Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. В. Федорчук, Тождество Урысона и размерность многообразий, *УМН*, 1998, том 53, выпуск 5, 73–114

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm71>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением
<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.187.69

26 апреля 2023 г., 16:28:50

УДК 515.12

Памяти П. С. Урысона

ТОЖДЕСТВО УРЫСОНА И РАЗМЕРНОСТЬ МНОГООБРАЗИЙ

В. В. Федорчук

СОДЕРЖАНИЕ

Введение	73
§ 1. О тождестве Урысона	75
§ 2. О неметризуемых многообразиях	86
§ 3. О размерности многообразий	92
Список литературы	109

Введение

3 февраля 1998 г. исполнилось 100 лет со дня рождения Павла Самуиловича Урысона. Он прожил короткую, но очень яркую жизнь. Со дня его рождения до трагической гибели 17 августа 1924 г. прошло всего лишь двадцать шесть с половиной лет. Три года из них были связаны с общей топологией. Но след, оставленный им здесь, неизгладим. П. С. Урысон — один из основоположников общей топологии и создатель теории размерности. При этом важно отметить, что все свои результаты по теории размерности он получил в течение менее чем одного года. После того как летом 1921 г. Д. Ф. Егоров поставил перед ним задачу дать внутренние определения линии и поверхности, П. С. Урысон пришел к необходимости начать с определения размерности. Это определение (малой индуктивной размерности ind) он сформулировал в конце августа 1921 г. Тогда же (в разговоре с П. С. Александровым) он набросал план построения теории размерности. Его программа была выполнена в течение зимы 1921/22 г., и к весне 1922 г. вся теория размерности компактных метрических пространств была готова. Одновременно П. С. Урысон занимался теорией континуумов. Полученные результаты были доложены Московскому математическому обществу на заседаниях 16 октября 1921 г. (“О размерности множеств”), 20 ноября 1921 г. (“Общие теоремы о размерности”), 19 февраля 1922 г. (“Индексы ветвления”), 28 мая 1922 г. (“О размерности точек евклидова пространства”) и в кратком виде были опубликованы в заметках [104] и [105], представленных Парижской академии наук Лебегом на заседаниях 11

Во время написания этой статьи автор был поддержан грантами РФФИ № 97-01-00357 и ИНТАС № 94-3763.

и 25 сентября 1922 г. Подробное изложение было завершено в марте 1923 г., и работа “Мемуар о канторовых многообразиях” была направлена для опубликования в журнал “Fundamenta Mathematicae”, где была напечатана в двух статьях [106] и [107] общим объемом более 240 страниц. Вторая часть мемуара о канторовых многообразиях, посвященная теории континуумов, была отредактирована П. С. Александровым уже после смерти П. С. Урысона и опубликована в Голландии в 1928 г. [108].

Основным достижением созданной П. С. Урысоном теории размерности явилось совпадение трех размерностных инвариантов $\dim$, ind , Ind для компактных метрических пространств X , т.е. равенство

$$(1) \quad \dim X = \text{ind } X = \text{Ind } X,$$

названное впоследствии *тождеством Урысона*.

Этому тождеству, в различных его аспектах, и посвящена большая часть статьи. Вопрос о соотношении между различными размерностными инвариантами является основным вопросом теории размерности, и при решении этого вопроса получены наиболее значительные ее результаты. Более или менее полно эти результаты освещены в первом параграфе. Разумеется, исчерпывающий обзор на эту тему занял бы намного больший объем. Дополнительную информацию читатель может найти в обзорах по теории размерности, например, в [85] и [71], где достаточно полно отражено состояние теории размерности к началу 80-х годов. Стоит отметить, что к этому времени теория размерности конечномерных пространств, особенно в части, касающейся взаимоотношений между классическими размерностями, была в основном завершена. Об этом, к примеру, свидетельствует обстоятельная библиография в последней монографии Энгелькина [139], опубликованной в 1995 г.

В течение последних 5–7 лет произошел существенный сдвиг в исследовании размерности многообразий, что позволяет в настоящее время говорить о размерности многообразий как об уже сформировавшемся новом направлении теории размерности. Этим результатам, основная часть которых состоит из примеров многообразий с несовпадающими размерностями, посвящен § 3. Во втором параграфе приводятся некоторые факты общей теории неметризуемых многообразий. Обсуждаются методы построения таких многообразий. Развитие этих методов и привело к построению большинства примеров многообразий, упомянутых в третьем параграфе. Приводится много вопросов, в основном относящихся к размерности многообразий.

В статье используются стандартные обозначения и терминология. Недостающую информацию читатель может почерпнуть в монографиях [10], [120], [137]–[139]. Все пространства предполагаются тихоновскими и, как правило, нормальными. Все отображения непрерывны. Компактами называются хаусдорфовы бикомпактные пространства.

В основном тексте статьи не приводятся инициалы иностранных авторов. Исключение, по известным причинам, составляют лишь Р. Поль и М. Рудин. Что касается остальных авторов, то отсутствие русских инициалов в основном связано с трудностями нахождения правильной русской транскрипции иностранных имен, особенно если эти имена не известны автору.

§ 1. О тождестве Урысона

1. Прежде чем обсуждать тождество Урысона, хотелось бы поговорить о предваряющих его результатах. До создания Кантором теории множеств под размерностью той или иной фигуры подразумевали элементарно-геометрическое число ее измерений. Так, отрезок одномерен, квадрат двумерен, куб трехмерен и т. д. После того как в 1878 г. Кантор [45] установил взаимно однозначное соответствие между точками прямой и плоскости, а в 1890 г. Пеано [86] построил знаменитое, имеющее его имя непрерывное отображение отрезка на квадрат, возникла проблема топологической инвариантности числа измерений элементарных геометрических объектов.

Первым замечательным результатом в этом направлении была теорема Брауэра 1911 г. [20] о негомеоморфности евклидовых пространств $\mathbb{R}^n$ и $\mathbb{R}^m$ при $m \neq n$. Доказывая этот факт, Брауэр не опирался на определение размерности и этого определения еще не имел. Основным моментом доказательства было то, что при достаточно малом $\varepsilon > 0$ n -мерный куб I^n нельзя ε -отобразить на полиэдр K , геометрическая размерность которого меньше n .

В том же 1911 г. и в том же журнале непосредственно вслед за статьей Брауэра была напечатана статья Лебега [54], в которой он сформулировал так называемую *теорему о мостовых* для n -мерного куба и привел ее доказательство, содержащее пробел. Другую попытку доказательства теоремы Лебега предпринял Брауэр в 1913 г. [21]. Сам Лебег опубликовал правильное доказательство в 1921 г. [55]. Но даже сама формулировка “теоремы о мостовых” является бессмертной заслугой Лебега, поскольку здесь впервые, хотя и в неявном виде, содержится определение размерностного инварианта $\dim$, названного позже *размерностью по покрытиям* или *лебеговой размерностью*.

В 1912 г. в философском журнале появилась статья Пуанкаре [92], в которой он, не приводя точных формулировок, наглядно описал индуктивный подход к определению размерности, основанный на разбиении топологического пространства подмножествами более низкой размерности. Смерть Пуанкаре в том же 1912 г. помешала ему превратить эту важную идею в точное определение размерности.

Первое определение размерностной функции в явном виде было дано Брауэром в 1913 г. [21]. Он определил топологический инвариант компактного метрического пространства, назвав его Dg (мы обозначим этот инвариант Dg), и попытался доказать равенство $\text{Dg } I^n = n$. Приведем здесь определение Брауэра. Говорят, что подмножество C компактного пространства X является *разрезом* между подмножествами A и B пространства X (или C *разрезает* пространство X между A и B), если множества A , B и C дизъюнкты и всякий континуум (связный компакт), пересекающий A и B , пересекает и множество C . Непустой компакт X Брауэр называет *нульмерным* ($\text{Dg } X = 0$), если всякий подконтинуум пространства X состоит из одной точки. Для $n \geq 1$ неравенство $\text{Dg } X \leq n$ равносильно тому, что для всякой дизъюнктивной пары A и B замкнутых подмножеств пространства X существует замкнутое множество $C \subset X$, которое разрезает X между A и B и имеет размерность $\text{Dg } C \leq n - 1$.

Брауэровское понятие размерности не эквивалентно тому, что мы теперь понимаем под размерностью метрических компактов. Дело в том, что каждая перегородка C в компакте X между замкнутыми множествами A и B является разрезом между A и B ,

но обратное не верно. Более того, имеет место следующее утверждение.

1.1. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – наследственно неразложимый континуум. Тогда для любого континуума $A \subset X$ и непересекающегося с ним замкнутого множества $B \subset X$ в X существует разрез между A и B , состоящий из одной точки.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Отметим, что из определения наследственно неразложимого континуума вытекает, что

(1.1) для любых двух пересекающихся подконтинуумов континуума X один из них содержится в другом.

Обозначим через $K(A, B)$ множество всех подконтинуумов континуума X , пересекающихся одновременно с A и B . Поскольку A – континуум, из свойства (1.1) вытекает, что если $C \in K(A, B)$, то $C \supset A$. Поэтому, снова применяя свойство (1.1), получаем

(1.2) множество $K(A, B)$ линейно упорядочено по включению.

Положим $C_0 = \cap K(A, B)$. Из (1.2) вытекает

(1.3) $C_0 \in K(A, B)$,

в то время как

(1.4) никакой собственный подконтинуум C континуума C_0 не принадлежит $K(A, B)$.

Из (1.3) вытекает, что множество $D = C_0 \setminus A \cup B$ не пусто. Утверждается, что любая точка $x \in D$ разрезает X между A и B . В самом деле, если $C \in K(A, B)$, то из (1.2) и (1.4) получаем $C \supset C_0 \supset D \ni x$. Предложение 1.1 доказано.

Для точки $x \in X$ обозначим через $\text{Dg}_x X$ значение размерности Dg пространства X в точке x , т.е. $\text{Dg}_x X \leq n$ тогда и только тогда, когда для любого замкнутого множества $B \subset X$, не содержащего точки x , в X существует разрез C между $\{x\}$ и B размерности $\text{Dg } C \leq n - 1$. Из предложения 1.1 вытекает

1.2. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – наследственно неразложимый континуум. Тогда $\text{Dg}_x X \leq 1$ для произвольной точки $x \in X$.

Поскольку существуют наследственно неразложимые континуумы всех размерностей (см. [17]), из предложения 1.2 вытекает, что инвариант Dg не только по форме, но и по существу не совпадает с большой индуктивной размерностью Ind . Таким образом, мы видим, что к 1921 г. не только не существовало никакой теории размерности, но не имелось даже удовлетворительного определения размерности. П. С. Урысон определил три основных размерностных инварианта ind , $\dim$ и Ind , доказал “тождество Урысона” (1) и, в частности, равенство

$$\dim I^n = \text{ind } I^n = \text{Ind } I^n = n.$$

При этом им была доказана теорема счетной суммы для размерности ind . Кроме того, было получено знаменитое неравенство Урысона

$$(2) \quad \text{ind}(X \cup Y) \leq \text{ind } X + \text{ind } Y + 1$$

для любых подмножеств компактных метрических пространств. Из этого неравенства и из теоремы суммы для замкнутых множеств П. С. Урысон вывел следующий замечательный факт: размерность любого F_σ -подмножества X компактного метрического пространства есть такое наименьшее число n , что X может быть представлено в виде суммы $n + 1$ нульмерных множеств. Большое значение П. С. Урысон придавал введенному им понятию *канторова многообразия* (это видно хотя бы из названий его работ по теории размерности). Важнейшим фактом, установленным П. С. Урысоном в этом направлении, оказалась теорема о том, что компакт, являющийся общей границей двух связных открытых подмножеств $\mathbb{R}^3$, есть двумерное канторово многообразие. При доказательстве этого утверждения П. С. Урысону по существу пришлось построить всю теорию зацепления в трехмерном пространстве.

Одним из создателей теории размерности считается также австрийский математик Менгер. Его результаты, которые можно считать полученными независимо от П. С. Урысона, опубликованы в статьях [60] и [61]. Но при этом П. С. Урысон был на несколько месяцев, а иногда и лет, впереди и получил большее число основополагающих результатов. Так, среди результатов Менгера нет теоремы о двойной границе, нет неравенства Урысона (2). Но самое главное, Менгер не доказал основного для тождества Урысона неравенства $\text{ind } X \leq \dim X$. Более подробно с относительным вкладом П. С. Урысона и Менгера в создание теории размерности читатель может познакомиться в статьях П. С. Александрова [6] и [7].

2. Теперь о судьбе тождества Урысона при дальнейшем развитии теории размерности. В 1925–27 гг. Л. А. Тумаркин ([100], [101]) и польский математик Гуревич ([27], [28]) распространили теорию размерности (в том числе и тождество Урысона) на сепарабельные метрические пространства. В 1935 г. на Московской международной топологической конференции П. С. Александров поставил вопрос о взаимоотношении между основными размерностными инвариантами в классе компактных пространств. Вопрос этот стимулировал исследование размерности и в других классах пространств. Поскольку $\text{ind} \leq \text{Ind}$, а $\dim \leq \text{Ind}$ (Н. Б. Веденисов [24], 1941 г.), для произвольного нормального пространства X имеет место одно из следующих соотношений:

$$(3) \quad \dim X \leq \text{ind } X \leq \text{Ind } X;$$

$$(4) \quad \text{ind } X \leq \dim X \leq \text{Ind } X.$$

Поэтому проблема взаимоотношений между основными размерностными инвариантами состоит, во-первых, в нахождении классов пространств (по возможности наибольших), в которых выполнено одно из соотношений (3) или (4), т.е. одно из неравенств:

$$(5) \quad \dim X \leq \text{ind } X,$$

$$(6) \quad \text{ind } X \leq \dim X.$$

Вторая часть этой проблемы состоит в нахождении классов пространств, в которых то или иное нестрогое неравенство из соотношений (3) и (4) превращается в равенство.

Что касается первой части этой задачи, выяснилось, что неравенству (5) удовлетворяют пространства, близкие к компактным, а неравенству (6) – пространства,

близкие к метризуемым. В 1940 г. П. С. Александров [4] доказал неравенство (5) для компактов. Десять лет спустя японский математик Морита [65] доказал неравенство (5) для сильно паракомпактных пространств (это же утверждение для финально компактных пространств независимо получили Морита [64] и Ю. М. Смирнов [98]). Наконец, в 1961 г. А. В. Зарелуа (см. [36], [38]) распространил неравенство (5) на вполне паракомпактные пространства. Напомним, что топологическое пространство называется *вполне паракомпактным*, если в любое его открытое покрытие можно вписать открытое покрытие, распадающееся в счетную сумму систем, каждую из которых можно продолжить до звездно-конечного открытого покрытия всего пространства. В частности, метризуемые вполне паракомпактные пространства – это в точности пространства с σ -звездно-конечной базой. Такие пространства называются еще *сильно метризуемыми*. Класс вполне паракомпактных пространств находится строго между классами паракомпактных и сильно паракомпактных пространств.

Значительно меньшие успехи сопутствовали топологам при исследовании неравенства (6), которое, как мы отмечали выше, является основной составляющей тождества Урысона для компактных метрических пространств. Наиболее существенные здесь результаты являются следствием равенства

$$(7) \quad \dim X = \text{Ind } X.$$

Это равенство для класса всех метризуемых пространств в 1951 г. доказал чехословацкий математик Катетов, а затем независимо от него – Морита (см. [48], [49], [67]). Равенство (7), исключительно важное само по себе, имеет очень существенные следствия. Во-первых, из него и из упомянутого выше неравенства Веденисова $\dim X \leq \text{Ind } X$ получаем, что неравенство (6) имеет место для произвольного метризуемого пространства.

Вторым важным следствием равенства (7) является то, что применяя теорему Зарелуа о размерности вполне паракомпактных пространств, получаем выполнимость тождества Урысона в классе всех сильно метризуемых пространств. При этом оказалось, что класс сильно метризуемых пространств, содержащий все сепарабельные метрические пространства, практически нельзя увеличить до большего класса пространств, в которых было бы справедливо тождество Урысона. В самом деле, в 1962 г. американец индийского происхождения Рой построил (см. [93], [94]) пример полного метрического пространства R с

$$0 = \text{ind } R < \dim R = 1.$$

В связи с примером Роя возникли вопросы, на которые до сих пор нет ответа.

1.3. ВОПРОС. Существует ли метризуемое пространство X , для которого $\dim X - \text{ind } X \geq 2$?

1.4. ВОПРОС. Существует ли метризуемая группа G с $\text{ind } G < \dim G$?

Большая группа результатов, связанных с тождеством Урысона, получена для пространств, определяемых посредством топологических групп. В 1958 г. Б. А. Пасынков [73] установил тождество Урысона для компактных групп, а в 1960 г. (см. [74]) – для локально компактных групп. Равенство

$$(8) \quad \text{ind } X = \dim X$$

было тогда же получено и А. В. Архангельским [15]. Затем Б. А. Пасынков ([75], [76]) доказал тождество Урысона для факторпространств $X = G/H$ локально компактных групп G по замкнутым подгруппам H . А. В. Зарелуа ([37], [39]) распространил этот результат на вполне паракомпактные подмножества $A \subset X$. В частности, тождество Урысона имеет место для замкнутых подмножеств факторпространств локально компактных групп.

В 1965 г. Б. А. Пасынков [79] доказал равенство (7) для почти метризуемых групп, а при некоторых дополнительных предположениях и для факторпространств этих групп. Напомним, что топологическая группа G называется *почти метризуемой* [79], если G содержит компакт, имеющий счетный характер в G . Класс почти метризуемых групп содержит в качестве подклассов метризуемые группы, локально компактные и даже полные по Чеху группы. В 1976 г. Б. А. Пасынков ([81], [82]) получил равенство (7) не только для факторпространств G/H почти метризуемых групп без ограничений на H или G/H , но и для их замкнутых подмножеств. Если же $\dim G/H < \infty$, то для вполне паракомпактных подмножеств $A \subset G/H$ выполняется тождество Урысона.

Почти метризуемые группы и их факторпространства являются частными случаями почти метризуемых пространств, также введенных Б. А. Пасынковым [81]. Пространство X называется *почти метризуемым*, если на нем так действует некоторая компактная группа G , что пространство орбит X/G метризуемо. Почти метризуемыми являются произведения $X \times G$ метризуемых пространств на компактные группы, в частности, сами метризуемые пространства (группа G единична). Б. А. Пасынков доказал ([81], [82]), что для замкнутых подмножеств почти метризуемых пространств выполняется равенство (7), а для вполне паракомпактных – тождество Урысона.

Соотношения между размерностными инвариантами исследовались и в классах пространств, определяемых отображениями более общей природы по сравнению с переходами к факторпространству по подгруппе или к пространству орбит. Так, Б. А. Пасынков [78] получил равенство (7) для произвольного нормального пространства X , обладающего замкнутым отображением f , $\dim f = 0$, на метризуемое пространство. И. М. Лейбо [56] доказал это равенство для замкнутых образов метрических пространств. Что касается замкнутых образов пространств со счетной базой, для них справедливо тождество Урысона.

Стоит отметить, что в последнем результате И. М. Лейбо замкнутость отображения существенна. В самом деле, недавно Делистатис и Ватсон [31] в предположении континуум-гипотезы построили регулярное пространство X со счетной сетью размерности

$$\dim X = 1 < 2 \leq \text{ind } X = \text{Ind } X.$$

Напомним, что *сетью* в пространстве X называется такое семейство $\mathcal{N}$ его подмножеств, что всякое открытое множество $U \subset X$ есть объединение некоторого подсемейства элементов из $\mathcal{N}$. Понятие сети ввел в 1959 г. А. В. Архангельский [14]. Он же выделил класс пространств со счетной сетью как самостоятельный объект исследований и в начале 60-х годов поставил вопрос о справедливости тождества Урысона для регулярных пространств со счетной сетью. Естественность этого вопроса была обусловлена тем, что пространства со счетной сетью характеризуются как непрерывные

образы пространств со счетной базой, а регулярные пространства со счетной сетью финально компактны и совершенно нормальны. Таким образом, Делистатис и Ватсон ответили на вопрос, не поддававшийся решению более 35 лет.

Тем не менее, в этой тематике остается нерешенным ряд вопросов. В первую очередь, по-прежнему остается открытым в ZFC первоначальный вопрос А. В. Архангельского. Во-вторых, возникает вопрос, насколько велик может быть разрыв между размерностями $\dim$ и ind для пространств со счетной сетью. Наконец, в свете теоремы Лейбо о замкнутых образах пространств со счетной базой очень актуальным представляется теперь вопрос, недавно поставленный А. В. Архангельским [16].

1.5. ВОПРОС. Верно ли тождество Урысона в классе всех регулярных факторпространств сепарабельных метризуемых пространств?

В 1962 г. А. В. Зарелуа [37] ввел понятие разбивающего отображения. Отображение $f: X \rightarrow Y$ называется *разбивающим*, если для любой точки $x \in X$ и любой ее окрестности Ox найдется такая окрестность U точки $f(x)$, что прообраз $f^{-1}(U)$ распадается в дизъюнктную сумму открытых множеств V и W , удовлетворяющих условию $x \in V \subset Ox$. Разбивающими будут, например, замкнутые отображения f с $\text{ind } f = 0$ (и тем более с $\dim f = 0$). Топологическое пространство X А. В. Зарелуа [37] называет Z -пространством, если оно обладает разбивающим отображением в сепарабельное метрическое пространство. Всякое подпространство Z -пространства является Z -пространством. Для всякого Z -пространства выполняется неравенство (6), а если оно еще и вполне паракомпактно, то и тождество Урысона.

В работах П. С. Александрова и В. И. Пономарева ([11], [88], [89]) изучались направленные, измельчающиеся в том или ином смысле системы локально конечных разбиений пространств на канонически замкнутые множества. В терминах таких систем найдены достаточные условия для выполнимости неравенства (6) или равенства (7). Наличие направленных измельчающихся систем канонических разбиений пространства X кратности $\leq n$ равносильно возможности представить X в виде образа нульмерного в том или ином смысле пространства X^0 при замкнутом n -кратном отображении. Аналогичные вопросы рассматривал японский математик Нагами ([68], [69]). В статье [69] он доказал тождество Урысона для CW -комплексов.

3. Здесь мы остановимся на равенстве

$$(9) \quad \text{ind } X = \text{Ind } X.$$

В 1939 г. Н. Б. Веденисов [23] доказал это равенство для совершенно нормальных финально компактных пространств, а в 1950 г. Морита [65] – для сильно паракомпактных метризуемых пространств. В 1966 г. японский математик Катута [50] получил более общий результат, установив, что равенству (9) удовлетворяет всякое наследственно паракомпактное сильно паракомпактное пространство. Класс наследственно паракомпактных пространств содержится в классе тотально нормальных пространств. Напомним, что нормальное пространство X называется *тотально нормальным*, если всякое открытое множество $U \subset X$ является телом локально конечной в U системы открытых F_σ -подмножеств пространства X . Свойство тотальной нормальности, обобщающее совершенную нормальность, в 1953 г. рассмотрел Даукер в статье [30],

где он доказал свои знаменитые теоремы о большой индуктивной размерности: аддиционную, суммы, монотонности, сложения. В этой же статье Даукер доказал, что любое тотально нормальное пространство наследственно нормально. В 1969 г. Нагами [70] доказал равенство (9) для тотально нормальных σ -тотально паракомпактных пространств. Напомним, что пространство X называется σ -тотально паракомпактным [70], если для всякой его открытой базы $\mathcal{B}$ существует такое σ -локально конечное открытое покрытие $\mathcal{U}$ пространства X , что для каждого $U \in \mathcal{U}$ можно найти $B \in \mathcal{B}$, удовлетворяющее условиям $U \subset B$ и $\text{Bd } U \subset \text{Bd } B$. Класс σ -тотально паракомпактных пространств занимает промежуточное положение между классами паракомпактных и вполне паракомпактных пространств. Поэтому равенство (9) имеет место и для тотально нормальных, в частности, для совершенно нормальных, вполне паракомпактных пространств. Энгелькинг [139] ввел понятие сильной наследственной нормальности и распространил предыдущие результаты с тотально нормальных на сильно наследственно нормальные пространства. Пространство X называется *сильно наследственно нормальным*, если для всякой пары A, B отделенных подмножеств X ($\overline{A} \cap B = \emptyset, A \cap \overline{B} = \emptyset$) найдутся непересекающиеся их окрестности U и V , каждая из которых является телом точечно конечного семейства из открытых F_σ -множеств пространства X . Всякое тотально нормальное пространство, будучи наследственно нормальным (отметим нетривиальность этого факта), является сильно наследственно нормальным. Отметим также, что теорему Нагами о σ -тотально паракомпактных пространствах Френч [129] распространил на замкнуто тотально паракомпактные пространства, а Мизоками [62] – на порядково тотально паракомпактные пространства.

Имеется еще одно обобщение совершенной нормальности, отличающееся от тотальной нормальности и от сильной наследственной нормальности. Оно основано на понятии канонически замкнутого множества, т.е. множества, являющегося замыканием открытого. В 1976 г. Е. В. Щепин [132] при исследовании произведений метрических пространств ввел понятие *совершенно κ -нормального* пространства. Определение совершенно κ -нормального пространства получается из определения совершенно нормального пространства заменой фигурирующих в этом определении замкнутых множеств на канонически замкнутые. Он доказал, что произведение любого числа метризуемых пространств совершенно κ -нормально. Таким образом, совершенно κ -нормальные пространства не обязаны быть нормальными. В 1977 г. В. В. Федорчук определил [113] *наследственно совершенно κ -нормальные* пространства как пространства, в которых всякое замкнутое G_δ -множество совершенно κ -нормально. Примерами наследственно совершенно κ -нормальных пространств являются все κ -метризуемые компакты ([133], [135], [136]), в частности, пространства Дугунджи. Следовательно, компактное наследственно совершенно κ -нормальное пространство не обязано быть наследственно нормальным и, тем более, сильно наследственно нормальным. Наоборот, существуют сильно наследственно нормальные компакты, не являющиеся совершенно κ -нормальными. Примером такого компакта является пространство, получающееся из двух экземпляров александровской компактификации несчетного дискретного пространства склеиванием “бесконечно удаленных” точек.

В уже упомянутой статье [113] было доказано, что равенство (9) имеет место для наследственно совершенно κ -нормальных пространств. Там же были сформулирова-

ны следующие вопросы.

1.6. ВОПРОС. Верно ли равенство (9) в классе совершенно κ -нормальных вполне паракомпактных (компактных) пространств?

1.7. ВОПРОС. Верно ли равенство (9) в классе κ -метризуемых вполне паракомпактных (финально компактных) пространств?

Полных ответов на эти вопросы нет до сих пор. Частичный ответ на вопрос 1.6 дал А. Ч. Чигогидзе [131], доказавший, что равенство (9) имеет место для квази-совершенно нормальных вполне паракомпактных пространств. При этом пространство X называется *квази-совершенно нормальным*, если замыкание всякого G_δ -подмножества X есть нуль-множество. Оказывается, что всякое наследственно нормальное совершенно κ -нормальное пространство является квази-совершенно нормальным. Таким образом, в классе наследственно нормальных пространств имеется положительный ответ на вопрос 1.6.

1.8. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пространство X называется *сильно κ -нормальным*, если оно κ -нормально и всякое его канонически открытое подмножество является телом точек конечно семейства открытых F_σ -подмножеств X . Пространство X называется *наследственно сильно κ -нормальным*, если всякое его замкнутое G_δ -множество сильно κ -нормально.

1.9. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякое сильно наследственно нормальное пространство наследственно сильно κ -нормально.*

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку свойство сильной наследственной нормальности наследуется произвольными подпространствами, достаточно показать, что сильно наследственно нормальное пространство сильно κ -нормально. Пусть U – канонически открытое множество в сильно наследственно нормальном пространстве X . Положим $V = X \setminus \overline{U}$. Тогда множества U и V отделены в X и при этом являются единственными своими непересекающимися окрестностями. Поэтому из определения сильной наследственной нормальности вытекает требуемое свойство множества U .

Поскольку наследственно сильно κ -нормальное пространство не обязано быть наследственно нормальным, этот новый класс пространств существенно шире класса сильно наследственно нормальных пространств. Поэтому определенный интерес представляет следующая группа вопросов.

1.10. ВОПРОС. Пусть X принадлежит одному из следующих классов пространств: компактные, финально компактные, сильно паракомпактные, вполне паракомпактные, σ -тотально паракомпактные. Имеет ли место равенство (9), если X (наследственно) сильно κ -нормально?

4. В этом пункте речь пойдет о размерности компактных пространств. Из теорем Александрова и Вedenисова вытекает, что для компакта X всегда

$$(3) \quad \dim X \leqslant \operatorname{ind} X \leqslant \operatorname{Ind} X.$$

Таким образом, первоначально основная, поставленная П. С. Александровым проблема теории размерности компактов, состояла в том, когда фигурирующие в формуле (3) неравенства превращаются в равенства, т.е. когда имеют место равенство

$$(9) \quad \text{ind } X = \text{Ind } X$$

и равенство

$$(8) \quad \dim X = \text{ind } X.$$

Как показали последующие результаты, никакой более или менее содержательной теории равенства (8) не существует. Как правило, это равенство является следствием равенства $\dim X = \text{Ind } X$ (см. п. 2). Что касается равенства (9), то оно выполняется при некоторых ослаблениях совершенной нормальности. При этом если оно выполнено в классе компактов, то, как правило, выполнено в классе вполне паракомпактных пространств и в более широких классах (см. п. 3). Поэтому все основные достижения теории размерности, связанные с тождеством Урысона для компактов, состоят в построении компактов с несовпадающими размерностями.

Первой на повестке дня стояла задача опровержения равенства (8). В 1949 г. А. Л. Лунц [58], а затем О. В. Локутиевский [57] построили компакты, одномерные в смысле $\dim$ и двумерные в смысле ind . В 1958 г. чехословацкий математик Вopenка [25] для любых m и n , $0 < m \leq n \leq \infty$, построил такие компакты $X = X_{mn}$ и $Y = Y_{mn}$, что

$$\dim X = \dim Y = m, \quad \text{ind } X = n, \quad \text{Ind } Y = n.$$

В 1959 г. югославский математик Мардешич [59] построил змеевидный и, значит, одномерный в смысле $\dim$ компакт X размерности $\text{ind } X = 2$. Б. А. Пасынков ([76], [77]) усилил этот результат, построив змеевидный компакт Y с $\text{ind } Y = 2$, разлагающийся в сумму двух змеевидных компактов Y_1 и Y_2 размерности $\text{ind } Y_i = 1$.

В 1968 г. В. В. Федорчук [110] построил компакт X с первой аксиомой счетности и размерности $\dim X = 2$ и $3 \leq \text{ind } X \leq 4$ и серию аналогичных примеров в более высоких размерностях. Этот компакт отличался от построенных ранее еще тремя свойствами, кроме первой аксиомы счетности: 1) сепарабельность; 2) неравенство $\text{ind}_x X > \dim X$ для любой точки $x \in X$; 3) отсутствие перегородок C размерности $\dim C \leq 1$. Последнее свойство оказалось особенно принципиальным. Применяя его, П. С. Александров доказал ([8], [10]), что построенная им аксиоматика размерности $\dim$ метризуемых компактов не может быть распространена на неметризуемые компакты. В дальнейшем для всякого $n \geq 2$ были построены [112] n -мерные в смысле $\dim$ компакты $X = X(n)$, в которых не только нет перегородок размерности $\leq n - 1$, но и вообще нет замкнутых множеств размерности, промежуточной между 0 и n . Легко видеть, что индуктивные размерности (хотя бы трансфинитные) таких компактов $X(n)$ не определены.

Наибольший вклад в теорию размерности неметризуемых компактов внес В. В. Филиппов. Сначала приведем его результаты, относящиеся к нарушению равенства (8). В 1969 г. был построен [123] компакт X с первой аксиомой счетности, представимый в

виде суммы замкнутых подмножеств X_1 и X_2 со следующими размерностными свойствами:

$$\operatorname{ind} X_1 = \operatorname{ind} X_2 = \dim X = 1 < 2 = \operatorname{ind} X.$$

Этот результат был усилен [126] построением компакта, n -мерного в смысле ind и представимого в виде объединения конечного числа своих одномерных во всех смыслах замкнутых подмножеств. Таким образом, часть проблемы Александра, касающаяся соотношений между размерностями $\dim$ и ind , получила полное решение. В той же заметке [126] в предположении континуум-гипотезы были построены совершенно нормальные компакты с несовпадающими размерностями $\dim$ и ind . Вместе с равенством Веденисова $\operatorname{ind} = \operatorname{Ind}$ для совершенно нормальных финально компактных пространств это дает практически полное решение проблемы о соотношениях между основными размерностями совершенно нормальных компактов. Нерешенным остается только следующий вопрос.

1.11. ВОПРОС. Можно ли в ZFC (т.е. без дополнительных теоретико-множественных предположений) построить совершенно нормальный компакт X размерности $\dim X < \operatorname{ind} X$?

В 1969 г. был сделан первый существенный шаг в решении второй части проблемы Александра – вопроса о соотношении между индуктивными размерностями. В. В. Филишковым был построен ([122], [124]) компакт X , для которого

$$2 = \dim X = \operatorname{ind} X < 3 = \operatorname{Ind} X.$$

В дальнейшем им же [125], И. К. Лифановым и Б. А. Пасынковым ([83], [84]) были построены другие примеры, которые также дают отрицательное решение проблемы Александра, в частности, в классе компактов с первой аксиомой счетности. Было также показано, что разрыв между индуктивными размерностями может быть сколь угодно велик, а именно, для любого $n = 2, 3, \dots$ существует компакт X_n с первой аксиомой счетности, для которого

$$1 = \dim X < n = \operatorname{ind} X < 2n - 1 = \operatorname{Ind} X.$$

Однако до сих пор не известно, все ли возможности распределения размерностей $\dim$, ind и Ind , допускаемые известными результатами, реализуемы. Ответ был бы положительным, если бы удалось указать для каждого $n = 3, 4, \dots$ такой компакт Y_n , что $\dim Y_n = 1$, $\operatorname{ind} Y_n = 2$, $\operatorname{Ind} Y_n = n$.

Интерес представляют и размерностные свойства компактов с дополнительной структурой или с дополнительными свойствами внешнего характера. Мы уже говорили о (локально) компактных группах и их факторпространствах. Для таких компактов выполняется тождество Урысона. В связи с этим вполне обоснованным является следующий вопрос.

1.12. ВОПРОС. Выполняется ли тождество Урысона для компакта X , являющегося факторпространством какой-нибудь топологической группы по ее замкнутой подгруппе?

Первое, что стоит отметить – всякий такой компакт X *однороден*, т.е. для любых точек $x, y \in X$ существует такой гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$, что $h(x) = y$. Поэтому возникает более общий вопрос о размерности однородных компактов. В 1971 г. В. В. Федорчук [111] построил однородный сепарабельный компакт X с первой аксиомой счетности размерности

$$\dim X = 1 < 2 = \operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X.$$

Этот компакт обладает свойством *сильной однородности*, т.е. для любых точек $x, y \in X$ существует такой гомеоморфизм $h: X \rightarrow X$, что $h(x) = y$ и $h(y) = x$. В то же время он не является факторпространством никакой топологической группы.

Таким образом, вопрос о соотношении между лебеговой и индуктивными размерностями однородных компактов можно считать решенным. Но остается вопрос о равенстве индуктивных размерностей. Скажем, что пространство X *слабо однородно*, если у любых двух его точек существуют сколь угодно малые гомеоморфные окрестности.

1.13. ВОПРОС. Верно ли равенство $\operatorname{ind} X = \operatorname{Ind} X$ для слабо однородного (однородного, сильно однородного) компакта X ?

Приведем еще одно свойство компактов, имеющее внешний характер. Говорят, что X есть *абсолютный экстензор* в размерности n (кратко $\operatorname{AE}(n)$ -компакт), если для всякого компакта Y , $\dim Y \leq n$, всякого его замкнутого подмножества Y_0 всякое непрерывное отображение $f_0: Y_0 \rightarrow X$ можно продолжить до непрерывного отображения $f: Y \rightarrow X$. Известно, что $\operatorname{AE}(0)$ -компакты – это в точности пространства Дугунджи, метризуемые $\operatorname{AE}(1)$ -компакты – континуумы Пеано, $\operatorname{AE}(\infty)$ -компакты – абсолютные ретракты (AR -компакты). В 1977 г. Е. В. Щепин [134] доказал, что всякий $\dim$ -конечномерный AR -компакт метризуем, и, следовательно, для него выполнено тождество Урысона. Эту теорему о метризуемости нельзя распространить на $\operatorname{AE}(n)$ -компакты. Так, канторов дисконтинуум D^τ несчетного веса τ неметризуем и нульмерен. В то же время он является пространством Дугунджи и, следовательно, $\operatorname{AE}(0)$ -компактом. Поэтому на повестку дня был поставлен вопрос о справедливости тождества Урысона для $\operatorname{AE}(n)$ -компактов.

В том же 1977 г. В. В. Федорчук [113] дал отрицательный ответ на этот вопрос. Он построил: 1) одномерный $\operatorname{AE}(0)$ -компакт X веса ω_1 , для которого индуктивные размерности не определены, и 2) одномерный $\operatorname{AE}(0)$ -компакт Y веса $\mathfrak{c}$, для которого $\operatorname{ind} Y = \operatorname{Ind} Y = 2$. В этой же заметке [113] было показано, что индуктивные размерности совпадают для всякого κ -метризуемого компакта и, следовательно, для всякого $\operatorname{AE}(n)$ -компакта. Кроме того, там же доказана метризуемость всякого локально связного κ -метризуемого компакта, трансфинитная размерность ind которого определена. Отсюда вытекает

1.14. ТЕОРЕМА. Пусть X есть $\operatorname{AE}(n)$ -компакт, $n \geq 1$, трансфинитная размерность ind которого определена. Тогда X метризуем.

В самом деле, X есть $\operatorname{AE}(0)$ -компакт, т.е. пространство Дугунджи. Следовательно, X является κ -метризуемым пространством [135]. Далее, X есть $\operatorname{AE}(1)$ -компакт.

Но, как уже отмечалось выше, всякий метризуемый $AE(1)$ -компакт K является континуумом Пеано (сюръекция $f: C \rightarrow K$ канторова множества C по определению $AE(1)$ -пространства может быть продолжена до отображения $\bar{f}: I \rightarrow K$ отрезка $I \supset C$). С другой стороны, класс $AE(1)$ -компактов адекватен классу 1-мягких отображений [115]. Следовательно, X является пределом обратного спектра, состоящего из пеановских континуумов и монотонных отображений. Отсюда вытекает локальная связность X , что и завершает доказательство.

1.15. СЛЕДСТВИЕ. Пусть X есть $AE(n)$ -компакт, $n \geq 1$, и $\text{ind } X < \infty$. Тогда для X выполнено тождество Урисона.

Поскольку всякое пространство Милютина κ -метризуемо (см. [133], [135], [136]), для него выполняется равенство $\text{ind } X = \text{Ind } X$. Но распространить это равенство на класс всех диадических компактов не удастся. Это следует из примера Филиппова [125] компакта X размерности $\dim X = 1$, $\text{ind } X = 3$, $\text{Ind } X = 5$, и теоремы Локушиевского [57] о том, что всякий компакт X можно вложить в диадический компакт Y размерности $\dim Y = \dim X$ и $\text{ind } Y \leq \text{ind } X + 1$.

Градуированную версию теоремы Щепина о конечномерных AR -компактах в 1984 г. получил А. Н. Дранишников [32]. Он доказал метризуемость всякого n -мерного $AE(n)$ -компакта, $n \geq 1$, построив в то же время неметризуемый $(n + 1)$ -мерный $AE(n)$ -компакт для всякого n . Из теоремы 1.14 вытекает, что (трансфинитная) размерность ind таких компактов не определена.

§ 2. О неметризуемых многообразиях

1. Подмногообразием мы понимаем связное топологическое многообразие. Случаи дифференцируемых многообразий будут оговариваться особо. Название параграфа чисто условное, поскольку здесь среди прочего будет приведено несколько утверждений о метризуемости многообразий. “Неметризуемое” многообразие – это многообразие, про которое не сказано явно, что оно имеет счетный атлас. Мы начнем с основной, широко известной теоремы о метризуемости многообразий.

2.1. ТЕОРЕМА. Для многообразия M следующие свойства равносильны:

- 1) наличие счетной базы,
- 2) метризуемость,
- 3) финальная компактность,
- 4) сильная паракомпактность,
- 5) паракомпактность,
- 6) слабая паракомпактность.

Свойства 1) и 2) эквивалентны, так как мы считаем многообразия связными. По этой же причине эквивалентны свойства 3) и 4). Что же касается импликации 6) $\rightarrow$ 3), всякое точечно конечное (и даже точечно счетное) открытое покрытие, состоящее из сепарабельных множеств, звездно счетно и, следовательно, счетно, если пространство связно. Отсюда мы также получаем, что свойства 1)–6) равносильны для связных пространств, локально удовлетворяющих второй аксиоме счетности.

Напомним, что пространство X называется *моровским*, если оно имеет счетную измельчающуюся последовательность покрытий, т.е. такую последовательность $\{u_n\}$

открытых покрытий, что для всякой точки $x \in X$ семейство $\{st(x, u_n) : n \in \omega\}$ является базой окрестностей точки x .

2.2. ТЕОРЕМА. *Всякое нормальное моровское многообразие метризуемо.*

Это вытекает из теоремы Зенора и Рида [41] о метризуемости всякого локально компактного, локально связного, нормального моровского пространства. Ниже мы приведем пример, показывающий существенность нормальности в теореме 2.2.

Но самым важным результатом о метризуемости многообразий является знаменитая теорема М. Рудин [95].

2.3. ТЕОРЕМА (МА+¬СН). *Всякое совершенно нормальное многообразие метризуемо.*

Здесь МА – аксиома Мартина. Ее формулировку и дальнейшую необходимую информацию о ней можно найти, например, в монографии [44]. Этой теореме предшествовали два примера, построенные Зенором и М. Рудин [42].

2.4. ПРИМЕР (СН). Существует совершенно нормальное, сепарабельное, неметризуемое многообразие.

2.5. ПРИМЕР (◇). Существует счетно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, неметризуемое многообразие.

Здесь ◇ – принцип Йенсена. Поскольку в дальнейшем он будет играть важную роль, приведем его формулировку: *существует такая последовательность $\{J_\alpha \subset \alpha : \alpha < \omega_1\}$, что множество $\{\alpha : J_\alpha = K \cap \alpha\}$ стационарно для любого множества $K \subset \omega_1$.*

При этом множество $A \subset \omega_1$ называется *стационарным*, если $A \cap C$ не пусто для любого замкнутого не ограниченного в ω_1 множества C . Йенсен [43] доказал, что аксиома конструктивности Геделя ($V=L$) влечет ◇, а ◇ влечет справедливость континуум-гипотезы (СН).

Таким образом, теорема 2.3 и пример 2.4 полностью решают проблему Александра [2] о существовании совершенно нормального неметризуемого многообразия.

В 1979 г. Зенор и Козловский [40] при тех же предположениях СН и ◇ построили дифференцируемые версии примеров 2.4 и 2.5. Ключевую роль здесь сыграла дифференцируемая версия теоремы Брауна [19] о том, что объединение растущей последовательности открытых n -клеток есть открытая n -клетка.

2.6. ТЕОРЕМА. *Если дифференцируемое многообразие M имеет такой атлас $\{(U_i, \varphi_i) : i \in \omega\}$, что $U_i \subset U_{i+1}$ и $\varphi_i(U_i) = \mathbb{R}^n$, то M диффеоморфно $\mathbb{R}^n$.*

Теперь стоит остановиться на понятии дифференцируемого (неметризуемого) многообразия. Мы фиксируем $n \geq 1$ и считаем, что M есть топологическое n -многообразие. Две карты (U, φ) и (V, ψ) многообразия M называются C^p -согласованными, $0 \leq p \leq \omega$, если множества $\varphi(U \cap V)$ и $\psi(U \cap V)$ открыты в $\mathbb{R}^n$ и отображение

$$\psi \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$$

есть C^p -диффеоморфизм, т.е. оба отображения $\psi \varphi^{-1}|_{\varphi(U \cap V)}$ и $\varphi \psi^{-1}|_{\psi(U \cap V)}$ дифференцируемы до порядка p включительно (для $p = 0$ ($p = \omega$) это означает, что

данные отображения непрерывны (вещественно аналитичны)). Семейство карт $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha) : \alpha \in A\}$ многообразия M называется C^p -атласом, если любые две карты этого семейства C^p -согласованы и $\bigcup \{U_\alpha : \alpha \in A\} = M$. Два C^p -атласа называются эквивалентными, если их объединение является C^p -атласом. Из этого определения вытекает, что каждый C^p -атлас содержится в максимальном C^p -атласе, который называется C^p -структурой на многообразии M или дифференциальной структурой класса p . Топологическое многообразие M , наделенное C^p -структурой, называется C^p -многообразием. Итак, C^p -многообразие – это пара $(M, \mathcal{A})$, где M – топологическое n -многообразие, а $\mathcal{A}$ – максимальный C^p -атлас. Многообразие $(M, \mathcal{A})$ называется гладким (дифференцируемым или C^∞ -дифференцируемым), если атлас $\mathcal{A}$ является C^p -структурой для каждого p , $1 \leq p < \infty$. Многообразие $(M, \mathcal{A})$ класса C^ω называется вещественно аналитическим многообразием.

Ясно, что всякая C^p -структура на многообразии M содержится в единственной C^r -структуре на M для любых $0 \leq r < p \leq \infty$. В 1968 г. Кох и Пуппе [51] доказали частичное обращение этого утверждения. А именно, имеет место

2.7. ТЕОРЕМА. *Для любого r , $1 \leq r < \infty$, всякая C^r -структура на n -многообразии содержит C^p -структуру для каждого p , $r < p \leq \omega$.*

Отметим существенность условия $1 \leq p$ в теореме 2.7, поскольку не всякое (даже компактное) топологическое многообразие дифференцируемо. Далее, всякое C^1 -многообразие вещественно аналитично. Наконец, C^p -структура, содержащая данную C^r -структуру, определена, вообще говоря, не однозначно. Так, в уже упомянутой статье [51] Кох и Пуппе показали, что для всякого r , $0 \leq r < \infty$, на “длинной прямой” L существуют C^r -структура $\mathcal{A}$ и вещественно аналитические структуры $\mathcal{A}_1$ и $\mathcal{A}_2$, содержащие $\mathcal{A}$, но не C^{r+1} -диффеоморфные. Такого эффекта (при $r \geq 1$) не может быть в классе метризуемых многообразий, так как еще в 1936 г. Уитни [103] доказал следующую теорему.

2.8. ТЕОРЕМА. *Пусть $1 \leq p < r < \omega$. Тогда любые два метризуемые C^p -диффеоморфные многообразия будут C^r -диффеоморфны.*

В 1958 г. Грауэрт [26] распространил этот результат на $r = \omega$. Таким образом, различные дифференциальные структуры, имеющиеся на одном многообразии (например, на сфере S^7), не являются C^1 -диффеоморфными.

Возвратимся к топологии многообразий. Основной теоремой о кардинальнозначных инвариантах многообразий является

2.9. ТЕОРЕМА. *Пусть X – подпространство многообразия. Тогда для X имеют место следующие соотношения:*

$$\text{число Суслина} = \text{плотность} \leq \text{наследственная плотность} = \text{спрэд} \leq \text{число Линделефа} = \text{вес} \leq \text{мощность} \leq \mathfrak{c}.$$

Напомним, что *спрэдом* пространства X называется верхняя грань мощностей дискретных подпространств X . Утверждение теоремы 2.9 имеет место для всякого пространства, локально удовлетворяющего второй аксиоме счетности, за исключением последнего неравенства, где требуется связность пространства.

Для дальнейшего нам понадобится еще одно определение. Пространство X называется (*сильно*) *коллективно хаусдорфовым*, если для всякого дискретного замкнутого подпространства $Y \subset X$ существует (дискретное) дизъюнктивное семейство окрестностей $Oy, y \in Y$.

2.10. ТЕОРЕМА. *Для нормального многообразия M следующие свойства равносильны:*

- 1) M коллективно хаусдорфово,
- 2) M сильно коллективно хаусдорфово,
- 3) всякое дискретное замкнутое подпространство M есть G_δ -множество.

Импlications 1) $\rightarrow$ 2) $\rightarrow$ 3) тривиальны. Что касается импликации 3) $\rightarrow$ 1), она имеет место для всякого нормального, локально компактного, локально связного пространства. Нормальность M существенна, как показывает пример 3.7 из [71]. Из теоремы 2.10 легко вывести

2.11. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Всякое подпространство совершенно нормального многообразия сильно коллективно хаусдорфово.*

Из этого предложения в свою очередь вытекает следующий замечательный результат (см. [72]).

2.12. ТЕОРЕМА. *Всякое сепарабельное совершенно нормальное многообразие M наследственно сепарабельно.*

В самом деле, многообразие M наследственно хаусдорфово по предложению 2.11. Следовательно, для всякого его подпространства спрэд совпадает с числом Суслина. Поэтому применение теоремы 2.9 дает нам необходимый результат.

В свете теорем 2.9 и 2.12 весьма замечательным представляется построенный Николем [72] пример, подрывающий нашу веру в собственную интуицию.

2.13. ПРИМЕР ($\diamond$). Существует совершенно нормальное несепарабельное и, значит, не удовлетворяющее свойству Суслина многообразие.

2. Теперь о построении неметризуемых многообразий. Существующие в “природе” неметризуемые многообразия зачастую связаны с “длинной” трансфинитной прямой, появившейся еще у Кантора [46] в 1883 г. Что касается сепарабельных неметризуемых многообразий, их построение требует некоторого насилия над природой. Одним из первых примеров такого рода было построенное Мором [63] в 1942 г. неметризуемое моровское многообразие. Приведем его конструкцию, поскольку она послужила отправной точкой того, что произошло в дальнейшем при построении сепарабельных неметризуемых многообразий.

Пусть $Y = \mathbb{R}_+^2$ – замкнутая верхняя полуплоскость. Через Z обозначим ось x в плоскости $\mathbb{R}^2$. Для произвольного $t \in \mathbb{R}$ через I_t обозначим вертикальный отрезок плоскости с концами в точках $(t, 0)$ и $(t, 1)$. Легко видеть, что существует отображение $\pi_t: Y \rightarrow Y$ со следующими свойствами:

- 1) $\pi_t(I_t) = \{(t, 0)\}$;
- 2) $\pi_t: Y \setminus I_t \rightarrow Y \setminus \{(t, 0)\}$ есть гомеоморфизм;
- 3) $\pi_t|_Z = \text{id}$.

Обозначим через $\pi: X_\Pi \rightarrow Y$ послойное произведение семейства отображений $\Pi = \{\pi_t: t \in \mathbb{R}\}$. Согласно свойству 3) множество Z естественно вложено в X_Π . Множество $M_\Pi = X_\Pi \setminus Z$ есть неметризуемое 2-многообразие. Открытая верхняя полуплоскость $O \subset Y$ в силу условия 2) также естественно лежит в M_Π в качестве открытого всюду плотного подпространства, откуда вытекает сепарабельность M_Π . По определению послойного произведения отображение π однозначно представляется в виде композиции $\pi_t \circ p_t$. Обозначим через x_t прообраз точки $(t, 0)$ при отображении p_t и положим $X_1 = \{x_t: t \in \mathbb{R}\}$. Из определения топологии послойного произведения вытекает, что X_1 дискретно. Кроме того, X_1 замкнуто в $M_\Pi \setminus O$. Следовательно, M_Π не нормально, будучи сепарабельным пространством, содержащим замкнутое дискретное подпространство мощности $\mathfrak{c}$. Наконец, для всякого множества $J_t = p_t^{-1}(I_t) \setminus Z$ существует такое счетное семейство $\mathcal{B}_t$ открытых подмножеств M_Π , что $\mathcal{B}_t$ образует базу окрестностей точек из J_t и $B \cap (M_\Pi \setminus O \cup J_t) = \emptyset$ для всякого $B \in \mathcal{B}_t$. Это наблюдение позволяет легко построить счетную измельчающуюся последовательность покрытий многообразия M_Π . Итак, M_Π является сепарабельным неметризуемым моревским многообразием, что говорит о существенности условия нормальности в теореме 2.2. Многообразие, построенное самим Мором, является одним из многообразий вида M_Π . Отметим, что при определенном выборе отображений π_t множество $O \cup X_1$ гомеоморфно “плоскости Немьцкого”. Еще одним важным замечанием по поводу данной конструкции является то, что среди отображений π_t при фиксированном $t \in \mathbb{R}$ очень много таких, для которых отображение $\pi_t: O \setminus I_t \rightarrow O$ есть диффеоморфизм.

Многообразие M_Π можно представить себе как результат вставки с экземпляров полуинтервала $[0, 1)$ в открытую верхнюю полуплоскость O путем ее протыкания. При этом топология на O не подвергается никакому воздействию, а результирующая “вставка” $M_\Pi \setminus O$ замкнута и нигде не плотна в M_Π . Можно дать другое описание этой конструкции. Вместо замкнутой верхней полуплоскости $\mathbb{R}_+^2$ и отрезка I_t берем замкнутый круг $B^2 = Y$ и радиус $R_t, t \in S^1$, где $S^1 = Z$ – окружность, ограничивающая круг B^2 . Чтобы получить то же самое многообразие M_Π , надо зафиксировать некоторую точку $t_0 \in S^1$ и взять семейство отображений $\Pi = \{\pi_t: t \in S^1 \setminus \{t_0\}\}$ с указанными выше условиями 1)–3). Мы можем использовать в нашей конструкции и отображение π_{t_0} . Тогда мы получим 2-многообразие, может быть и не гомеоморфное предыдущему, но имеющее все его основные свойства, описанные выше. Чтобы получить n -многообразие, $n \geq 3$, посредством той же самой процедуры, надо взять замкнутый шар B^n и ограничивающую его сферу S^{n-1} вместо B^2 и S^1 .

Имеется много различных отображений $\pi_t: B_t^n \rightarrow B^n$ со свойствами 1)–3) при фиксированном $t \in S^{n-1}$ (мы используем обозначение B_t^n , чтобы различить область определения и область значений отображения π_t). Но для любого из них существуют такие последовательности $S \subset O^n = B^n \setminus S^{n-1}$, сходящиеся к точке $t \in S^{n-1}$, что $\pi_t^{-1}(S) \supset R_t$. Далее мы будем использовать обозначение I_t для замкнутого радиуса R_t и J_t – для полуоткрытого радиуса $R_t \cap O^n$. Отображение π_t является элементарным шагом построения многообразия M^n , начиная с открытого шара O^n . Суть этого шага состоит в “убивании” некоторых сходящихся последовательностей в B^n . А именно, для данного счетного семейства $\{S_i: i \in \omega\}$ последовательностей в O^n , сходящихся к точке $t \in S^{n-1}$, можно построить такое отображение $\pi_t: B_t^n \rightarrow B^n$, что $I_t \subset \pi_t^{-1}(S_i)$ для всякого $i \in \omega$.

Если мы строим результирующее отображение $\pi: X \rightarrow B^n$ как послойное произведение отображений $\pi_t, t \in S^{n-1}$, то мы можем контролировать “убивание” только тех сходящихся последовательностей, которые содержатся в начальном открытом шаре O^n . Но возникает много новых сходящихся последовательностей, лежащих в $\bigcup \{J_t : t \in S^{n-1}\}$, и мы не можем контролировать их убивание посредством операции послойного произведения.

Но вместо послойного произведения пространств и отображений, которые являются пределами обратного спектра, состоящего из конечных послойных произведений, можно применить трансфинитный спектр, где при построении отображения $\pi_t \equiv \pi_\alpha^{\alpha+1}$ имеется возможность использовать накопившуюся к этому шагу информацию. Обычно используют трансфинитные спектры длины ω_1 . Дело в том, что наше отображение π_t является *почти гомеоморфизмом*, т.е. аппроксимируется гомеоморфизмами. А по известной лемме Брауна [18] предел обратной последовательности почти гомеоморфизмов метризуемых компактов является почти гомеоморфизмом. Лемма Брауна допускает обобщение. Но чтобы его сформулировать, надо напомнить одно определение. Трансфинитный обратный спектр $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha < \lambda\}$ называется *непрерывным*, если для всякого предельного числа $\gamma < \lambda$ пространство X_γ естественно гомеоморфно пределу спектра $\mathcal{S} \upharpoonright \gamma = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha < \gamma\}$. Трансфинитной индукцией с помощью леммы Брауна и того, что композиция двух почти гомеоморфизмов является почти гомеоморфизмом, доказывается

2.14. ЛЕММА. Пусть $\mathcal{S} = \{X_\alpha, \pi_\beta^\alpha : \alpha < \lambda\}$ – такой счетный непрерывный обратный спектр из метризуемых компактов, что все короткие проекции $\pi_\alpha^{\alpha+1}$ являются почти гомеоморфизмами. Тогда все проекции и все предельные проекции спектра $\mathcal{S}$ также будут почти гомеоморфизмами.

Поэтому посредством трансфинитной рекурсии с применением леммы 2.14 можно построить непрерывный обратный спектр длины ω_1 , состоящий из n -клеток B^n с короткими проекциями типа π_t . При этом появляется возможность контролировать все вновь возникающие сходящиеся последовательности. А чем больше сходящихся последовательностей можно “убить”, тем более сильный результат можно получить.

Указанную процедуру построения обратного спектра можно в то же время рассматривать как процесс построения растущей трансфинитной последовательности открытых шаров O_α^n ($O_{\alpha+1}^n = O_\alpha^n \cup J_\alpha$). Поэтому можно применить другой, уже упоминавшийся результат Брауна о растущей последовательности открытых n -клеток. В этом случае вместо проекций мы имеем топологические вложения $O_\alpha^n \rightarrow O_{\alpha+1}^n$, а для предельного α полагаем $O_\alpha^n = \bigcup \{O_\beta^n : \beta < \alpha\}$ с топологией прямого предела.

Эти два метода: обратных спектров и прямых пределов, имеют приблизительно одинаковую силу при построении многообразий с такими чисто топологическими свойствами как совершенная нормальность, счетная компактность и т. д. Приведенные в этом параграфе примеры построены с помощью метода прямых пределов. Что касается теории размерности, более результативным оказывается применение обратных спектров. В этом случае можно вместо естественной компактификации B^n шара O^n рассматривать более сложные компактификации, получающиеся, например, посредством некоторой факторизации на граничной сфере S^{n-1} . При этом появляется возможность контролировать размерность получающегося многообразия посред-

вом размерности его компактификации, являющейся пределом обратного спектра из метризуемых компактов, содержащих n -клетки O_α^n . Более подробно об этом будет сказано в следующем параграфе.

§ 3. О размерности многообразий

1. Поскольку для пространств, локально удовлетворяющих второй аксиоме счетности, размерность ind совпадает с локальной лебеговой размерностью locdim , для всякого нормального n -многообразия M имеем

$$(4) \quad n = \text{ind } M \leq \dim M \leq \text{Ind } M.$$

Если многообразие M паракомпактно, то по теореме 2.1 оно имеет счетную базу. В этом случае свойство (4) превращается в тождество Урысона. Что касается неметризуемых многообразий, мы практически не имеем никакой позитивной информации об их размерности (имеются в виду результаты о совпадении размерностей).

Вопрос о том, верно ли равенство

$$(10) \quad \dim M^n = n$$

для всякого топологического многообразия M^n , известен много лет. Он восходит еще к 1935 г., когда П. С. Александров поставил вопрос о соотношении между основными размерностями компактов. Наряду с компактами и метризуемыми пространствами многообразия, по моему мнению, представляют собой один из трех основных классов топологических пространств. Поэтому вопрос о равенстве (10) не мог не интересоваться как специалистов по теории размерности, так и топологов вообще. Но сначала этот вопрос находился в тени по нескольким обстоятельствам. Во-первых, к середине 30-х годов практически ничего не было известно о размерности пространств без счетной базы (первый прорыв в этом направлении, как известно, был сделан Н. Б. Веленисовым [23] в 1939 г., доказавшим совпадение индуктивных размерностей совершенно нормальных финально компактных пространств). Во-вторых, на топологов, по-видимому, очень сильное влияние оказывало само словосочетание “ n -мерное многообразие”, практически не оставлявшее сомнений в n -мерности n -многообразий. Этот тезис несомненно подкрепляется тем, что неметризуемые многообразия долгое время многими вообще не воспринимались как объект, достойный внимания. До сих пор я встречаю топологов, которые не верят, что “длинная прямая” является дифференцируемым многообразием. Третьим и, по моему мнению, решающим фактором было то, что специалисты, глубоко разбирающиеся в теории размерности, понимали сложность возникающей проблемы и не спешили обнародовать этот вопрос.

Не удивительно поэтому, что в явном виде вопрос о равенстве (10) был поставлен М. М. Постниковым [91], математиком, далеким от общей топологии, хотя и написавшим работу [90] о паракомпактности клеточных комплексов.

Прежде чем говорить о контрпримерах, приведем результаты о совпадении размерностей. Как мы уже отмечали выше, простейшим неметризуемым многообразием является длинная прямая L . Для упрощения рассуждений нам удобно рассматривать

L как многообразие с краем, т.е. как полупрямую с начальной точкой. Несложно проверить, что для этого многообразия выполняется тождество Урысона. Имеет место и более общее утверждение.

3.1. ТЕОРЕМА. Пусть X – совершенно нормальное финально компактное пространство. Тогда если тождество Урысона выполнено для X , то оно выполнено и для произведения $X \times L$. При этом $\dim(X \times L) = \dim X + 1$.

Эта теорема вытекает из следующего более общего утверждения.

3.2. ТЕОРЕМА. Пусть X – совершенно нормальное финально компактное пространство, а Y – локально компактное линейно упорядоченное пространство. Тогда если тождество Урысона выполнено для X , то оно выполнено и для произведения $X \times Y$. При этом $\dim(X \times Y) = \dim X + \dim Y$.

При доказательстве этой теоремы нам потребуется несколько вспомогательных утверждений.

3.3. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – совершенно нормальное финально компактное пространство. Тогда нормально его произведение $X \times Y$ на любое локально компактное линейно упорядоченное пространство Y .

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Поскольку Y является замкнутым подмножеством локально связного линейно упорядоченного пространства, можно считать, что Y локально связно. Но в этом случае Y является дискретной суммой связных подпространств. Следовательно, без ограничения общности можно предполагать, что Y связно. Этот случай в свою очередь разбивается на несколько подслучаев, определяемых наличием или отсутствием концевых точек и топологическим характером этих точек. Рассмотрим наиболее сложный вариант, когда Y получается из линейно упорядоченного континуума $[a, b]$ выбрасыванием концевых точек a и b , причем характер точки a счетен, а характер точки b несчетен. Но в этом случае $X \times Y$ является F_σ -подмножеством произведения $X \times [a, b]$. Таким образом, доказательство сводится к рассмотрению случая счетно компактного Y с компактными начальными отрезками. Тогда для непересекающихся замкнутых множеств $F_1, F_2 \subset X \times Y$ некоторые их конечные “куски” $F_i^y = F_i \cap (X \times [y, +\infty))$ при проектировании $X \times Y \rightarrow X$ переходят в непересекающиеся замкнутые множества, поскольку в противном случае в наследственно финально компактном пространстве X нашлась бы несчетная растущая последовательность открытых множеств. Дальнейшая процедура построения непересекающихся окрестностей множеств F_1 и F_2 не представляет затруднений.

3.4. ЗАМЕЧАНИЕ. Утверждение предложения 3.3 не распространяется на произвольное линейно упорядоченное пространство Y . В самом деле, в [109] построен пример такого линейно упорядоченного финально компактного пространства Y с точечно счетной базой, что его произведение $P \times Y$ на пространство иррациональных чисел отрезка не нормально.

3.5. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть нормальное пространство Z является суммой таких замкнутых подмножеств Z_1 и Z_2 , что Z_1 есть G_δ -множество, а $Z_1 \cap Z_2$ совершенно нормально. Тогда

$$\text{Ind } Z \leq \max\{\text{Ind } Z_1, \text{Ind}(Z_2 \setminus Z_1)\}.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Индукция по $n = \max\{\text{Ind } Z_1, \text{Ind}(Z_2 \setminus Z_1)\}$. При $n = -1$ утверждение очевидно. Совершим индуктивный переход от $n - 1$ к n . Пусть F_1, F_2 – замкнутые непересекающиеся подмножества пространства Z . Поскольку $\text{Ind } Z_1 \leq n$, в Z_1 существуют такие открытые непересекающиеся окрестности V_1 и V_2 множеств $F_1 \cap Z_1$ и $F_2 \cap Z_1$ соответственно, что множество $C_1 = Z_1 \setminus V_1 \cup V_2$ имеет размерность $\text{Ind } C_1 \leq n - 1$. Положим $K_i = (Z \cap V_i) \cup (F_i \cap X_2)$. Множества K_1, K_2 являются замкнутыми непересекающимися подмножествами пространства $Y = Z_2 \setminus C_1$. Поскольку Z_1 есть G_δ -множество, а $Z_1 \cap Z_2$ совершенно нормально, множество $Y = (Z \setminus Z_1) \cup (Z_1 \cap Z_2 \setminus C_1)$ является F_σ -подмножеством нормального пространства Z_2 . Следовательно, пространство Y нормально. Поэтому у замкнутых подмножеств K_1 и K_2 этого пространства существуют такие окрестности G_1 и G_2 , что $\overline{G_1}^Y \cap \overline{G_2}^Y = \emptyset$. Положим $L_i = \overline{G_i}^Y \setminus Z_1$. Множества L_1 и L_2 замкнуты в $Z \setminus Z_1$ и не пересекаются. Поскольку $\text{Ind}(Z \setminus Z_1) \leq n$, в $Z \setminus Z_1$ существуют такие открытые непересекающиеся окрестности W_1 и W_2 множеств $L_1 \cap Z_1$ и $L_2 \cap Z_1$ соответственно, что множество $C'_2 = (Z \setminus Z_1) \setminus W_1 \cup W_2$ имеет размерность $\text{Ind } C'_2 \leq n - 1$. Положим $U_i = V_i \cup W_i$ и $C = Z \setminus U_1 \cup U_2$. Ясно, что U_i являются открытыми в Z окрестностями множеств F_i . Поэтому C есть перегородка в Z между F_1 и F_2 . Положим $C_2 = \overline{C'_2}^Z$. Тогда $C = C_1 \cup C_2$ и $C'_2 = C \setminus C_1$. Легко видеть, что множество C со слагаемыми C_1 и C_2 удовлетворяет условию предложения 3.5. По предположению индукции $\text{Ind } C \leq \max\{\text{Ind } C_1, \text{Ind } C'_2\} \leq n - 1$. Предложение 3.5 доказано.

3.6. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – совершенно нормальное финально компактное пространство, а Y – локально связное линейно упорядоченное пространство. Тогда

$$(11) \quad \text{Ind}(X \times Y) \leq \text{Ind } X + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Как и при доказательстве предложения 3.3, можно ограничиться рассмотрением случая, когда Y получается из линейно упорядоченного континуума $[a, b]$ выбрасыванием концевых точек a и b , причем характер точки a счетен, а точки b – несчетен. Пусть $y \in Y$ – произвольная точка. Тогда полуинтервал $(a, y]$ финально компактен, а полуинтервал $[y, b)$ счетно компактен. Положим $Z_1 = X \times [y, b)$ и $Z_2 = X \times (a, y]$. Пространство $Z = X \times Y$ и его замкнутые подпространства Z_i нормальны по предложению 3.3. Во всяком линейно упорядоченном локально компактном пространстве всюду плотно множество точек, левый характер которых счетен. В дальнейшем будем предполагать, что y – такая точка. Тогда пространство $Z \setminus Z_1 = X \times (a, y)$ финально компактно и, значит, нормально. Поэтому имеют место неравенства

$$(12) \quad \text{Ind } Z_1 \leq \text{Ind } X + 1,$$

$$(13) \quad \text{Ind}(Z \setminus Z_1) \leq \text{Ind } X + 1,$$

вытекающие из следующих утверждений, которые доказаны соответственно В. В. Филипповым [127] и Б. А. Пасынковым [80].

3.7. ТЕОРЕМА. Пусть произведение $X_1 \times X_2$ нормально, проектирование на один из сомножителей замкнуто и пусть в сомножителях выполнена теорема конечной суммы для Ind. Тогда

$$\text{Ind}(X_1 \times X_2) \leq \text{Ind } X_1 + \text{Ind } X_2.$$

3.8. ТЕОРЕМА. Пусть произведение $X_1 \times X_2$ нормально, сомножитель X_2 – локально компактный паракомпакт, и пусть в сомножителях выполнена теорема конечной суммы для Ind. Тогда

$$\text{Ind}(X_1 \times X_2) \leq \text{Ind } X_1 + \text{Ind } X_2.$$

Чтобы применить теоремы 3.7 и 3.8, надо проверить, что в X и Y выполнена теорема конечной суммы для Ind. Но в X по теореме Чеха [130] выполнена теорема счетной суммы как в любом совершенно нормальном пространстве. Что касается Y , то там также выполнена теорема счетной суммы для Ind, так как она выполнена для dim, а для любого замкнутого $F \subset Y$ имеет место тождество Урысона.

Ясно также, что пространство $Z = Z_1 \cup Z_2$ удовлетворяет условиям предложения 3.5. Следовательно, из (12) и (13) вытекает требуемое неравенство (11). Предложение 3.6 доказано.

3.9. ЗАМЕЧАНИЕ. Из доказательства предложения 3.6 легко извлечь, что имеет место более общая формула

$$\text{Ind}(X \times Y) \leq \text{Ind } X + \text{Ind } Y,$$

т.е. $\text{Ind}(X \times Y) = \text{Ind } X$ в случае $\text{Ind } Y = 0$.

3.10. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Пусть X – паракомпактное пространство, а Y – линейно упорядоченный континуум. Тогда

$$(14) \quad \dim(X \times Y) = \dim X + 1.$$

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО. Неравенство

$$(15) \quad \dim(X \times Y) \leq \dim X + \dim Y$$

доказано Моритой [66] для паракомпакта X и локально компактного паракомпакта Y . В той же статье [66] Морита доказал, что

$$(16) \quad \dim(X \times I) = \dim X + 1$$

для паракомпакта X . Существует непрерывное монотонное отображение $g: Y \rightarrow I$ на отрезок. Положим $f = \text{id}_X \times g: X \times Y \rightarrow X \times I$. Ясно, что f есть замкнутое отображение паракомпакта $X \times Y$ на конечномерный паракомпакт $X \times I$ с ациклическими слоями $f^{-1}(z)$ (в силу монотонности отображения g прообразы точек при отображении f являются линейно упорядоченными континуумами). Тогда

$$(17) \quad \dim(X \times I) \leq \dim(X \times Y)$$

по теореме Дайера [29] о том, что замкнутое ациклическое отображение (все группы спектральных когомологий слоев равны нулю) паракомпакта на конечномерный паракомпакт не повышает лебегову размерность. Требуемое нам равенство (14) вытекает теперь из (15)–(17). Предложение 3.10 доказано.

ДОКАЗАТЕЛЬСТВО ТЕОРЕМЫ 3.2. Из двух возможных вариантов $\dim Y = 0$ и $\dim Y = 1$ более принципиальным является второй. В свете замечания 3.9 легко понять, как надо упростить доказательство теоремы в случае $\dim Y = 1$, чтобы получить доказательство при $\dim Y = 0$. Итак, пусть $\dim Y = 1$. Предположим сначала, что Y локально связно. Возьмем какой-нибудь невырожденный подконтинуум $Y_1 \subset Y$. По теореме Мориты [64] о размерности финально компактных пространств имеем

$$(18) \quad \dim(X \times Y_1) \leq \text{ind}(X \times Y_1).$$

Рассмотрим следующую цепочку неравенств:

$$\text{Ind } X + 1 \geq (\text{согласно (11)}) \geq \text{Ind}(X \times Y) \geq \text{Ind}(X \times Y_1) \geq \text{ind}(X \times Y_1) \geq (\text{согласно (18)}) \geq \dim(X \times Y_1) = (\text{согласно (14)}) = \dim X + 1.$$

Из этой цепочки (с учетом монотонности размерностей по замкнутым подмножествам, тождества Урысона для X и неравенств $\text{Ind} \geq \text{ind}$ и $\text{Ind} \geq \dim$) получаем тождество Урысона для $X \times Y$ и равенство $\dim(X \times Y) = \dim X + 1$.

Если же Y не локально связно, то существует локально связное линейно упорядоченное пространство Z , содержащее Y в качестве замкнутого подмножества. Через Y_1 по-прежнему обозначим какой-нибудь невырожденный подконтинуум пространства Y . Пусть теперь d – один из размерностных инвариантов $\dim$, ind и Ind . Тогда $dX + 1 = (\text{по доказанному}) = d(X \times Z) \geq d(X \times Y) \geq d(X \times Y_1) = (\text{по доказанному}) = dX + 1$. Значит, $d(X \times Y) = dX + 1$. Теорема 3.2 доказана.

3.11. СЛЕДСТВИЕ. Если X – пространство со счетной базой, то

$$\text{ind}(X \times L) = \dim(X \times L) = \text{Ind}(X \times L) = \text{Ind } X + 1.$$

3.12. СЛЕДСТВИЕ. Если M^n – метризуемое многообразие, то

$$\text{Ind}(M^n \times L) = n + 1.$$

Это следствие является одним из немногих положительных результатов о совпадении размерностей многообразий. Другим результатом такого рода является вытекающее из теоремы 3.7 равенство

$$(19) \quad \text{Ind}(L \times L) = 2.$$

В связи с теоремами 3.1 и 3.2 возникает следующий вопрос.

3.13. ВОПРОС. Совпадают ли индуктивные размерности

- а) у произведения $X \times Y$ совершенно нормального финально компактного пространства X на локально компактное линейно упорядоченное пространство Y ,
- б) у произведения $X \times L$?

Из доказательства теоремы 3.2 вытекает, что вопрос 3.13 решается положительно, если мы сможем положительно ответить на следующий вопрос.

3.14. ВОПРОС. Пусть X – совершенно нормальное финально компактное пространство, а Y – линейно упорядоченный континуум. Верно ли тогда, что

а) $\text{ind}(X \times Y) = \text{ind } X + 1$,

б) $\text{ind}(X \times I) = \text{ind } X + 1$?

3.15. ЗАМЕЧАНИЕ. Формула Мориты (16) верна, если отрезок заменить на любой одномерный метризуемый компакт, содержащий отрезок, например, на одномерный пеановский континуум. При этом локальная связность континуума существенна, как показано в [34]. В этой статье авторы построили двумерное множество $W \subset \mathbb{R}^3$ и одномерный метрический континуум Y с размерностью произведения $\dim(W \times Y) = \dim W = 2$. Что касается вопроса 3.14, он допускает следующее обобщение.

3.16. ВОПРОС. Пусть Y – невырожденный локально связный континуум. Верно ли тогда, что

а) $\text{ind}(X \times Y) \geq \text{ind } X + 1$ для совершенно нормального финально компактного пространства X ;

б) $\dim(X \times Y) \geq \dim X + 1$ для пространства X со счетной базой?

Следствие 3.12 также ведет к одному вопросу.

3.17. ВОПРОС. Верно ли тождество Урысона для замкнутого подмножества Y произведения $M^n \times L$, где M^n – компактное многообразие?

Частичные ответы на этот вопрос получены А. В. Карасевым. Он доказал [47] следующие два утверждения.

3.18. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если Y замкнуто в $M^n \times L$, M^n компактно и $\text{ind } Y = 0$, то $\text{Ind } Y = 0$.

3.19. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (МА+–СН). Если Y замкнуто в $M^n \times L$, M^n – компактное кусочно-линейное многообразие и $\text{ind } Y = n$, то $\text{Ind } Y = n$.

3.20. ЗАМЕЧАНИЕ. Предложение 3.19 нельзя доказать без дополнительных теоретико-множественных предположений. Следовательно, и положительный ответ на вопрос 3.17 может выглядеть лишь как теорема о совместности. Это показывает следующий пример, построенный Ю. М. Смирновым [98] еще в 1951 г.

3.21. ПРИМЕР (СН). Существует такое замкнутое множество $Y \subset I \times L$, что $1 = \text{ind } Y < \text{Ind } Y = 2$.

2. Возвращаемся теперь к равенству (10) и к соотношениям (4) в общем случае. Если бы существовало n -многообразие M размерности $\dim M \geq n + 1$, то $\text{Ind } M \geq n + 1$. Если, кроме того, размерность $\text{Ind } M$ определена, то M содержит нигде не плотное замкнутое множество N размерности $\text{Ind } N \geq n$. Поэтому первым шагом к отрицательному решению гипотезы (10) было бы построение n -многообразия M с нигде не плотным подмножеством N размерности $\text{Ind } N \geq n$. Как мы видели, в предположении континуум-гипотезы таким многообразием является произведение $I \times L$. “Наивный” пример был построен в [116].

3.22. ПРИМЕР. Существует такое 2-многообразие M , что $\dim M = \text{Ind } M = 2$ и M содержит нигде не плотное подмножество N размерности $\text{Ind } N = 2$.

Первое многообразие с несовпадающими размерностями было построено в [121].

3.23. ПРИМЕР (СН). Для всякого $n \geq 3$ существует нормальное счетно компактное n -многообразие M^n размерности

$$n = \text{ind } M^n = \dim M^n < \text{Ind } M^n = 2n - 2.$$

Многообразия из примеров 3.22 и 3.23 являются многообразиями типа I, т.е. каждое из них представляется в виде суммы такой растущей трансфинитной последовательности открытых подпространств X_α , $\alpha < \omega_1$, со счетной базой, что $\overline{X_\alpha} \subset X_{\alpha+1}$. Более того, такое многообразие M^n является пространством локально тривиального, но не тривиального, в силу предложения 3.19 и предложения 3.6, расслоения на длинную прямую L со слоем S^{n-1} .

Первый пример многообразия, у которого все три основные размерности не совпадают между собой, был построен в [117]. Этот пример, в частности, дает отрицательное решение гипотезы (10).

3.24. ПРИМЕР ($\diamond$). Для любых целых m и n , подчиненных условию $4 \leq n < m$, существует дифференцируемое, счетно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное n -многообразие M_m^n размерности

$$n = \text{ind } M_m^n < m = \dim M_m^n < m + n - 2 = \text{Ind } M_m^n.$$

В последующей работе автора [118] принцип Йенсена $\diamond$ был ослаблен до континуум-гипотезы.

3.25. ПРИМЕР (СН). Для любых целых m и n , подчиненных условию $4 \leq n < m$, существует дифференцируемое, совершенно нормальное, сепарабельное n -многообразие $M^{n,m}$ размерности

$$m - 1 \leq \dim M^{n,m} \leq m < m + n - 3 \leq \text{Ind } M^{n,m} \leq m + n - 1.$$

3.26. ЗАМЕЧАНИЕ. Все известные к данному моменту примеры многообразий с несовпадающими размерностями построены при дополнительных теоретико-множественных предположениях, вытекающих из аксиомы конструктивности: континуум-гипотезе и принципе Йенсена. Стоит отметить, что вообще многие контрпримеры в общей топологии строятся при тех или иных следствиях аксиомы конструктивности. В то же время большое число “позитивных” утверждений доказано в предположении аксиомы Мартина и отрицания континуум-гипотезы ($\text{MA} + \neg \text{CH}$) или в более слабой версии этого предположения $\text{MA}(\omega_1)$. К числу таких утверждений относится знаменитая теорема М. Рудин о метризуемости совершенно нормального многообразия (теорема 2.3). Поэтому вполне естественным представляется следующий вопрос.

3.27. ВОПРОС. Верно ли в предположении $MA + \neg CH$, что $\dim M = n$ для всякого нормального (сепарабельного) n -многообразия M ?

Интересен и более общий вопрос.

3.28. ВОПРОС. Верно ли, что $\text{Con}(\text{ZFC})$ влечет $\text{Con}(\text{ZFC} + \dim M^n = n)$ для всякого нормального (сепарабельного) многообразия M^n ?

В двойственной форме вопрос 3.28 может быть сформулирован следующим образом.

3.29. ВОПРОС. Существует ли “наивный” пример многообразия с несовпадающими размерностями?

3.30. ЗАМЕЧАНИЕ. Вопрос 3.29 содержит в себе по крайней мере три вопроса в зависимости от того, какую группу размерностных инвариантов мы рассматриваем. Кроме того, мы можем варьировать дополнительные топологические свойства, которыми многообразие должно обладать: сепарабельность, счетная компактность, коллективная хаусдорфовость, коллективная нормальность. Стоит отметить, что такое многообразие не может быть совершенно нормальным, в силу упомянутой выше теоремы М. Рудин. Не может оно быть и наследственно сепарабельным, поскольку по теореме Сентмиклоши [97] всякое наследственно сепарабельное локально компактное пространство финально компактно, если мы предполагаем $MA + \neg CH$. По поводу же последних двух свойств напомним, что:

- 1) предполагая одну из версий принципа Йенсена $\diamond^+$, М. Рудин построила [96] нормальное коллективно хаусдорфово многообразие, которое не коллективно нормально;
- 2) Флейснер [128] доказал, что в аксиоме конструктивности всякое нормальное пространство с первой аксиомой счетности, в частности, многообразие, коллективно нормально.

Другая группа вопросов связана с возможными значениями различных размерностных инвариантов многообразий с несовпадающими размерностями. Например:

3.31. ВОПРОС. Существует ли 2-многообразие M размерности $\text{Ind } M > 2$?

3.32. ВОПРОС. Существует ли 3-многообразие M размерности $\dim M > 3$?

3.33. ВОПРОС. Существует ли n -многообразие M размерности $n < \dim M = \text{Ind } M$?

3.34. ВОПРОС. Существуют ли n -многообразия M , для которых разность $\text{Ind } M - \dim M$ может быть сколь угодно большой, в частности, $\text{Ind } M - \dim M > n - 2$?

3.35. ЗАМЕЧАНИЕ. В связи с последним вопросом отметим, что $\text{Ind } M - \dim M = n - 2$ для многообразий из примеров 3.23 и 3.24. Что касается многообразия $M^{n,m}$ из примера 3.25, мы не знаем, чему в точности равна разность $\text{Ind } M^{n,m} - \dim M^{n,m}$, и можем только утверждать, что

$$n - 3 \leq \text{Ind } M^{n,m} - \dim M^{n,m} \leq n.$$

Следующая группа вопросов связана с гладкостью многообразий. Мы не знаем, являются ли гладкими многообразия из примеров 3.22 и 3.23. Многообразия из примеров 3.24 и 3.25 имеют C^∞ -дифференциальную структуру. Но такая структура по теореме 2.7 содержит вещественно аналитическую структуру. В связи с этим возникает

3.36. ВОПРОС. Существует ли комплексно аналитическое многообразие с несовпадающими размерностями?

Этот вопрос можно комбинировать с предыдущими вопросами о допустимых значениях размерностных инвариантов многообразий и о существовании “наивных” примеров многообразий с несовпадающими размерностями.

3. Здесь мы остановимся на методе построения 4-многообразий из примеров 3.24 и 3.25 (случай $n = 4$ наиболее важен и принципиально не отличается от общего случая $n > 4$). Метод этот развивает идеи, положенные в основу конструкций Мора и Зенора и М. Рудин (см. §2). Начнем с одного обозначения. Пусть A – замкнутое подмножество топологического пространства X и $\varphi: A \rightarrow B$ – факторное отображение на некоторое пространство B . Обозначим через X_φ факторпространство пространства X относительно разбиения, элементами которого являются слои $\varphi^{-1}(b)$ отображения φ и одноточечные множества из $X \setminus A$. Факторное отображение $X \rightarrow X_\varphi$ обозначим через q_φ .

В 1952 г. Андерсон [12] доказал, что всякий пеановский континуум P является непрерывным образом некоторого одномерного пеановского континуума M при открытом монотонном отображении. Все слои построенного Андерсоном отображения f неодноточечны. Более того, можно предполагать, что M и $f^{-1}(y)$, $y \in P$, гомеоморфны менгеровской кривой (см. [13], [102]). Но для нас существенно лишь то, что $f^{-1}(y)$ – невырожденный континуум для всякого $y \in P$. Фиксируем теперь отображение Андерсона $f: M \rightarrow Q$ на гильбертов куб. Будучи одномерным, континуум M вкладывается в сферу S^3 . Фиксируем вложение $M \subset S^3$ и рассмотрим сферу S^3 как границу замкнутого шара B^4 . Пусть теперь $B \subset Q$ – некоторый компакт. Полагаем $A = f^{-1}(B)$ и $\varphi = f|_A$. Воспользовавшись обозначениями предыдущего абзаца для $X = B^4$, получаем факторпространство B_φ^4 и факторное отображение $q_\varphi: B^4 \rightarrow B_\varphi^4$. Положим $S_\varphi^3 = q_\varphi(S^3)$. Таким образом, имеем пару $(B_\varphi^4, S_\varphi^3)$, где B_φ^4 – шар, слегка “испорченный” на границе, а S_φ^3 – ограничивающая его “сфера”. Эта пара и будет отправной точкой построения 4-многообразий из примеров 3.24 и 3.25. Отметим, что разность $B_\varphi^4 \setminus S_\varphi^3$ посредством q_φ^{-1} гомеоморфно отображается на открытый шар $O^4 = B^4 \setminus S^3$. В дальнейшем будем считать $q_\varphi|_{O^4}$ тождественным отображением.

Теперь опишем аналог отображения π_t из построения моровского многообразия M_Π в §2. Это отображение определяется следующей леммой, при формулировании которой мы используем обозначения предыдущего абзаца.

3.37. ЛЕММА (основная лемма из [117]). Пусть фиксирована некоторая точка $b \in B$ и $H = \varphi^{-1}(b) \subset S^3$. Предположим, что $h: H \times [0, 1] \subset B^4$ – вложение, удовлетворяющее следующим условиям:

- 1) $h(x, 0) = x$ для всех $x \in H$;
- 2) $h(H \times (0, 1]) \subset O^4$.

Тогда для произвольного счетного семейства $\mathcal{C} = \{C_i : i \in \omega\}$ таких счетных множеств $C_i \subset O^n$, что $y = q_\varphi(\varphi^{-1}(b))$ есть предельная точка множества C_i для любого $i \in \omega$, существует непрерывное отображение $g = g_{(y, \mathcal{C})} : B_\varphi^4 \rightarrow B_\varphi^4$ со следующими свойствами:

- 3) g является почти гомеоморфизмом;
- 4) g имеет единственный нетривиальный слой $g^{-1}(y) = q_\varphi(h(H \times [0, 1])) \equiv K$;
- 5) $g|S_\varphi^3 = \text{id}$;
- 6) $g : O^4 \setminus K \rightarrow O^4$ есть диффеоморфизм;
- 7) $K \subset \overline{(g^{-1}(C_i))}$ для любого i .

Заметим, что множество $K = g^{-1}(y)$ гомеоморфно конусу над H . Таким образом, лемма 3.37 позволяет посредством отображения g “вставлять” в точку $y \in S_\varphi^3 \subset B_\varphi^4$ конус над множеством H . В результате такой “вставки” получается пространство, гомеоморфное B_φ^4 . При этом “убивается” счетное множество последовательностей, сходящихся к точке y , а шар O^4 диффеоморфно погружается в объемлющий шар $O_g^4 = O^4 \cup (H \times (0, 1])$. Если H состоит из одной точки, то g есть отображение типа π_t из § 2.

Теперь мы можем вкратце описать, как строятся наши многообразия. Начнем с более простой процедуры построения многообразия из примера 3.25. Поскольку мы фиксировали отображение Андерсона f , отображение φ однозначно определяется компактом $B \subset Q$. Поэтому строящееся многообразие будем обозначать символом $M^{4,B}$. Многообразие $M^{4,B}$ будет построено одновременно с его компактификацией $bM^{4,B} = M^{4,B} \cup S_\varphi^3$. Компактификация $bM^{4,B}$ будет пределом непрерывного обратного спектра

$$\mathcal{S}^B = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha : \alpha < \omega_1\}.$$

Все компакты X_α будут гомеоморфны “шару” B_φ^4 . Все короткие проекции $p_\alpha^{\alpha+1}$ будут отображениями типа отображения g из леммы 3.37. Лемма 2.14 гарантирует нам, что для предельного α компакт X_α гомеоморфен компактам X_β при $\beta < \alpha$. Далее, компакт X_α однозначно представляется в виде дизъюнктивной суммы $O_\alpha^4 \cup S_\varphi^3$ открытого шара O_α^4 и ограничивающей его “сферы” S_φ^3 . Все отображения $p_\beta^\alpha|S_\varphi^3$ будут тождественными гомеоморфизмами, в силу условия 5) из леммы 3.37 и непрерывности спектра $\mathcal{S}^B$. Значит, “сфера” S_φ^3 будет естественно вложена в предел X_{ω_1} этого спектра. Разность $X_{\omega_1} \setminus S_\varphi^3$ и будет нашим многообразием $M^{4,B}$. При этом, $M^{4,B}$ является суммой растущей последовательности открытых шаров O_α^4 , диффеоморфных $\mathbb{R}^4$. Поэтому теорема 2.6 позволяет трансфинитной рекурсией определить дифференциальную структуру на $M^{4,B}$.

Осталось более детально определить короткие проекции $p_\alpha^{\alpha+1}$. Пусть $S_\varphi^3, O^4 = O_0^4, Z_\beta$, где β пробегает множество всех изолированных чисел $< \omega_1$, — дизъюнктивные множества мощности континуум. Положим

$$O_\alpha^4 = O_0^4 \cup \left(\bigcup \{Z_\beta : \beta < \alpha\} \right), \quad \alpha \leq \omega_1.$$

Предполагая континуум-гипотезу, занумеруем счетными порядковыми числами α точки $y_\alpha \in S_\varphi^3$ и счетные множества $C_\alpha \subset O_{\omega_1}^4$. Отображение $p_\alpha^{\alpha+1} : X_{\alpha+1} \rightarrow X_\alpha$ определим следующим образом. В точку $y_\alpha \in S_\varphi^3 \subset X_\alpha$ “вставляем” конус над H , если

$y_\alpha \in A = \varphi^{-1}(B)$, или отрезок, если $y_\alpha \in S_\varphi^3 \setminus A$. В качестве семейства $\mathcal{C} = \mathcal{C}_\alpha$ из леммы 3.37 берутся все множества вида $C_\beta \cap O_\alpha^4$, $\beta \leq \alpha$. Таким образом, многообразие $M^{4,B}$ определяется компактом B , нумерацией точек из S_φ^3 и счетных подмножеств $O_{\omega_1}^4$, а также выбором отображений $p_\alpha^{\alpha+1} = g_{(y_\alpha, \mathcal{C}_\alpha)}$ из леммы 3.37. Многообразие $M^{4,m}$ из примера 3.25 есть многообразие вида M^{4,I^m} .

Многообразия из примера 3.24 строятся аналогичным образом. Обозначаться они будут символом M_B^4 , а многообразие M_m^4 есть многообразие вида $M_{I^m}^4$. Многообразие M_B^4 будет подмножеством предела непрерывного обратного спектра

$$\mathcal{S}_B = \{X_\alpha, p_\beta^\alpha : \alpha < \omega_1\},$$

состоящего из замкнутых “шаров” B_φ^4 и почти гомеоморфизмов p_β^α . Предел $X_{\omega_1} = M_B^4 \cup S_\varphi^3$ этого спектра будет стоун–чеховской компактификацией многообразия M_B^4 с наростом S_φ^3 , что во многом облегчает подсчет размерностей многообразия M_B^4 . Например, равенство

$$(20) \quad \dim X = \dim \beta X$$

для нормального пространства X автоматически влечет равенство $\dim M_m^4 = m$ (при $m \geq 4$).

Но имеются и существенные различия в построении многообразий $M^{4,B}$ и M_B^4 . Во-первых, короткие проекции $p_\alpha^{\alpha+1}$ спектра $\mathcal{S}_B$ будут иметь счетное число нетривиальных слоев, а именно: слои над точками y_β , $\beta \leq \alpha$. Отображение $p_\alpha^{\alpha+1}$ можно представлять себе как послойное произведение отображений вида $g_{(y_\beta, \mathcal{C}_{(\alpha,\beta)})}$, $\beta \leq \alpha$. При этом каждое множество $(p_\alpha^{\alpha+1})^{-1}(y_\alpha) \setminus \{y_\alpha\}$ в своем замыкании будет содержать конус $(p_\gamma^{\gamma+1})^{-1}(y_\alpha)$ для любого $\gamma > \alpha$. Соответственно открытый шар $O_{\alpha+1}^4$ получается из шара O_α^4 добавлением счетного числа множеств вида $H \times (0, 1]$, где H – либо точка, либо менгеровская кривая. Второе отличие состоит в “убивании” сходящихся последовательностей, т.е. в определении семейств $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$. С помощью континуум-гипотезы множество $O_{\omega_1}^4 = M_B^4$ отождествляется с ω_1 . А семейство $\mathcal{C}_{(\alpha,\beta)}$ состоит из множеств вида $J_\gamma \cap O_\alpha^4$, $\gamma \leq \alpha$, где J_γ – множество из формулировки принципа Йенсена $\diamond$ (см. § 2), и некоторых счетных множеств $C_{(\gamma,\beta)}$, $\gamma < \beta$, каждое из которых плотно в конусе $(p_\gamma^{\gamma+1})^{-1}(y_\gamma)$.

4. В этом пункте мы рассмотрим свойства бесконечномерности n -многообразий. Как и в предыдущем пункте, мы ограничимся 4-многообразиями. Из примеров 3.24 и 3.25 вытекает, что существуют 4-многообразия M сколь угодно большой размерности $\dim$. Приклеив к $\mathbb{R}^4$ счетное число таких многообразий, получим бесконечномерное в смысле лебеговой размерности 4-многообразие.

Существует несколько различных типов бесконечномерности топологических пространств.

3.38. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. Пусть d – некоторый размерностный инвариант. Скажем, что пространство X *0-d-счетномерно* (соответственно *d-счетномерно*), если X можно представить в виде такой суммы своих подпространств X_i , $i \in \omega$, что $dX_i \leq 0$ (соответственно X_i замкнуто и dX_i конечно).

Из сказанного выше вытекает

3.39. ПРЕДЛОЖЕНИЕ (СН). *Существует совершенно нормальное, сепарабельное 4-многообразие, которое бесконечномерно, но $\dim$ -счетномерно.*

Практически ничего не известно о соотношениях между различными типами счетномерности многообразий, кроме тривиальных импликаций, получающихся из справедливых для любого локально метризуемого пространства X неравенств

$$\text{ind } X \leq \dim X \leq \text{Ind } X.$$

В частности, не известен ответ на следующий вопрос.

3.40. ВОПРОС. Имеет ли место для наследственно (совершенно) нормального n -многообразия M разложение Урысона

$$M = X_0 \cup \dots \cup X_n$$

на индуктивно нульмерные слагаемые X_i ?

Более того, открытым остается

3.41. ВОПРОС. Всякое ли наследственно (совершенно) нормальное n -многообразие 0-ind-счетномерно?

Что касается размерности $\dim$, то M^n нельзя представить в виде суммы $n + 1$ слагаемых X_i размерности $\dim X_i = 0$, если $\dim M^n > n$. Но имеют место аналогии вопросов 3.40 и 3.41.

3.42. ВОПРОС. Имеет ли место для наследственно (совершенно) нормального n -многообразия M размерности $\dim M = m$ разложение Урысона

$$M = X_0 \cup \dots \cup X_m$$

на $\dim$ -нульмерные слагаемые X_i ?

3.43. ВОПРОС. Всякое ли наследственно (совершенно) нормальное конечномерное n -многообразие 0-dim-счетномерно?

Аналогичные вопросы можно поставить и по отношению к размерности Ind . По поводу вопроса 3.43 отметим, что существуют конечномерные компакты, не являющиеся 0-dim-счетномерными [114].

Напомним определения еще четырех типов бесконечномерности топологических пространств. Нормальное пространство X называется *A-слабо* (соответственно *S-слабо*) *бесконечномерным*, если для любого семейства (A_i, B_i) , $i \in \omega$, дизъюнктивных пар замкнутых подмножеств X существуют такие перегородки C_i в X между A_i и B_i , что $\bigcap \{C_i : i \in \omega\} = \emptyset$ (соответственно $\bigcap \{C_i : i \leq k\} = \emptyset$ для некоторого $k \in \omega$). Пространство, которое не является $A(S)$ -слабо бесконечномерным, называется $A(S)$ -*сильно бесконечномерным*.

Ясно, что всякое S -слабо бесконечномерное пространство является A -слабо бесконечномерным, а для счетно компактных пространств, в частности, для компактов, эти понятия совпадают. В таком случае будем просто говорить о слабой или сильной бесконечномерности.

Применительно к многообразиям большой интерес представляет также трансфинитная размерность Ind . Из примера 3.24 вытекает, что при $\diamond$ существуют 4-многообразия любой конечной размерности $\text{Ind} \geq 7$. Оказывается, что имеет место гораздо более сильное утверждение.

3.44. ПРИМЕР ($\diamond$) [119]. Для всякого счетного порядкового числа $\alpha \geq 5$ существует счетно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M_α^4 размерности

$$\text{Ind } M_\alpha^4 = \alpha.$$

При этом для $\alpha \geq \omega_0$ можно положить $M_\alpha^4 = M_{S^\alpha}^4$, где S^α – компакт трансфинитной размерности $\text{Ind } S^\alpha = \alpha$, построенный Ю. М. Смирновым [99]. Если же $\alpha < \omega_0$, то в качестве M_α^4 можно взять многообразие $M_{I^{\alpha-2}}^4$.

В связи с примером 3.44 возникает несколько вопросов.

3.45. ВОПРОС. Существует ли n -многообразие, большая трансфинитная размерность которого несчетна?

Стоит отметить, что существует простая конструкция, которая дает связную сумму многообразий M_α^4 , $5 \leq \alpha < \omega_1$. Но при этом получается 4-многообразие, большая трансфинитная размерность которого не определена.

С вопросом 3.34 перекликается следующий вопрос.

3.46. ВОПРОС. Существует ли n -многообразие M размерности $\dim M < \infty$, $\text{Ind } M \geq \omega_0$?

3.47. ВОПРОС. Можно ли построить многообразие типа M_α^4 при более слабых, чем принцип Йенсена, предположениях, например, при континуум-гипотезе?

Последний вопрос можно сузить и конкретизировать.

3.48. ВОПРОС. Верно ли, что для каждого конечного $l \geq 5$ существует многообразие типа $M^{4,B}$ размерности $\text{Ind } M^{4,B} = l$?

Из примера 3.25 вытекает лишь, что множество чисел вида $\text{Ind } M^{4,B}$ не ограничено и пересекается с каждым отрезком $[l, l+3]$.

Общеизвестно следующее утверждение.

3.49. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. Если трансфинитная размерность $\text{Ind } X$ нормального пространства X определена, то оно S -слабо бесконечномерно.

Обратить это утверждение нельзя даже в классе метризуемых компактов. Это показывает построенный Р. Полем [87] пример слабо бесконечномерного компакта P , не являющегося 0-счетномерным. А известно, что 0-счетномерность метризуемого компакта X эквивалентна существованию трансфинитной размерности $\text{Ind } X$. Оказывается, что обратить предложение 3.49 нельзя и в классе дифференцируемых многообразий.

3.50. ПРИМЕР ($\diamond$) [119]. Существует счетно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое, слабо бесконечномерное 4-многообразие M , трансфинитная размерность Ind которого не определена.

В качестве такого многообразия M можно взять многообразие вида M_P^4 , где P – только что упомянутый компакт Поля. Если бы трансфинитная размерность $\text{Ind } M_P^4$ была определена, то была бы определена и трансфинитная размерность $\text{Ind } \beta M_P^4$. Но,

как отмечалось выше, $\beta M_P^4 = M_P^4 \cup S_\varphi^3$. Следовательно, была бы определена и трансфинитная размерность $\text{Ind } S_\varphi^3$. А это противоречит тому, что S_φ^3 содержит несчетномерный компакт P . Что касается слабой бесконечномерности многообразия M_P^4 , то она вытекает из следующего утверждения, имеющего и самостоятельный интерес.

3.51. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [119]. *Многообразие $M_B^n \equiv M_\varphi^n$ слабо бесконечномерно тогда и только тогда, когда слабо бесконечномерен компакт S_φ^3 .*

3.52. ВОПРОС. Можно ли построить слабо бесконечномерное n -многообразие, трансфинитная размерность Ind которого не определена, при более слабых, чем принцип Йенсена, предположениях? В частности, будет ли $M^{4,P}$ таким многообразием?

3.53. ПРИМЕР ($\diamond$) [119]. Существует счетно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M , которое сильно бесконечномерно.

Из предложения 3.51 вытекает, что в качестве такого многообразия M можно взять многообразие вида M_B^4 , где $B \subset Q$ – сильно бесконечномерный компакт, например, $B = Q$. Если отказаться от счетной компактности, то такое многообразие можно построить и при континуум-гипотезе.

3.54. ПРИМЕР (СН) [119]. Существует совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M , которое A -сильно бесконечномерно.

В качестве такого многообразия можно взять многообразие $M^{4,Q}$. Это вытекает из следующего утверждения.

3.55. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Если $B \subset Q$ – сильно бесконечномерный компакт, то многообразие $M^{4,B}$ A -сильно бесконечномерно.*

3.56. ПРИМЕР (СН) [37]. Существует совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M , которое A -слабо бесконечномерно, но S -сильно бесконечномерно.

Таким многообразием является, например, $M^{4,B}$, где B – александровская компактификация дискретной суммы кубов I^n , $n \in \omega$.

Известно, что наследственно нормальное 0-dim-счетномерное пространство A -слабо бесконечномерно, но отнюдь не обязано быть S -слабо бесконечномерным даже в случае локально компактных пространств со счетной базой. Тем более интересным представляется следующий вопрос.

3.57. ВОПРОС. Является ли всякое наследственно (совершенно) нормальное 0-dim-счетномерное n -многообразие S -слабо бесконечномерным?

Заметим, что положительный ответ на вопрос 3.43 влечет отрицательный ответ на вопрос 3.57, поскольку связная сумма многообразий M_m^4 из 3.24 (или $M^{4,m}$ из 3.25), $5 \leq m < \infty$, S -сильно бесконечномерна.

5. Последний раздел статьи посвятим когомологической размерности многообразий. Напомним (см. [53]), что *когомологической размерностью* $c\text{-dim}_G X$ локально компактного пространства X *относительно абелевой группы коэффициентов* G называется наибольшее целое n , для которого существует такое локально компактное

множество $A \subset X$, что $H^n(A; G) \neq 0$. Здесь через $H^i(Y; G)$ обозначается i -я группа когомологий локально компактного пространства Y . С определением этих групп и их свойствами читатель может познакомиться, например, в [22]. Группу $H^i(Y, \mathbb{Z})$, где $\mathbb{Z}$ – группа целых чисел, будем обозначать через $H^i(Y)$. Наконец, размерностный инвариант $c\text{-dim}_{\mathbb{Z}} X$ обозначим через $c\text{-dim } X$ и назовем его *когомологической размерностью* локально компактного пространства X .

Подмножество U локально компактного пространства X называется *ограниченным*, если его замыкание компактно. Следующее утверждение является очень удобной для применений характеристикой когомологической размерности.

3.58. ТЕОРЕМА [52]. *Для локально компактного пространства X следующие условия равносильны:*

- 1) $c\text{-dim } X \leq n$;
- 2) $H^{n+1}(U) = 0$ для любого открытого множества U , ограниченного в X ;
- 3) гомоморфизм $j: H^n(A) \rightarrow H^n(B)$, индуцированный вложением $B \subset A$, является эпиморфизмом для любой пары (A, B) компактов из X .

Из условия 3) теоремы 3.58 вытекает следующее утверждение (см. [53, замечание 1]).

3.59. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для любого локально компактного пространства X мы имеем*

$$c\text{-dim } X = \sup\{c\text{-dim } F : F \subset X \text{ есть компакт}\}.$$

Когомологическая и лебеговы размерности связаны неравенством

$$(21) \quad c\text{-dim } X \leq \dim X,$$

верным для любого локально компактного пространства X (см. [53, замечания 2 и 3]). В то же время основная теорема гомологической теории размерности, полученная для метризуемых компактов П. С. Александровым [1] еще в 1932 г. (общий случай см. в [3] и [9]), гласит, что

$$(22) \quad c\text{-dim } X = \dim X$$

для всякого компакта X размерности $\dim X < \infty$.

Одной из основных проблем гомологической теории размерности, остававшейся нерешенной более 50 лет, была проблема Александрова о том, верно ли равенство (22) для произвольного метризуемого компакта X . Эта проблема была решена А. Н. Дранишниковым [33], который построил бесконечномерный компакт D когомологической размерности $c\text{-dim } D = 3$. Что касается многообразий, из предложения 3.59 вытекает равенство

$$(23) \quad c\text{-dim } M^n = n$$

для всякого n -многообразия M^n . Поэтому из 3.25 получаем следующее утверждение.

3.60. ТЕОРЕМА (СН). *Существует совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое 4-многообразие M^4 , для которого*

$$(24) \quad c\text{-dim } M^4 < \dim M^4 < \infty.$$

3.61. ЗАМЕЧАНИЕ. Из 3.24 вытекает, что в предположении принципа Йенсена $\diamond$ существует счетно компактное 4-многообразие, удовлетворяющее всем условиям теоремы 3.60.

Равенство (22) вместе с теоремой 3.60 показывают, что размерность $c\text{-dim}$ не улавливает специфики размерностного поведения многообразий “в бесконечности”. Более адекватно отражает ситуацию в этом плане размерностный инвариант $cA\text{-dim}$, предложенный П. С. Александровым [5] в 1947 г.

3.62. ОПРЕДЕЛЕНИЕ. *Когомологической размерностью $cA\text{-dim } X$ нормального пространства X называется наибольшее целое n , для которого существует такое замкнутое множество $F \subset X$, что отлична от нуля группа спектральных целочисленных когомологий $H^n(X; F)$, определяемых посредством системы всех конечных открытых покрытий пространства X .*

3.63. ТЕОРЕМА [5]. *Для нормального пространства X имеем*

$$cA\text{-dim } X = cA\text{-dim } \beta X = c\text{-dim } \beta X.$$

Из этой теоремы и равенств (20) и (22) вытекает

3.64. ПРЕДЛОЖЕНИЕ. *Для произвольного нормального пространства X конечной размерности $\dim$, в частности, для конечномерного многообразия, мы имеем*

$$cA\text{-dim } X = \dim X.$$

Следовательно, для размерности $cA\text{-dim}$ многообразий не может возникнуть феномен соотношения (24). Что касается размерности $cA\text{-dim}$ бесконечномерных многообразий, при ее изучении существенную роль играет следующее утверждение.

3.65. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [119]. *Для произвольного нормального n -многообразия M^n мы имеем*

$$cA\text{-dim } M^n = \max\{n, c\text{-dim}(\beta M^n \setminus M^n)\}.$$

Следующий пример можно считать решением проблемы Александрова (основной проблемы гомологической теории размерности) для многообразий.

3.66. ПРИМЕР ($\diamond$) [119]. Для произвольных целых m и n , подчиненных условию $4 \leq n \leq m$, существует счетно компактное, совершенно нормальное, сепарабельное, дифференцируемое n -многообразие M^n размерности

$$(25) \quad m = cA\text{-dim } M^n < \dim M^n = \infty.$$

Многообразие M^n является многообразием типа M_B^n , где B есть дизъюнктивная сумма компакта Дранишникова D и m -мерного куба I^m . В доказательстве равенства $m = cA\text{-dim } M^n$ существенную роль играют предложение 3.65 и равенство (23).

Что касается общих фактов о когомологической размерности Александрова $cA\text{-dim}$, теорему 3.63 и предложение 3.64 можно дополнить следующим утверждением.

3.67. ПРЕДЛОЖЕНИЕ [119]. *Если трансфинитная размерность $\text{Ind } X$ пространства X определена, то*

$$cA\text{-dim } X = \dim X.$$

3.68. ЗАМЕЧАНИЕ. Многообразие M^n из примера 3.66 сильно бесконечномерно. В самом деле, из построения компакта Дранишникова D вытекает его сильная бесконечномерность (это было отмечено самим А. Н. Дранишниковым). Поэтому сильно бесконечномерными являются компакт $S_\varphi^3 \supset D$, а вместе с ним (по предложению 3.51) и многообразие M^n . В связи с этим возникает следующий вопрос.

3.69. ВОПРОС. Существует ли слабо бесконечномерное n -многообразие M^n , удовлетворяющее условию (25)?

По поводу примера 3.66 возникают и другие вопросы. Например,

3.70. ВОПРОС. Существует ли n -многообразие M^n , удовлетворяющее условию (25), при более слабых, чем $\diamond$, предположениях?

Для континуум-гипотезы этот вопрос можно конкретизировать следующим образом.

3.71. ВОПРОС. Верно ли, что

$$cA\text{-dim } M^{n,D} < \infty?$$

Но наилучшим ответом на вопрос 3.70 было бы многообразие, построенное без дополнительных теоретико-множественных предположений (ср. с вопросом 3.29). Это невозможно, например, если положительно решается вопрос 3.27. Но и более слабая (в свете предложения 3.64) версия вопроса 3.27 препятствует (в случае положительного решения) исчерпывающему положительному решению вопроса 3.70. А именно,

3.72. ВОПРОС. Верно ли, что при $MA + \neg CH$ для всякого нормального (сепарбельного) многообразия M^n имеет место равенство

$$cA\text{-dim } M^n = \dim M^n?$$

В заключение сформулируем одну общую проблему.

3.73. ВОПРОС. Что можно сказать о размерности произведения многообразий?

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] Alexandroff P. S. Dimensionstheorie. Ein Beitrag zur Geometrie der abgeschlossenen Mengen // Math. Ann. 1932. V. 106. P. 161–238.
- [2] Alexandroff P. S. On local properties of closed sets // Ann. of Math. 1935. V. 36. P. 1–35.
- [3] Александров П. С. Общая теория гомологий // Уч. зап. Моск. ун-та. 1940. Т. 45. С. 3–60.
- [4] Александров П. С. О размерности бикompактных пространств // Докл. АН СССР. 1940. Т. 26. С. 627–630.
- [5] Alexandroff P. S. On dimension of normal spaces // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. 1947. V. 189. P. 11–39.
- [6] Александров П. С. Предисловие к книге Гуревича и Волмэна “Теория размерности”. М.: ИЛ, 1948.
- [7] Александров П. С. П. С. Урысон и его место в математической науке // Введение к книге: П. С. Урысон. Труды по топологии и другим областям математики. Том I. М.–Л.: ГИТТЛ, 1951. С. 9–42.
- [8] Александров П. С. О некоторых старых задачах гомологической теории размерности // Труды международного симпозиума по топологии и ее применениям, Херцег-Нови (Югославия), 1968. С. 38–42.
- [9] Александров П. С. Введение в гомологическую теорию размерности и общую комбинаторную топологию. М.: Наука, 1975.
- [10] Александров П. С., Пасынков Б. А. Введение в теорию размерности. М.: Наука, 1973.
- [11] Александров П. С., Пономарев В. И. О некоторых классах n -мерных пространств // Сиб. матем. журн. 1960. Т. 1. № 1. С. 3–13.
- [12] Anderson R. D. Monotone interior dimension-raising mappings // Duke Math. J. 1952. V. 19. P. 359–366.
- [13] Anderson R. D. Continuous curve admitting monotone open maps onto all locally connected metric continua // Bull. Amer. Math. Soc. 1956. V. 62. P. 264–265.
- [14] Архангельский А. В. Аддиционная теорема для веса множеств, лежащих в бикompактах // Докл. АН СССР. 1959. Т. 126. С. 239–241.
- [15] Архангельский А. В. О совпадении размерности $\text{ind } G$ и $\dim G$ для локально бикompактных групп // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 980–981.
- [16] Архангельский А. В. Некоторые последние достижения и открытые проблемы в общей топологии // УМН. 1997. Т. 52. № 5. С. 45–70.
- [17] Bing R. H. Higher-dimensional hereditarily indecomposable continua // Trans. Amer. Math. Soc. 1951. V. 71. № 2. P. 267–273.
- [18] Brown M. Some application of an approximation theorem for inverse limits // Proc. Amer. Math. Soc. 1960. V. 11. P. 478–483.
- [19] Brown M. The monotone union of open n -cells is an open n -cell // Proc. Amer. Math. Soc. 1961. V. 12. P. 812–814.
- [20] Brouwer L. E. J. Beweis der Invarianz der Dimensionzahl // Math. Ann. 1911. V. 70. P. 161–165.
- [21] Brouwer L. E. J. Über den natürlichen Dimensionsbegriff // J. Reine Angew. Math. 1913. V. 142. P. 145–152.
- [22] Bredon G. E. Sheaf Theory. New York: McGraw-Hill, 1967.
- [23] Веденисов Н. Б. Замечания о размерности топологических пространств // Уч. зап. Моск. ун-та. 1939. Т. 30. С. 131–140.
- [24] Веденисов Н. Б. О размерности в смысле Е. Сëch’a // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1941. Т. 5. С. 211–216.
- [25] Vopenka P. О размерности компактных пространств // Czech. Math. J. 1958. V. 8. № 3. P. 319–327.

- [26] Grauert H. On Levi's problem and the imbedding of real-analytic manifolds // *Ann. of Math.* 1958. V. 68. P. 460–472.
- [27] Hurewicz W. Normalbereiche und Dimensionstheorie // *Math. Ann.* 1927. V. 96. P. 736–764.
- [28] Hurewicz W. Über das Verhältnis separabler Räume zu kompakten Räumen // *Proc. Akad. Amsterdam.* 1927. V. 30. P. 425–430.
- [29] Dyer E. Certain transformations which lower dimension // *Ann. Math.* 1956. V. 63. №1. P. 15–19.
- [30] Dowker C. H. Inductive dimension of completely normal spaces // *Quart. J. Math. Ser. 2.* 1953. V. 16. №4. P. 267–281.
- [31] Delistatis G., Watson S. A regular space with a countable network and different dimensions // *Preprint. Toronto: Toronto Univ.*, 1994.
- [32] Дранишников А. Н. Абсолютные экстензоры в размерности n и n -мягкие отображения, повышающие размерность // *УМН.* 1984. Т. 39. №5. С. 55–95.
- [33] Дранишников А. Н. О проблеме П. С. Александрова // *Матем. сб.* 1988. Т. 135. С. 551–557.
- [34] Dranishnikov A. N., Repovš D., Scepin E. V. Dimension of products with continua // *Topol. Proc.* 1993. V. 18. P. 57–73.
- [35] Дулев В. А. О бесконечномерных n -многообразиях // *Вестн. МГУ. Сер. матем., мех.* 1996. №4. С. 12–17.
- [36] Зарелуа А. В. О теореме Гуревича // *Докл. АН СССР.* 1961. Т. 141. №4. С. 777–780.
- [37] Зарелуа А. В. Равенство размерностей и бикомпактные расширения // *Докл. АН СССР.* 1962. Т. 144. №4. С. 713–716.
- [38] Зарелуа А. В. О теореме Гуревича // *Матем. сб.* 1963. Т. 60. №1. С. 17–28.
- [39] Зарелуа А. В. О равенстве размерностей // *Матем. сб.* 1963. Т. 62. №3. С. 713–716.
- [40] Zenor P., Kozłowski G. A differentiable, perfectly normal, nonmetrizable manifold // *Topology Proc. Conf.* 1980. V. 4. №2. P. 453–461.
- [41] Zenor P., Reed G. M. Metrization of Moore spaces and generalized manifolds // *Fund. Math.* 1976. V. 91. P. 203–209.
- [42] Zenor P., Rudin M. E. A perfectly normal nonmetrizable manifold // *Houston J. Math.* 1976. V. 2. P. 129–144.
- [43] Jensen R. B. The fine structure of the constructible hierarchy // *Ann. of Math. Logic.* 1972. V. 4. P. 229–308.
- [44] Йёх Т. Теория множеств и метод форсинга. М.: Мир, 1973.
- [45] Cantor G. Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre // *J. Reine Angew. Math.* 1878. V. 84. P. 242–258.
- [46] Cantor G. Über unendliche lineare Punktmannigfaltigkeiten. 5 // *Math. Ann.* 1883. V. 21. P. 545–586.
- [47] Карасев А. В. Об индуктивной размерности подмножеств некоторых неметризуемых многообразий // *Вестн. МГУ. Сер. матем., мех.* 1997. №5. С. 11–14.
- [48] Катетов М. О размерности метрических пространств // *Докл. АН СССР.* 1951. Т. 79. С. 189–191.
- [49] Катетов М. О размерности несепарабельных пространств. I // *Czech. Math. J.* 1952. Т. 2. С. 333–368.
- [50] Katuta Y. A note on the inductive dimension of product spaces // *Proc. Japan Acad.* 1966. V. 42. P. 1011–1015.
- [51] Koch W., Puppe D. Differenzierbare Strukturen und Manigfaltigkeiten ohne abzählbare Basis // *Arch. Math.* 1968. V. 19. P. 95–102.
- [52] Cohen H. A cohomological definition of dimension of locally compact Hausdorff spaces // *Duke Math. J.* 1954. V. 21. №2. P. 209–224.
- [53] Кузьминов В. И. Гомологическая теория размерности // *УМН.* 1968. Т. 23. №5. С. 3–49.

- [54] Lebesgue H. Sur la non applicabilité de deux domaines appartenant respectivement à deux espaces, de n et $n + p$ dimensions // Math. Ann. 1911. V. 70. P. 166–168.
- [55] Lebesgue H. Sur les correspondances entre les points de deux espaces // Fund. Math. 1921. V. 2. P. 256–285.
- [56] Лейбо И. М. О равенстве размерностей для замкнутых образов метрических пространств // Докл. АН СССР. 1974. Т. 216. № 3. С. 498–501.
- [57] Локуцкий О. В. О размерности бикомпактов // Докл. АН СССР. 1949. Т. 67. № 2. С. 217–219.
- [58] Лунц А. Л. Бикомпакт, индуктивная размерность которого больше, чем размерность, определенная с помощью покрытий // Докл. АН СССР. 1949. Т. 66. № 5. С. 801–803.
- [59] Mardesic S. Chainable continua and inverse limits // Periodicum mat.-phis. astron. 1959. V. 14. P. 219–232.
- [60] Menger K. Über die Dimensionalität von Punktmengen. I // Monatsh. für Math. und Phys. 1923. V. 33. P. 148–160.
- [61] Menger K. Über die Dimension von Punktmengen. II // Monatsh. für Math. und Phys. 1926. V. 34. P. 137–161.
- [62] Mizokami T. The equality of large and small inductive dimensions // J. London Math. Soc. 1979. V. 20. № 3. P. 541–543.
- [63] Moore R. L. Concerning separability // Proc. Nat. Acad. Sci. 1942. V. 28. P. 56–58.
- [64] Morita K. On the dimension of normal spaces. I // Jap. J. Math. 1950. V. 20. P. 5–36.
- [65] Morita K. On the dimension of normal spaces. II // J. Math. Soc. Japan. 1950. V. 2. P. 16–33.
- [66] Morita K. On dimension of product spaces // Amer. J. Math. 1953. V. 75. № 2. P. 205–223.
- [67] Morita K. Normal families and dimension theory for metric spaces // Math. Ann. 1954. V. 128. P. 350–362.
- [68] Nagami K. R. Finite-to-one closed mappings and dimension. IV // Proc. Japan Acad. 1961. V. 37. № 4. P. 193–195.
- [69] Nagami K. R. Mappings defined on 0-dimensional spaces and dimension theory // J. Math. Soc. Japan. 1962. V. 14. № 4. P. 101–118.
- [70] Nagami K. R. A note on the large inductive dimension of totally normal spaces // J. Math. Soc. Japan. 1969. V. 21. P. 282–290.
- [71] Nagata J. Обзор теории размерности. III // Труды МИАН. 1983. Т. 154. С. 186–199.
- [72] Nyikos P. J. The theory of nonmetrizable manifolds // Handbook of Set-Theoretic Topology. Amsterdam: North-Holland, 1984. P. 633–684.
- [73] Пасынков Б. А. О полиэдральных спектрах и размерности бикомпактов, в частности, бикомпактных групп // Докл. АН СССР. 1958. Т. 121. № 1. С. 45–48.
- [74] Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для локально бикомпактных групп // Докл. АН СССР. 1960. Т. 132. № 5. С. 1035–1037.
- [75] Пасынков Б. А. О совпадении различных определений размерности для факторпространств локально бикомпактных групп // УМН. 1962. Т. 17. № 5. С. 129–135.
- [76] Пасынков Б. А. Об обратных спектрах и размерности // Докл. АН СССР. 1961. Т. 138. № 5. С. 1013–1015.
- [77] Пасынков Б. А. О змеевидных бикомпактах // Czech. Math. J. 1963. V. 13. № 3. P. 437–476.
- [78] Пасынков Б. А. Об одном классе отображений и о размерности нормальных пространств // Сиб. матем. журн. 1964. Т. 5. № 2. С. 356–376.
- [79] Пасынков Б. А. Почти метризуемые группы // Докл. АН СССР. 1965. Т. 161. № 2. С. 281–284.
- [80] Пасынков Б. А. О размерности прямоугольных произведений // Докл. АН СССР. 1975. Т. 221. № 2. С. 291–294.
- [81] Пасынков Б. А. О пространствах с бикомпактной группой преобразований // Докл. АН СССР. 1976. Т. 231. № 1. С. 39–42.

- [82] Пасынков Б. А. О размерности пространств с бикомпактной группой преобразований // УМН. 1976. Т. 31. №5. С. 112–120.
- [83] Пасынков Б. А., Лифанов И. К. Примеры бикомпактов с несовпадающими индуктивными размерностями // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. №2. С. 276–278.
- [84] Пасынков Б. А., Лифанов И. К. О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. №3. С. 503–506.
- [85] Пасынков Б. А., Федорчук В. В., Филиппов В. В. Теория размерности // Итоги науки и техники. Алг. Топол. Геом. Т. 17, 1979. С. 229–306.
- [86] Peano G. // Math. Ann. 1890. V. 36. P. 157.
- [87] Pol R. A weakly infinite-dimensional compactum which is not countable-dimensional // Proc. Amer. Math. Soc. 1981. V. 82. P. 634–636.
- [88] Пономарев В. И. О некоторых применениях теории проекционных спектров к теории топологических пространств // Докл. АН СССР. 1962. Т. 144. №5. С. 993–996.
- [89] Пономарев В. И. Паракомпакты, их проекционные спектры и непрерывные отображения // Матем. сб. 1963. Т. 60. №1. С. 89–119.
- [90] Постников М. М. О паракомпактности клеточных полиэдров // УМН. 1965. Т. 20. №5. С. 226–230.
- [91] Постников М. М. Гладкие многообразия. М.: Наука, 1987.
- [92] Poincaré H. Pourquoi l'espace à trois dimensions // Revue de Metaph. et de Morale. 1912. V. 20. P. 483–504.
- [93] Roy P. Failure of equivalence of dimension concepts for metric spaces // Bull. Amer. Math. Soc. 1962. V. 68. P. 609–613.
- [94] Roy P. Nonequality of dimension for metric spaces // Trans. Amer. Math. Soc. 1968. V. 134. P. 117–132.
- [95] Rudin M. E. The undecidability of the existence of a perfectly normal nonmetrizable manifold // Houston J. Math. 1979. V. 5. P. 249–252.
- [96] Rudin M. E. Two non-metrizable manifolds // Topol. Appl. 1990. V. 35. №2–3. P. 137–152.
- [97] Szentmiklossy Z. S -spaces and L -spaces under Martin's axiom // Coll. Math. Soc. Janos Bolyai. 1978. V. 23. P. 1139–1145.
- [98] Смирнов Ю. М. Некоторые соотношения в теории размерности // Матем. сб. 1951. Т. 29. №1. С. 151–172.
- [99] Смирнов Ю. М. Об универсальных пространствах для некоторых классов пространств // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1959. Т. 23. С. 185–196.
- [100] Тумаркин Л. А. Zur allgemeinen Dimensionstheorie // Proc. Akad. Amsterdam. 1925. V. 28. P. 994–996.
- [101] Тумаркин Л. А. Beitrag zur allgemeinen Dimensionstheorie // Матем. сб. 1926. Т. 33. С. 57–86.
- [102] Wilson D. C. Open mappings of the universal curve onto continuous curves // Trans. Amer. Math. Soc. 1972. V. 168. P. 497–515.
- [103] Whitney H. Differentiable manifolds // Ann. of Math. 1936. V. 37. P. 645–680.
- [104] Урысон П. С. Les multiplicités Cantoriennes // C. R. Acad. Paris. 1922. V. 175. P. 440–442.
- [105] Урысон П. С. Sur la ramification des lignes Cantoriennes // C. R. Acad. Paris. 1922. V. 175. P. 481–483.
- [106] Урысон П. С. Memoire sur les multiplicités Cantoriennes // Fund. Math. 1925. V. 7. P. 30–137.
- [107] Урысон П. С. Memoire sur les multiplicités Cantoriennes (suite) // Fund. Math. 1926. V. 8. P. 225–359.
- [108] Урысон П. С. Memoire sur les multiplicités Cantoriennes. II. Les lignes Cantoriennes // Verhandelingen der Kon. Akademie van Wetenschappen, Amsterdam, 1 sect. 1928. V. 13. №4. P. 1–172.

- [109] Федорчук В. В. Упорядоченные множества и произведение топологических пространств // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1966. № 4. С. 66–70.
- [110] Федорчук В. В. О бикомпактах с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1968. Т. 182. № 2. С. 275–277.
- [111] Федорчук В. В. Пример однородного бикомпакта с несовпадающими размерностями // Докл. АН СССР. 1971. Т. 198. № 6. С. 1283–1286.
- [112] Федорчук В. В. Бикомпакты без промежуточных размерностей // Докл. АН СССР. 1973. Т. 213. № 4. С. 795–798.
- [113] Федорчук В. В. О размерности κ -метризуемых бикомпактов, в частности, пространств Дугунджи // Докл. АН СССР. 1977. Т. 234. № 1. С. 30–33.
- [114] Федорчук В. В. Бесконечномерные бикомпакты // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1978. Т. 42. № 5. С. 1162–1178.
- [115] Федорчук В. В. Об открытых отображениях // УМН. 1982. Т. 37. № 4. С. 187–188.
- [116] Федорчук В. В. О размерности нигде не плотных подмножеств многообразий // Вестн. МГУ. Сер. матем., мех. 1992. № 2. С. 23–28.
- [117] Fedorchuk V. V. A differentiable manifold with noncoinciding dimensions // Topol. Appl. 1993. V. 54. № 1–3. P. 221–239.
- [118] Федорчук В. В. Дифференцируемое многообразие с несовпадающими размерностями при CN // Матем. сб. 1995. Т. 186. № 1. С. 149–160.
- [119] Федорчук В. В. О трансфинитной и кохомологической размерности 4-многообразий // Труды МИАН. 1996. Т. 211. С. 193–212.
- [120] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988.
- [121] Федорчук В. В., Филиппов В. В. Многообразия с несовпадающими индуктивными размерностями // Матем. сб. 1992. Т. 183. № 9. С. 29–44.
- [122] Филиппов В. В. Бикомпакт с несовпадающими индуктивными размерностями // Докл. АН СССР. 1969. Т. 184. № 5. С. 1050–1053.
- [123] Филиппов В. В. Бикомпакт с первой аксиомой счетности с несовпадающими размерностями ind и dim // Докл. АН СССР. 1969. Т. 186. № 5. С. 1020–1022.
- [124] Филиппов В. В. Решение одной задачи П. С. Александрова (бикомпакт с несовпадающими индуктивными размерностями) // Матем. сб. 1970. Т. 83. № 1. С. 42–60.
- [125] Филиппов В. В. О бикомпактах с несовпадающими индуктивными размерностями // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 2. С. 289–292.
- [126] Филиппов В. В. О бикомпактах с несовпадающими размерностями ind и dim // Докл. АН СССР. 1970. Т. 192. № 3. С. 516–519.
- [127] Филиппов В. В. О размерности нормальных пространств // Докл. АН СССР. 1973. Т. 209. № 4. С. 805–807.
- [128] Fleissner W. G. Normal Moore spaces in the constructible universe // Proc. Amer. Math. Soc. 1974. V. 46. P. 294–298.
- [129] French J. A. Some completely normal spaces in which small and large inductive dimensions coincide // Houston J. Math. 1976. V. 2. № 2. P. 181–193.
- [130] Čech E. Sur la dimension des espaces parfaitement normaux // Bull. Int. Acad. Sci. Boheme. 1932. V. 33. P. 38–55.
- [131] Чигогидзе А. Ч. On a generalization of perfectly normal spaces // Topol. Appl. 1982. V. 13. P. 15–20.
- [132] Шепин Е. В. О топологических произведениях, топологических группах и новом классе пространств, более общих, чем метрические // Докл. АН СССР. 1976. Т. 226. № 3. С. 527–529.
- [133] Шепин Е. В. Топология предельных пространств несчетных обратных спектров // УМН. 1976. Т. 31. № 5. С. 191–226.
- [134] Шепин Е. В. Конечномерный бикомпактный абсолютный ретракт метризуем // Докл. АН СССР. 1977. Т. 233. № 3. С. 304–307.

- [135] Шепин Е. В. О κ -метризуемых пространствах // Изв. АН СССР. Сер. матем. 1979. Т. 43. № 2. С. 442–478.
- [136] Шепин Е. В. Функторы и несчетные степени компактов // УМН. 1981. Т. 36. № 3. С. 3–62.
- [137] Engelking R. General Topology. Warszawa: PWN, 1977.
- [138] Engelking R. Dimension Theory. Warszawa/Amsterdam: PWN/North-Holland, 1978.
- [139] Engelking R. Theory of Dimension, Finite and Infinite. Lemgo: Heldermann, 1995.

Московский государственный
университет им. М. В. Ломоносова

Поступила в редакцию
29.05.1998