopping and free-boundary problems*, Lectures Math. ETH Zurich, Birkhäuser, Basel, 2006.

А. Ф. Алиев (A. F. Aliev)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: amiraliev@gmail.com

Представлено А. В. Булинским
Принято редколлегией
07.05.2007