Math-Net.Ru

Общероссийский математический портал

В. М. Бухштабер, А. Ю. Лазарев, Дискретное преобразование Гельфанда и двойственное к нему, *УМН*, 2004, том 59, выпуск 1, 183–184

DOI: <https://doi.org/10.4213/rm710>

Использование Общероссийского математического портала Math-Net.Ru подразумевает, что вы прочитали и согласны с пользовательским соглашением

<http://www.mathnet.ru/rus/agreement>

Параметры загрузки:

IP: 54.224.60.19

26 апреля 2023 г., 05:03:21

ДИСКРЕТНОЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ГЕЛЬФАНДА И ДВОЙСТВЕННОЕ К НЕМУ

В. М. БУХШТАБЕР, А. Ю. ЛАЗАРЕВ

Пусть L – коммутативное кольцо без делителей нуля и K – бесконечное подкольцо в L . Рассмотрим некоторую K -алгебру A , являющуюся свободным K -модулем, и множество ее K -точек $A(K)$, т.е. множество всех гомоморфизмов K -алгебр $A \rightarrow K$. Пусть $L[A(K)]$ – свободный L -модуль, натянутый на множество $A(K)$, и $\text{Map}(A(K), L)$ – кольцо всех функций $A(K) \rightarrow L$.

Дискретным преобразованием Гельфанда будем называть отображение

$$ev_{L/K}: A \otimes L \rightarrow \text{Map}(A(K), L), \quad ev(a \otimes l)(x) = lx(a). \quad (1)$$

Кольцо $\text{Map}(A(K), L)$ имеет каноническую структуру топологического L -модуля с системой окрестностей нуля U_X , где X пробегает все конечные подмножества в $A(K)$, а U_X – идеал функций, обращающихся в нуль на X . Используя непрерывные L -гомоморфизмы, получаем двойственное преобразование

$$ev_{L/K}^*: L[A(K)] \rightarrow (A \otimes L)^* := \text{Hom}_K(A, L), \quad (2)$$

принимаяющее значения в топологическом L -модуле с системой окрестностей нуля U_W , где W пробегает конечномерные K -подмодули W в A , а U_W состоит из всех K -гомоморфизмов $A \rightarrow L$, обращающихся в нуль на W .

УТВЕРЖДЕНИЕ 1. Гомоморфизм $ev_{L/K}^*$ является мономорфизмом.

Доказательство опирается на так называемый трюк Артина, при помощи которого показывается линейная независимость характеров, см. [1]. Этот трюк применим в нашем более общем случае, так как $ev_{L/K}^*$ является гомоморфизмом A -модулей. Имеют место очевидные вложения симметрических степеней $i_n: \text{Sym}^n(A(K)) \subset L[A(K)]$, $n = 1, 2, \dots$. Описание композиции $ev_{L/K}^* i_n$ в терминах n -гомоморфизмов, обобщающих высшие характеры Фробениуса, дано в [2].

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 1. Пусть $\widehat{L}$ – поле частных кольца L . Кольцом числовых функций $\text{Num}_{L/K}(A)$ называется подкольцо в $A \otimes \widehat{L}$, состоящее из всех элементов, которые при отображении $ev_{\widehat{L}/K}$ переходят в функции $A(K) \rightarrow L$.

L -модулем числовых функционалов $\mathcal{N}\text{um}_{L/K}(A)$ называется L -подмодуль в $\widehat{L}[A(K)]$, состоящий из всех элементов, которые при отображении $ev_{\widehat{L}/K}^*$ переходят в K -гомоморфизмы $A \rightarrow L$.

Положим $\text{Num}_{L/K}(K[x]) = \text{Num}_{L/K}$ и $\mathcal{N}\text{um}_{L/K}(K[x]) = \mathcal{N}\text{um}_{L/K}$.

ПРИМЕР 1. Кольцо $\text{Num}_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$ состоит из полиномов $p(x)$ с рациональными коэффициентами, которые принимают целые значения при целых x . Это кольцо аддитивно порождено классическими числовыми полиномами $P_k(x) = x(x-1)\dots(x-k+1)/k!$, $k = 0, 1, 2, \dots$.

Кольцо $\text{Num}_{\mathbb{Z}/\mathbb{Z}}$ нашло важные приложения в алгебраической топологии, см. [3]–[5]. В общем случае задача описания колец $\text{Num}_{L/K}$ не решена. В то же время для $\mathcal{N}\text{um}_{L/K}$ имеет место следующий общий результат.

Пусть $\omega = (k_1, \dots, k_n)$ – набор из n попарно различных элементов кольца K . Рассмотрим матрицу Вандермонда $V_\omega = (k_i^j, 1 \leq i \leq n, 0 \leq j \leq n-1)$ и обозначим через $V_{l,\omega}$ матрицу, полученную из V_ω заменой l -й строки строкой $([k_1], \dots, [k_n])$, где $[k_i]$ – образующий кольца $L[K]$, соответствующий элементу k_i . Положим $e_{l,\omega} = \frac{\det V_{l,\omega}}{\det V_\omega} \in \widehat{L}[K]$.

ТЕОРЕМА 1. $e_{l,\omega} \in \mathcal{N}\text{um}_{L/K}$, и любой элемент из $\mathcal{N}\text{um}_{L/K} \subset \widehat{L}[K]$ вида $\sum \alpha_i [k_i]$ принадлежит свободному L -модулю, порожденному элементами $e_{l,\omega}$, где $1 \leq l \leq n$.

ТЕОРЕМА 2. Следующие условия эквивалентны: (1) $\mathcal{N}\text{um}_{L/K} = L[K]$; (2) образ отображения $ev_{L/K}^*: L[x] \rightarrow \text{Map}(K, L)$ всюду плотен; (3) кольцо L содержит поле частных $\widehat{K}$ кольца K .

ОПРЕДЕЛЕНИЕ 2. Пусть Q некоторое подкольцо коммутативного кольца R без делителей нуля. Скажем, что R является DS -расширением кольца Q , если существует бесконечная последовательность элементов $q_i \in Q$, $i = 1, 2, \dots$, такая, что $(q_i - q_j)$ обратимы в R для всех $i \neq j$.

ПРИМЕР 2. Любое DS -расширение кольца $\mathbb{Z}$ содержит поле рациональных чисел $\mathbb{Q}$.

ПРИМЕР 3. Кольцо Новикова $\mathbb{Z}((q))$ формальных рядов Лорана с целыми коэффициентами является DS -расширением кольца полиномов $\mathbb{Z}[q]$.

ТЕОРЕМА 3. Рассмотрим следующие условия: (1) L является DS -расширением кольца K ; (2) образ отображения $ev_{L/K}: L[K] \rightarrow L[x]^*$ всюду плотен; (3) $\text{Num}_{L/K} = L[x]$; (4) для любого $a \in L$ образ композиции $K \hookrightarrow L \rightarrow L/(a)$ бесконечен. Тогда (1) $\Rightarrow$ (2) $\Rightarrow$ (3) $\Rightarrow$ (4). Более того, если L — факториальное кольцо, то (4) $\Rightarrow$ (3), и если L — кольцо дискретного нормирования, то (4) $\Rightarrow$ (1).

Приложения к алгебрам когомологических операций. Пусть $N(R)$ — группа формальных степенных рядов $\{x(t) = t + \sum x_k t^{k+1}, x_k \in R\}$ относительно подстановки ряда в ряд. Эта группа играет важную роль, в том числе в алгебраической топологии (см. [6]–[8]) и теории групп (см. [9]). Группа $N(R)$ является группой R -точек градуированной алгебры Хопфа $N = \mathbb{Z}[x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 2i$, с диагональю $\Delta x_k = \sum x_i \otimes [x(t)]_{k+1}^{i+1}$, где $[y(t)]_j$ — коэффициент при t^j у ряда $y(t)$. Известная в теории комплексных кобордизмов алгебра Ландвебера–Новикова S является градуированной алгеброй Хопфа, градуированно двойственной над $\mathbb{Z}$ алгебре N . Используя все гомоморфизмы, но уже без учета градуировки, получаем топологические неградуированные алгебры Хопфа $\text{Hom}(N, \mathbb{Z}) = \tilde{S}$ и $\text{Hom}(N, R) \cong \tilde{S} \hat{\otimes} R$.

СЛЕДСТВИЕ 1. Пусть R — DS -расширение кольца Q . Тогда топологическая R -алгебра Хопфа $\tilde{S} \hat{\otimes} R$ содержит всюду плотную R -подалгебру Хопфа, изоморфную $R[N(Q)]$.

Пусть теперь R — некоторая алгебра над полем вычетов $\mathbb{F}_p$. Обозначим через $P(R)$ группу формальных рядов вида $\sum x_i t^{p^i}$, где $x_i \in R$ и $x_0 = 1$. Группа $P(R)$ является группой R -точек градуированной алгебры Хопфа $P = \mathbb{F}_p[x_1, x_2, \dots]$, $\deg x_i = 2(p^i - 1)$, если $p > 2$, и $\deg x_i = 2^i - 1$ при $p = 2$, с диагональю $\Delta x_k = x_k \otimes 1 + 1 \otimes x_k + \sum x_i \otimes x_{k-i}^{p^i}$. Градуированная алгебра Хопфа, градуированно двойственная над $\mathbb{F}_p$ алгебре P , изоморфна алгебре квадратов Стиррода $\mathcal{A}_2$ при $p = 2$ и алгебре приведенных степеней Стиррода $\mathcal{A}_p$ при $p > 2$. Как и выше, введем топологические неградуированные алгебры Хопфа $\text{Hom}(P, \mathbb{F}_p) = \tilde{\mathcal{A}}$ и $\text{Hom}(P, R) \cong \tilde{\mathcal{A}} \hat{\otimes} R$.

СЛЕДСТВИЕ 2. Пусть R — некоторое DS -расширение $\mathbb{F}_p$ -алгебры Q . Тогда топологическая R -алгебра Хопфа $\tilde{\mathcal{A}} \hat{\otimes} R$ содержит всюду плотную R -подалгебру Хопфа, изоморфную $R[P(Q)]$.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

- [1] S. Lang. Algebra. Reading, MA: Addison-Wesley, 1984. [2] V. M. Buchstaber, E. G. Rees // Selecta Math. (N.S.). 2002. V. 8. № 4. P. 523–535. [3] A. Baker, F. Clarke, N. Ray, L. Schwartz // Trans. Amer. Math. Soc. 1989. V. 316. № 2. P. 385–432. [4] Т. Ekedahl // Homology Homotopy Appl. 2002. V. 4. № 2, part 1. P. 191–218 (electronic). [5] J. Hubbuck // J. London Math. Soc. (2). 1997. V. 55. № 1. P. 65–75. [6] В. М. Бухштабер, А. В. Шокуров // Функц. анализ и его прил. 1978. Т. 12. № 3. С. 1–11. [7] V. Buchstaber // Amer. Math. Soc. Transl. Ser. 2. 1995. V. 170. P. 9–31. [8] D. Ravenel. Complex Cobordism and Stable Homotopy Groups of Spheres. Orlando, FL: Academic Press, 1986. [9] R. Camina. The Nottingham group. New horizons in pro- p groups // Progr. Math. 2000. V. 184. P. 205–221.

Математический институт им. В. А. Стеклова РАН;
Бристольский университет
E-mail: buchstab@mendeleev.ru, a.lazarev@bristol.ac.uk

Принято редколлегией
15.01.2004