Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

И. И. Богданов, Алгебраические расширения полуполей, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 181–182

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm709>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 18.234.197.8

26 апреля 2023 г., 04:44:07

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ РАСШИРЕНИЯ ПОЛУПОЛЕЙ

И. И. БОГДАНОВ

В заметке исследуется возможность расширения полуполя корнем алгебраического уравнения; результаты уточняются для идемпотентных и сократимых полуполей.

1. Мы используем терминологию и обозначения из [1]–[4]. *Полукольцом* называется коммутативный аддитивный моноид $(D, +, 0)$, снабженный ассоциативным дистрибутивным умножением с единицей 1. В дальнейшем все полукольца предполагаются коммутативными. *Полумодуль* над полукольцом S есть аддитивная полугруппа M , снабженная полукольцевым морфизмом $S \rightarrow \text{End } M$, задающим действие S на M . Полумодуль M *точен*, если для любых различных $a, b \in S$ существует такое $t \in M$, что $at \neq bt$. Полукольцо S называется *полуалгеброй* над полукольцом T , если определен морфизм из T в центр полукольца S , задающий действие T на S .

Полукольцо называется *полуполем*, если любой ненулевой элемент обратим по умножению и необратим по сложению. Полуполе *идемпотентно* (*сократимо*), если сложение идемпотентно (сократимо). “Наименьшим” полуполем является $\mathbb{B} = (\{0, 1\}, \max, \min)$. На любом полуполе вводится частичный порядок $x \leq_+ y \iff \exists a : x + a = y$. На идемпотентном полуполе этот порядок задает решетку; при этом $x \vee y = x + y$, $x \wedge y = (x^{-1} + y^{-1})^{-1}$.

Для ненулевого многочлена $P(x) = p_n x^n + \dots + p_0$ введем его *нижнюю степень* $\text{ldeg } P = \min\{i : p_i \neq 0\}$. Уравнение $P(x) = Q(x)$ называется *строгим*, если $\text{ldeg } P > \text{deg } Q$ и $\text{ldeg } Q = 0$ (в частности, $P \neq 0 \neq Q$). Строгое уравнение называется *мономиальным*, если $\text{deg } Q = 0$. В работе [2] для строгого уравнения $P(x) = Q(x)$ построен его *дифференциал* $d[P - Q](x, y)$, однозначно определяемый следующими свойствами: (1) он билинеен, т.е. $d[(P_1 + P_2) - Q] = d[P_1 - Q] + d[P_2 - Q]$ и $d[P - (Q_1 + Q_2)] = d[P - Q_1] + d[P - Q_2]$; (2) $d[p_n x^n - q_m x^m](x, y) = p_n q_m \sum_{i=1}^{n-m} x^{n-i} y^{m-1+i}$ при $n > m$. Показано, что существует такой многочлен $R(x, y)$, что $P(x)Q(y) + R(x, y) = x \cdot d[P - Q](x, y)$ и $R(x, y) + Q(x)P(y) = d[P - Q](x, y) \cdot y$. Отсюда следует, что у строгого уравнения не больше одного решения. Используя свойства дифференциала, можно также показать, что при любых $x, y \in D$ утверждения $P(x)Q(x)^{-1} \geq_+ P(y)Q(y)^{-1}$ и $x \geq_+ y$ равносильны, если уравнение $P(x) = Q(x)$ строгое.

Полуполе назовем *строго* (*мономиально*) *алгебраически замкнутым*, если любое строгое (мономиальное) уравнение имеет корень. Пусть $D \subseteq \tilde{D}$ – полуполя. Если $\tilde{D}$ строго (мономиально) алгебраически замкнуто и наименьшее строго (мономиально) алгебраически замкнутое подполуполе, содержащее D , совпадает с $\tilde{D}$, то $\tilde{D}$ назовем *строгим* (*мономиальным*) *алгебраическим замыканием* полуполя D .

2. Естественно возникает вопрос о возможности расширения полуполя корнем уравнения $P(x) = Q(x)$. Это расширение можно строить одним из двух эквивалентных способов:

$$\varphi_{P=Q}: D \hookrightarrow D[x] \rightarrow D[x]/\sim_{P=Q} \rightarrow D_{P=Q}, \quad \overline{\varphi}_{P=Q}: D \hookrightarrow D(x) \rightarrow \overline{D}_{P=Q},$$

где $\sim_{P=Q}$ – конгруэнция на $D[x]$, порожденная соотношением $P(x) \sim Q(x)$, $D_{P=Q}$ – полутело частных полукольца $D[x]/\sim_{P=Q}$, $D(x)$ – полуполе частных полукольца $D[x]$ и $\overline{D}_{P=Q}$ – фактор полуполя $D(x)$ по конгруэнции $\approx_{P=Q}$, порожденной соотношением $P \approx Q$. Однако не всякая такая конструкция дает расширение полуполя D ; так, образ полуполя D в $D_{x^2+1=ax}$ изоморфен $\mathbb{B}$ при любом $1 \geq_+ a \in D$.

Пусть $P(x) = a$ – мономиальное уравнение, $P(x) = a_n x^n + \dots + a_1 x$. Рассмотрим множество $D^{\mathbb{N}}$ всех последовательностей элементов D . Оно является $D[x]$ -полумодулем, x действует как сдвиг вправо. Положим $(d_i) \equiv (d'_i)$, если $\exists N: \forall k > N \ d_k = d'_k$; тогда $\equiv$ – конгруэнция. Обозначим $M_{D[x]} = D^{\mathbb{N}}/\equiv$. Образ последовательности (d_i) относительно канонической сюръекции обозначим через $[d_i]$.

Рассмотрим в M подмножество

$$\overline{M} = \{[d_i] \in M : P(x)[d_i] = a[d_i]\}.$$

Работа выполнена при частичной поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант № 00-15-96128).

Ясно, что $\overline{M} - D[x]$ -подполумодуль, являющийся также $D[x]/\sim_{P=Q}$ -полумодулем.

В $\overline{M}$ лежат n (ненулевых) элементов $[e_k^{(i)}]$, $i = 1, \dots, n$, задаваемых следующим образом: $e_i^{(i)} = 1$, $e_k^{(i)} = 0$ при $k = 1, \dots, n$, $k \neq i$; $e_k^{(i)} = \sum_{j=1}^n a_j e_{k-j}^{(i)}$ при $k > n$. Более того, M порожден ими как $D[x]/\sim_{P(x)=a}$ -полумодуль. Отсюда вытекает следующее утверждение.

ТЕОРЕМА 1. $D_{P(x)=a}$ является расширением D .

СЛЕДСТВИЕ 1. Для любого полуполя D существует его (универсальное) мономиальное алгебраическое замыкание $\tilde{D}$.

Более подробное изучение структуры полумодуля $\overline{M}$ позволяет уточнить структуру расширения сократимого полуполя.

ЛЕММА 1. $\overline{M}$ — точный $D[x]/\sim$ -полумодуль.

ТЕОРЕМА 2. Если D сократимо, то и $D_{P(x)=a}$ сократимо.

Существуют сократимые полуполя, для которых расширение корнем мономиального уравнения неединственно. Примером может служить уравнение $x^2 = 2$ над полуполем $D = \mathbb{Q}_+[-\sqrt{2}] \cap \mathbb{R}_+$: полуполя $\mathbb{Q}_+[-\sqrt{2}]$ и $\mathbb{Q}_+[\sqrt{2}]$ являются расширениями D корнем этого уравнения и неизоморфны над D . Однако можно выделить класс сократимых полуполей, для которых это не так.

ТЕОРЕМА 3. Мономиальное алгебраическое замыкание любого (сократимого) полуполя вида $D \cong F \cap \mathbb{R}_+$, где F — подполуполе в $\mathbb{R}_+$, единственно.

Г. Б. Шпиз [5] показал, что для мономиальной алгебраической замкнутости идемпотентного полуполя достаточно разрешимости любого уравнения вида $x^n = a$; при этом корень уравнения $a_n x^n + \dots + a_1 x = 1$ задается формулой $x = \bigwedge_{k=1}^n a_k^{-1/k}$. Опираясь на это, Е. М. Вечтомов и А. В. Ряттель [6] показали, что мономиальное алгебраическое замыкание идемпотентного полуполя существует и единственно. Используя технику работы с дифференциалом, можно усилить эти результаты следующим образом.

ТЕОРЕМА 4. Пусть каждое уравнение вида $x^n = a$ разрешимо в D . Тогда любое строгое уравнение $P(x) = Q(x)$ разрешимо в D , при этом его решение представляется в виде $x = \bigwedge_i \bigvee_j x_{ij} = \bigvee_j \bigwedge_i x_{ij}$, где x_{ij} — корень уравнения $p_i x_{ij}^{i-j} = q_j$, $p_i \neq 0$, $q_j \neq 0$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Мономиальное алгебраическое замыкание идемпотентного полуполя является его строго алгебраическим замыканием. Расширение любого идемпотентного полуполя корнем любого строгого уравнения $P(x) = Q(x)$ существует и единственно.

Автор благодарен В. Т. Маркову за внимание к работе.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] И. И. Богданов. Об аддитивной структуре полутел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2004. № 1 (в печати). [2] И. И. Богданов. Теорема коммутативности для полутел // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. 2004. № 3 (в печати). [3] J. S. Golan. The Theory of Semirings with Applications in Mathematics and Theoretical Computer Science. Harlow: Pitman, 1992. [4] Н. J. Weinert // Acta Math. Acad. Sci. Hungar. 1962. V. 13. № 3–4. P. 365–378. [5] Г. Б. Шпиз // УМН. 2000. Т. 55. № 5. С. 185–186. [6] Е. М. Вечтомов, А. В. Ряттель // Тезисы докладов V Международной конференции “Алгебра и теория чисел: современные проблемы и приложения”. Тула, 2003. С. 68–69.