Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. С. Лемпицкий, Минимальные разрезы на сетевых подграфах, *УМН*, 2007, том 62, выпуск 4, 165–166

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm7087>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 52.87.193.239

26 апреля 2023 г., 14:52:31

Минимальные разрезы на сетевых подграфах

В. С. Лемпицкий

Настоящая работа посвящена задаче нахождения минимального разреза на графе. Напомним, что данная задача подразумевает наличие *сетевого* графа, т. е. графа с двумя выделенными *терминальными* вершинами (будем обозначать их S и T), и приписанных ребрам графа неотрицательных весов. *Разрезом на графе* называется произвольное разбиение множества V его вершин на два подмножества (*компоненты разреза*) V_S и V_T такие, что $S \in V_S$ и $T \in V_T$. Ребро считается *разрезанным* данным разрезом $[V_S, V_T]$, если оно соединяет вершины из разных компонент. *Весом разреза* называется сумма весов разрезанных ребер, причем разрез с наименьшей суммой называется *минимальным*. Существование полиномиальных (относительно числа вершин) алгоритмов нахождения минимальных разрезов на графах [1] обуславливает широкий интерес к разрезам на графах в дискретной математике и ее приложениях.

С точки зрения ряда приложений, использующих разрезы на графах большого размера (например, сегментация трехмерных медицинских изображений или трехмерная реконструкция поверхностей), существенный интерес представляют схемы, аппроксимирующие задачу нахождения минимального разреза на всем графе задачей нахождения минимального разреза на подграфе. В предшествующих работах (например, [2]) подобная аппроксимация носила эвристический характер и не имела теоретических гарантий. В данной работе нами исследуется вопрос о совпадении минимальных разрезов на графе и его подграфе, выводится достаточное условие, гарантирующее подобное совпадение, и приводится процедура построения подграфа, минимальный разрез на котором совпадает с минимальным разрезом на всем графе.

Пусть $\mathcal{G}$ представляет собой сетевой граф. *Корректным разбиением* на $\mathcal{G}$ назовем разбиение множества вершин $\mathcal{G}$ на три подмножества $\{U_B, U_S, U_T\}$ такие, что $S \in U_S$, $T \in U_T$ и в $\mathcal{G}$ отсутствуют ребра, соединяющие вершины U_S с вершинами U_T (т. е., неформально говоря, U_B “отделяет” U_S от U_T).

Для корректного разбиения $\{U_B, U_S, U_T\}$ нами рассматривается граф $\mathcal{B}$, являющийся подграфом $\mathcal{G}$, множество вершин которого есть $U_B \cup U_S \cup U_T$, а множество ребер – все ребра $\mathcal{G}$, соединяющие вершины из указанного множества. Поскольку подграф $\mathcal{B}$ является сетевым, то для него правомочно понятие разреза.

Используя двойственность минимального разреза и максимального потока (так называемая теорема Форда–Фалкерсона), можно доказать (см. [3]) следующее утверждение, связывающее минимальные разрезы на полном графе $\mathcal{G}$ и на подграфе $\mathcal{B}$.

ЛЕММА. Пусть G – сетевой граф, $\{U_B, U_S, U_T\}$ – его корректное разбиение и $\mathcal{B}$ – соответствующий ему сетевой подграф. Пусть $[V_S, V_T]$ – минимальный разрез на $\mathcal{B}$, причем в $\mathcal{G}$ не существует ребер, соединяющих вершины U_S с вершинами U_T , а также ребер, соединяющих вершины V_S с вершинами U_T . Тогда $[V_S \cup U_S, V_T \cup U_T]$ является минимальным разрезом на полном графе $\mathcal{G}$ (что эквивалентно существованию минимальных разрезов на $\mathcal{B}$ и на $\mathcal{G}$, разрезающих одни и те же ребра).

Данная лемма дает достаточные условия равенства минимальных разрезов на графе и его подграфе (здесь и далее под равенством разрезов на графе и подграфе будем понимать совпадение множеств разрезанных ребер). Ниже приводится процедура построения подграфа, для которого приведенные достаточные условия выполнены.

Нами рассматривается последовательность корректных разбиений $\{U_B^i, U_S^i, U_T^i\}$. Вопрос выбора начального корректного разбиения $\{U_B^1, U_S^1, U_T^1\}$ оставим пока открытым, а дальнейшие корректные разбиения будем строить рекуррентно следующим образом. Предположим, что для некоторого k корректное разбиение $\{U_B^k, U_S^k, U_T^k\}$ построено. Рассмотрим сетевой подграф $\mathcal{B}^k$ и минимальный разрез на этом подграфе $[V_S^k, V_T^k]$. Рассмотрим множество $W_S^k \subset U_S^k$, содержащее вершины U_S^k , для каждой из которых в $\mathcal{G}$ существует ребро, соединяющее ее с вершиной из V_T^k . Аналогично, рассмотрим множество $W_T^k \subset U_T^k$, содержащее вершины U_T^k , для каждой

из которых в $\mathcal{G}$ существует ребро, соединяющее ее с вершиной из $\mathbf{V}_S^k$. Тогда следующее корректное разбиение определим как $\{\mathbf{U}_B^{k+1} = \mathbf{U}_B^k \cup \mathbf{W}_S^k \cup \mathbf{W}_T^k, \mathbf{U}_S^{k+1} = \mathbf{U}_S^k \setminus \mathbf{W}_S^k, \mathbf{U}_T^{k+1} = \mathbf{U}_T^k \setminus \mathbf{W}_T^k\}$ (корректность такого разбиения тривиально следует из корректности предыдущего разбиения $\{\mathbf{U}_B^k, \mathbf{U}_S^k, \mathbf{U}_T^k\}$).

В силу монотонности вложения $\mathbf{U}_B^i \subseteq \mathbf{U}_B^{i+1}$, начиная с некоторого конечного K все корректные разбиения $\{\mathbf{U}_B^k, \mathbf{U}_S^k, \mathbf{U}_T^k\}$ совпадают. Это означает, что $\mathbf{W}_S^K = \emptyset$ и $\mathbf{W}_T^K = \emptyset$, а следовательно, для корректного разбиения $\{\mathbf{U}_B^K, \mathbf{U}_S^K, \mathbf{U}_T^K\}$ и подграфа $\mathcal{B}^K$ выполнена лемма. Таким образом, справедлива следующая теорема.

ТЕОРЕМА. *Последовательность подграфов $\{\mathcal{B}^i\}$, построенная выше, сходится за конечное число шагов к подграфу $\mathcal{B}^K$ (где K – число шагов). Минимальный разрез на $\mathcal{B}^K$ равен минимальному разрезу на $\mathcal{G}$.*

Таким образом, задача нахождения минимального разреза на полном графе $\mathcal{G}$ сведена к последовательному набору задач нахождения минимальных разрезов на подграфах $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}^2 \subset \dots \subset \mathcal{B}^K$.

Алгоритмически, нахождение минимального разреза на подграфе $\mathcal{B}^i$ позволяет эффективно находить минимальный разрез на подграфе $\mathcal{B}^{i+1}$. Напомним, что нахождение минимального разреза может быть сведено к поиску максимального потока в графе [1]. Максимальный поток в подграфе $\mathcal{B}^i$ является допустимым для подграфа $\mathcal{B}^{i+1}$. При переходе от подграфа $\mathcal{B}^i$ к подграфу $\mathcal{B}^{i+1}$ нахождение максимального потока в $\mathcal{B}^{i+1}$ может производиться не “с нуля”, а путем модификации предыдущего максимального потока.

Рассмотрим теперь построение исходного корректного разбиения, предположив наличие начального приближения, заданного в виде некоторого разреза $[\mathbf{Y}_S, \mathbf{Y}_T]$. Рассмотрим множество $\mathbf{Y}$, состоящее из нетерминальных вершин, прилегающих к разрезу, т. е. инцидентных разрезанным ребрам. В качестве корректного приближения возьмем $\{\mathbf{U}_B^1 = \mathbf{Y}, \mathbf{U}_S^1 = \mathbf{Y}_S \setminus \mathbf{Y}, \mathbf{U}_T^1 = \mathbf{Y}_T \setminus \mathbf{Y}\}$. Выбор начального разреза определяет, таким образом, последовательный набор подграфов $\mathcal{B}^1 \subset \mathcal{B}^2 \subset \dots \subset \mathcal{B}^K$, причем выбор влияет как на скорость сходимости (значение K), так и на размер подграфа $\mathcal{B}^K$ относительно графа $\mathcal{G}$.

В случае многих прикладных задач существуют эвристики, позволяющие получать начальные приближения, приводящие к быстрой сходимости (т. е. малым K) и, главное, малому размеру $\mathcal{B}^K$ относительно $\mathcal{G}$. Так, в [3] нами рассматривается прикладная задача робастной реконструкции трехмерной поверхности на основе нечетких сенсорных измерений, сводимая нами к поиску минимального разреза на сетевом графе. Использование иерархических эвристик для получения начальных приближений в нашем подходе приводит для реальных данных к подграфам $\mathcal{B}^K$, в 5–40 раз меньшим по размеру соответствующих исходных графов $\mathcal{G}$.

Заметим, что предшествующие схемы, использующие “сужение” поиска минимального разреза на подграф (такие, как в [2]), также зависят от начальных приближений. Однако в то время как для подобных схем неудачный выбор начального приближения приводит к разрезу, существенно отличающемуся от минимального разреза на исходном графе, в нашем подходе точное нахождение минимального разреза на исходном графе гарантируется вне зависимости от начального приближения.

Список литературы

- [1] Л. Р. Форд, Д. Р. Фалкерсон, *Потоки в сетях*, Мир., М., 1966. [2] H. Lombaert, Y. Sun, L. Grady, C. Xu, “A multilevel banded graph cuts method for fast image segmentation”, *Proc. IEEE ICCV'05*, Vol. 1, IEEE Computer Soc., 2005, 259–265. [3] V. Lempitsky, Y. Boykov, “Global optimization for shape fitting”, *Proc. IEEE CVRP'07*, IEEE Computer Soc., 2007, 1–8.

В. С. Лемпицкий (V. S. Lempitskii)
Московский государственный университет
им. М. В. Ломоносова
E-mail: shashkin@mech.math.msu.su

Представлено А. В. Михалёвым
Принято редколлегией
04.06.2007